Комплексный интеграл

Волченко Ю.М.

Содержание лекции

Интеграл по комплексному аргументу, его свойства. Теоремы Коши для односвязной и многосвязной областей. Первообразная и неопределенный интеграл. Формула Ньютона-Лейбница и формула интегрирования по частям. Интегральная формула Коши. Интеграл типа Коши. Бесконечная дифференцируемость комплексных функций.

19 октября 2015 г.

Комплексный интеграл является своеобразным сборником интегралов: в общем случае он представляет собой пару криволинейных интегралов II рода (поскольку так определяется); иногда превращается в определенный интеграл, подчиняющийся, например, формуле Ньютона-Лейбница и допускающий интегрирование по частям. Иногда и в интегрировании нет необходимости: интеграл вычисляется по простой алгебраической формуле, а иногда и того проще: сразу видно, что он равен нулю. Что же он собой представляет?

1 Понятие комплексного интеграла

Интеграл по комплексному аргументу определяется на непрерывной кусочно гладкой кривой γ, расположенной в комплексной плоскости z, и берется от непрерывной комплексной функции $f(z) = u(x, y) + jv(x, y)$. Соответствующая формула имеет вид

$$\int\limits_{\gamma} f(z)\, dz \stackrel{\triangle}{=} \int\limits_{\gamma} (u + jv)\,(dx + j\,dy) = \int\limits_{\gamma} u\,dx - v\,dy + j\int\limits_{\gamma} u\,dy + v\,dx, \quad (1)$$

причем в правой части стоят криволинейные интегралы II рода.

Из приведенной формулы понятно, что свойства комплексного интеграла должны быть аналогичны свойствам криволинейного интеграла II рода. Поэтому некоторые из них приводятся без доказательства.

СВОЙСТВА ИНТЕГРАЛА ПО КОМПЛЕКСНОМУ АРГУМЕНТУ

1°. *Пусть γ – контур, тогда*

$$\int\limits_{\gamma^+} f(z)\,dz = -\int\limits_{\gamma^-} f(z)\,dz.$$

2°. *Если $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$, то*

$$\int\limits_{\gamma_1+\gamma_2} f(z)\,dz = \int\limits_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int\limits_{\gamma_2} f(z)\,dz.$$

3°. *Комплексный интеграл линеен:*

$$\int\limits_{\gamma} [\alpha f(z) + \beta g(z)]\,dz = \alpha\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz + \beta\int\limits_{\gamma} g(z)\,dz.$$

4°. *Справедлива оценка интеграла*

$$\left|\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz\right| \le \int\limits_{\gamma} |f(z)|\,dl,$$

причем интеграл справа – криволинейный интеграл I рода.

Для $z = \rho e^{j\varphi}$ имеем $|z| = \rho = \mathrm{Re}\left(e^{-j\varphi}\rho e^{j\varphi}\right) = \mathrm{Re}\left(e^{-j\varphi}z\right)$. Докажем для комплексной функции $f(t)$ действительного аргумента $t \in [a, b]$ неравенство

$$\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| \le \int_a^b |f(t)|\,dt.$$

Если $\int_a^b f(t)\,dt = 0$, то неравенство тривиально. Пусть $\theta = \mathrm{Arg}\int_a^b f(t)\,dt$, тогда

$$\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| = \mathrm{Re}\left[e^{-j\theta}\int_a^b f(t)\,dt\right] = \int_a^b \mathrm{Re}\left[e^{-j\theta}f(t)\right]dt =$$
$$= \int_a^b \mathrm{Re}\left[e^{-j\theta}|f(t)|\,e^{j\psi}\right]dt = \int_a^b \mathrm{Re}\left[|f(t)|\,e^{j(\psi-\theta)}\right]dt \le \int_a^b |f(t)|\,dt,$$

где $\psi = \mathrm{Arg}\, f(t)$.

Теперь докажем основное неравенство, параметризуя кривую γ с помощью параметра t как $z = z(t)$, $t \in [a, b]$:

$$\left|\int\limits_{\gamma} f(z)\, dz\right| = \left|\int_a^b f[z(t)]\, z'(t)\, dt\right| \leq \int_a^b |f[z(t)]|\, |z'(t)|\, dt = \int\limits_{\gamma} |f[z(t)]|\, dl,$$

поскольку $|z'(t)|\, dt = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\, dt = dl$.

5° *Если кривая γ имеет длину L, а функция $f(z)$ удовлетворяет неравенству*

$$|f(z)| \leq M$$

для всех $z \in \mathbb{C}$, то

$$\left|\int\limits_{\gamma} f(z)\, dz\right| \leq ML.$$

Следует из предыдущего свойства.

6° *Если аналитическая функция $z = \varphi(\eta)$ устанавливает взаимно однозначное соответствие между кривыми Γ и $\gamma = \varphi(\Gamma)$, то*

$$\int\limits_{\gamma} f(z)\, dz = \int\limits_{\Gamma} f[\varphi(\eta)]\, \varphi'(\eta)\, d\eta. \tag{2}$$

Обозначим $\eta = \xi + j\zeta$, $z = x + jy = \varphi(\eta) = \mu(\eta) + j\nu(\eta) = \mu(\xi,\zeta) + j\nu(\xi,\zeta)$. Тогда из формулы (1) получим

$$\int\limits_{\gamma} f(z)\, dz = \int\limits_{\gamma} [u(x,y) + jv(x,y)]\ (dx + j\, dy) =$$

$$= \int\limits_{\gamma} \{u[\mu(\xi,\zeta), \nu(\xi,\zeta)] + jv[\mu(\xi,\zeta), \nu(\xi,\zeta)]\}\, [d\mu(\xi,\zeta) + j\, d\nu(\xi,\zeta)]. \tag{3}$$

В силу формулы полного дифференциала и аналитичности функции $\varphi(\eta)$ выполняется

$$d\mu(\xi,\zeta) + j\, d\nu(\xi,\zeta) = \frac{\partial\mu}{\partial\xi}\, d\xi + \frac{\partial\mu}{\partial\zeta}\, d\zeta + j\left(\frac{\partial\nu}{\partial\xi}\, d\xi + \frac{\partial\nu}{\partial\zeta}\, d\zeta\right) =$$

$$= \left(\frac{\partial\mu}{\partial\xi} + j\,\frac{\partial\nu}{\partial\xi}\right) d\xi + \left(\frac{\partial\mu}{\partial\zeta} + j\,\frac{\partial\nu}{\partial\zeta}\right) d\zeta =$$

$$= \left(\frac{\partial\mu}{\partial\xi} + j\,\frac{\partial\nu}{\partial\xi}\right) d\xi + j\left(\frac{\partial\mu}{\partial\xi} + j\,\frac{\partial\nu}{\partial\xi}\right) d\zeta =$$

$$= \left(\frac{\partial \mu}{\partial \xi} + j\,\frac{\partial \nu}{\partial \xi}\right)(d\xi + j\,d\zeta) = \varphi'(\eta)\ d\eta.$$

Из этого выражения и (3) следует формула (2).

7° *Если кривая γ имеет параметрическое представление $z = z(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, то*

$$\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz = \int_{\alpha}^{\beta} f[z(t)]\,z'(t)\,dt. \tag{4}$$

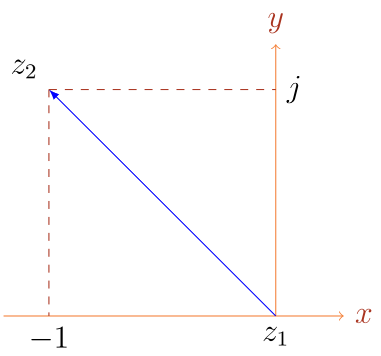
Следствие предыдущего свойства.

Пример 1. *Вычислить интеграл*

$$\int\limits_{\gamma} \overline{z}\,dz,$$

где γ — отрезок соединяющий точки $z_1 = 0$ и $z_2 = j - 1$.

Решение. Используем определение комплексного интеграла. Так как для $z = x + jy$ имеем $\overline{z} = x - jy$, то $u = x$, $v = -y$, а, так как уравнение отрезка, соединяющего точки z_1 и z_2, есть $y = -x$, то $dy = -dx$, и по формуле (1) получаем



$$\int\limits_{\gamma} \overline{z}\,dz = \int\limits_{\gamma} (x - jy)\ (dx + j\,dy) =$$

$$= \int\limits_{\gamma} x\,dx + y\,dy + j\int\limits_{\gamma} x\,dy - y\,dx =$$

$$= \int_{0}^{-1} (x + x)\,dx + j\int_{0}^{-1} (x - x)\,dx = x^2\Big|_{0}^{-1} = 1.$$

Пример 2. *Найти интеграл от функции*

$$f(z) = \frac{1}{z - z_0}$$

по окружности γ радиуса r с центром в точке z_0.

Решение. Сделаем замену $z - z_0 = re^{j\varphi}$ и, учитывая, что $\varphi \in [0; 2\pi]$ и $dz = rje^{j\varphi}$, вычислим интеграл по формуле (4):

$$\int\limits_{\gamma} \frac{dz}{z - z_0} = \int_{0}^{2\pi} \frac{rje^{j\varphi}\,d\varphi}{re^{j\varphi}} = \int_{0}^{2\pi} j\,d\varphi = j\varphi\Big|_{0}^{2\pi} = 2\pi j.$$

Как видим, значение интеграла будет одним и тем же для любого радиуса и любого центра окружности.

2 Теоремы Коши

В последнем примере было отмечено, что результат его решения не зависел от окружности, по которой выполнялось интегрирование. А ведь при определенных условиях это характерно как раз для криволинейного интеграла II рода, с помощью которого и определяется комплексный интеграл! А в векторном анализе это было свойством, характеризующим векторное поле! Свойство это называлось независимостью линейного интеграла от формы пути интегрирования, и векторное поле в этом случае называлось потенциальным. Нам предстоит выяснить, существует ли на самом деле связь между векторными полями и комплексным интегралом и обладает ли последний указанным выше свойством.

Оказывается, комплексный интеграл не зависит от формы пути интегрирования $\gamma \subset D$, если подынтегральная функция аналитична в области D.

Теорема 1 (Коши для односвязной области)**.** *Пусть функция $f(z)$ аналитична в области D. Тогда для любого контура $\gamma \subset D$ выполняется равенство*

$$\boxed{\int\limits_{\gamma} f(z)\, dz = 0.}$$

Если, кроме того, $f(z)$ непрерывна в замкнутой области $\overline{D} = D + \partial D$, то

$$\boxed{\int\limits_{\partial D} f(z)\, dz = 0.}$$

Доказательство. Если $G\gamma$ – область, ограниченная контуром γ, то, применяя формулу Грина[†] и учитывая условия Коши-Римана, получаем

$$\int\limits_{\gamma} u\,dx - v\,dy = \iint\limits_{G_\gamma} \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) dx\,dy = 0,$$

$$\int\limits_{\gamma} u\,dy + v\,dx = \iint\limits_{G_\gamma} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) dx\,dy = 0.$$

В случае непрерывности $f(z)$ в $\overline{D} = D + \partial D$ вместо контура $\gamma \subset D$ можно взять ∂D. □

[†]Лекция «Ротор и дивергенция».

Для многозначных областей имеет место аналогичное утверждение.

Теорема 2 (Коши для многосвязной области). *Пусть функция $f(z)$ – аналитическая в многосвязной области D с внутренними границами $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ и непрерывна в замкнутой области $\overline{D} = D + \partial D + \gamma_1 + \ldots + \gamma_n$. Тогда имеет место равенство*

$$\boxed{\int\limits_{\Gamma^+} f(\eta)\, d\eta = 0, \qquad \Gamma^+ = \partial D^+ + \sum_{i=1}^{n} \gamma_i^+.}$$

Следует из теоремы 1 и формулы Грина для многосвязной области†.

Пусть функция $f(z)$ аналитична в односвязной области D. В силу теоремы 1 комплексный интеграл от такой функции по кривой, соединяющей точки z_0 и z, не зависит от формы пути интегрирования (доказывается так же, как аналогичная теорема векторного анализа‡). Поэтому указанный интеграл можно записать в виде интеграла с переменным верхним пределом

$$\Phi(z) = \int_{z_0}^{z} f(\eta)\, d\eta. \tag{5}$$

Теорема 3. *Если функция $f(z)$ аналитична в односвязной области D, то интеграл* (5) *является аналитической функцией верхнего предела, причем $\Phi'(z) = f(z)$*

Доказательство. Приращение функции $\Phi(z)$ в ответ на приращение Δz имеет вид

$$\Delta\Phi(z) = \int_{z_0}^{z+\Delta z} f(\eta)\, d\eta - \int_{z_0}^{z} f(\eta)\, dz = \int_{z}^{z+\Delta z} f(\eta)\, d\eta.$$

Поскольку интеграл не зависит от формы пути интегрирования, выберем в качестве пути, соединяющего точки z и $z+\Delta z$, отрезок прямой, который обозначим $A(z)$ и для которого $\int_z^{z+\Delta z} d\eta = \Delta z$. Тогда

$$\begin{aligned} \Delta\Phi &= \int_{z}^{z+\Delta z} [f(\eta) - f(z)]\, d\eta + \int_{z}^{z+\Delta z} f(z)\, d\eta = \\ &= \int_{z}^{z+\Delta z} [f(\eta) - f(z)]\, d\eta + f(z) \int_{z}^{z+\Delta z} d\eta = \\ &= \int_{z}^{z+\Delta z} [f(\eta) - f(z)]\, d\eta + f(z)\, \Delta z, \end{aligned} \tag{6}$$

† Лекция «Ротор и дивергенция».
‡ Лекция «Потенциальность и соленоидальность».

$$\frac{\Delta\Phi}{\Delta z} = \frac{1}{\Delta z}\int_z^{z+\Delta z} \left[f(\eta) - f(z)\right] d\eta + f(z)\,. \tag{7}$$

Так как функция $f(z)$ аналитична в области D, то она непрерывна в ней[†], поэтому

$$\forall\,(\varepsilon > 0)\,\exists\,(\delta > 0)\,\forall\,(\Delta z \neq 0)\ \ |\Delta z| < \delta \Longrightarrow |f(z) - f(\eta)| < \varepsilon.$$

Следовательно,

$$\left|\int_z^{z+\Delta z} \left[f(\eta) - f(z)\right] d\eta\right| < \varepsilon\,|\Delta z|$$

и из (7) получим

$$\left|\frac{\Delta\Phi}{\Delta z} - f(z)\right| = \frac{1}{|\Delta z|}\left|\int_z^{z+\Delta z} \left[f(\eta) - f(z)\right] d\eta\right| < \varepsilon,$$

что равносильно равенству

$$\lim_{\Delta z \to 0}\frac{\Delta\Phi}{\Delta z} = \Phi'(z) = f(z)\,.$$

Непрерывность функции $f(z)$ обеспечивает непрерывность производной $\Phi'(z)$, а, значит, и аналитичность функции $\Phi(z)$ в области D. $\square$

Пусть функция $f(z)$ аналитична в области D. Функция $F(z)$, аналитическая в этой же области, называется ***первообразной*** для $f(z)$ в D, если в D выполняется $F'(z) = f(z)$. Понятно, что и $F(z) + C$, $C = \mathrm{const}$, тоже является первообразной. Докажем и обратное: если $F_1(z)$ и $F_2(z)$ — две первообразные для функции $f(z)$, то они отличаются на постоянную. Действительно, обозначим $\varphi(z) = F_2(z) - F_1(z) = u(x,y) + jv(x,y)$. Очевидно, эта функция аналитична в D, причем

$$\varphi'(z) = F_2'(z) - F_1'(z) = f(z) - f(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + j\,\frac{\partial v}{\partial x} = 0,$$

откуда $u_x' = 0$, $v_x' = 0$, а в силу условий Коши-Римана и $u_y' = 0$, $v_y' = 0$. Таким образом, $u = \mathrm{const}$, $v = \mathrm{const}$, а, значит, $\varphi = \mathrm{const}$, что и требовалось доказать.

Множество всех первообразных для функции $f(z)$ называется ***неопределенным интегралом*** от $f(z)$ и обозначается как

$$\int f(z)\,dz = F(z) + C,$$

где $F(z)$ — какая-нибудь первообразная для $f(z)$, C — произвольная постоянная.

[†] В силу дифференцируемости ее действительной и мнимой частей последние непрерывны, а с ними непрерывна и $f(z)$.

Следствие 1. *В силу теоремы 3 функция* (5) *является первообразной для функции* $f(z)$.

Следствие 2. *Если функция* $f(z)$ *аналитична в односвязной области* D, *то имеет место* ***формула Ньютона-Лейбница***

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)\,dz = F(z_2) - F(z_1) = F(z)\Big|_{z_1}^{z_2},$$

где $z_1, z_2 \in D$, $F(z)$ *— какая-либо первообразная для* $f(z)$.

Доказательство. В соответствии с (5)

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)\,dz = \int_{z_0}^{z_2} f(z)\,dz - \int_{z_0}^{z_1} f(z)\,dz = \Phi(z_2) - \Phi(z_1).$$

Подставив в эту формулу вместо функции Φ любую другую первообразную $F(z) = \Phi(z) + C$, получим требуемое.

Следствие 3. *Если функции* $f(z)$ *и* $g(z)$ *— аналитические в односвязной области* D, *и* $z_1, z_2 \in D$, *то имеет место формула интегрирования по частям:*

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)\,g'(z)\,dz = f(z)\,g(z)\Big|_{z_1}^{z_2} - \int_{z_1}^{z_2} f'(z)\,g(z)\,dz.$$

Доказательство. Проинтегрировав тождество

$$[f(z)\,g(z)]' = f'(z)\,g(z) + f(z)\,g'(z),$$

получим

$$\int_{z_1}^{z_2} [f(z)\,g(z)]'\,dz = \int_{z_1}^{z_2} f'(z)\,g(z)\,dz + \int_{z_1}^{z_2} f(z)\,g'(z)\,dz.$$

По формуле Ньютона-Лейбница

$$\int_{z_1}^{z_2} [f(z)\,g(z)]'\,dz = f(z)\,g(z)\Big|_{z_1}^{z_2}.$$

Эта и предыдущая формулы дают необходимый результат.

Пример 3. *Вычислить интеграл*

$$\int_{j-1}^{j+2} (2z+3)\,dz.$$

Решение. Так как подынтегральная функция аналитична на всей комплексной плоскости, то можно применить формулу Ньютона-Лейбница:

$$\int_{j-1}^{j+2} (2z+3)\, dz = \left. \left(z^2+3z\right) \right|_{j-1}^{j+2} = (j+2)^2 + 3\,(j+2) - (j-1)^2 - 3\,(j-1) =$$
$$= -1 + 4j + 4 + 3j + 6 + 1 + 2j - 1 - 3j + 3 = 12 + 6j.$$

Пример 4. *Найти интеграл*

$$\int_0^j z\cos z\, dz.$$

Решение. Функции z и $\cos z$ всюду аналитичны. Используя формулу интегрирования по частям, получим

$$\int_0^j z\cos z\, dz = \langle f = z,\ g' = \cos z,\ f' = 1,\ g = \sin z \rangle = z\sin z\Big|_0^j - \int_0^j \sin z\, dz =$$
$$= j\sin j + \cos z\Big|_0^j = j\sin j + \cos j - 1 = j\,\frac{e^{jj} - e^{-jj}}{2j} + \frac{e^{jj} + e^{-jj}}{2} - 1 =$$
$$= \frac{1}{2}\left(e^{-1} - e\right) + \frac{1}{2}\left(e^{-1} + e\right) - 1 = e^{-1} - 1.$$

3 Интегральная формула Коши

С помощью теоремы Коши можно установить связь между значениями аналитической функции в любой внутренней точке области со значениями этой функции на контуре, охватывающем эту точку.

Теорема 4. *Пусть функция $f(z)$ аналитична в области D и точка z_0 принадлежит этой области. Тогда для любого контура $\gamma \subset D$, содержащего внутри себя точку z_0, и такого, что $D_\gamma \subset D$, справедлива* ***интегральная формула Коши***

$$\boxed{f(z_0) = \frac{1}{2\pi j} \int\limits_{\gamma^+} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz.} \qquad (8)$$

Если же функция $f(z)$ непрерывна в замкнутой области $\overline{D} = D + \partial D$, то в качестве контура γ можно брать и границу ∂D, т. е. для любых $z_0 \in D$ справедлива формула

$$\boxed{f(z_0) = \frac{1}{2\pi j} \int\limits_{\partial D^+} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz.} \qquad (9)$$

Доказательство см. в Приложении[1)].

Замечание 1. *Формула Коши остается справедливой и для многосвязной области, если под границей ∂D области D понимать полную границу (внешняя граница плюс внутренние) этой области с положительным направлением обхода.*

Формула Коши используется при вычислении интегралов.

Пример 5. *Вычислить интеграл*

$$\int\limits_{|z-2|=3} \frac{e^z}{z-1}\,dz.$$

Решение. Подынтегральная функция не является аналитической в круге $|z-2|=3$, так как имеет разрыв в точке $z_0 = 1$. Но числитель подынтегральной функции аналитичен. Применяя формулу Коши, находим

$$\int\limits_{|z-2|=3} \frac{e^z}{z-1}\,dz = 2\pi j f(1) = 2\pi j e.$$

□

Интегралом типа Коши называют функцию

$$F(z) = \frac{1}{2\pi j}\int\limits_{\gamma} \frac{\varphi(\eta)}{\eta - z}\,d\eta, \qquad (10)$$

где γ — непрерывная кусочно гладкая (не обязательно замкнутая) кривая, $\varphi(\eta)$ непрерывна на γ, а $z \in \gamma$.

Теорема 5. *Если функция $\varphi(z)$ непрерывна на непрерывной кусочно гладкой кривой γ, то интеграл типа Коши является аналитической функцией во всякой односвязной области D, не содержащей точек кривой γ. При этом для производной $F'(z)$ выполняется*

$$F'(z) = \frac{1}{2\pi j}\int\limits_{\gamma} \frac{\varphi(\eta)}{(\eta - z)^2}\,d\eta. \qquad (11)$$

Более того у $F(z)$ в области D существуют производные любого порядка, определяемые по формуле

$$F^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi j}\int\limits_{\gamma} \frac{\varphi(\eta)}{(\eta - z)^{n+1}}\,d\eta,\ n = 1, 2, \ldots. \qquad (12)$$

Доказательство приведено в Приложении[2)].

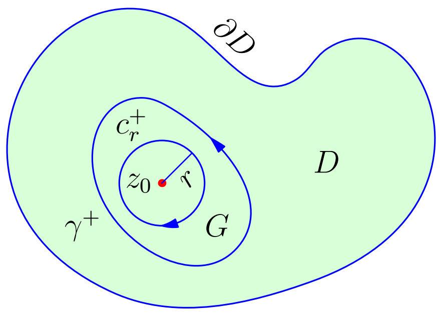
Следствие 4. *У аналитической в области D функции $f(z)$ существуют в этой области производные любого порядка, являющиеся аналитическими в D функциями и представимые формулами*

$$\boxed{f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi j} \int\limits_{\gamma} \frac{f(\eta)}{(\eta - z)^{n+1}}\, d\eta,\ n = 1, 2, \ldots .}$$

Доказательство. Вытекает из того, что интегральная формула Коши (8) является частным случаем интеграла типа Коши (10). □

Приложение

[1)] Поскольку функция $f(z)$ аналитична в области D, то функция $f(z)/(z-z_0)$ аналитична в области $D\setminus\{z_0\}$. Из точки z_0, как из центра, опишем окружность c_r радиуса r, столь малого, чтобы замкнутый круг $\overline{K}_r = c_r + D_{c_r}$ целиком лежал внутри области D_γ.



В замкнутой двусвязной области G, ограниченной внешним контуром γ и внутренним контуром c_r, функция $f(z)$ аналитична, следовательно, по теореме Коши для многосвязной области

$$\int\limits_{\gamma^+ + c_r^+} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = 0,$$

или

$$\int\limits_{\gamma^+} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = \int\limits_{c_r^-} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz. \tag{П1}$$

Сделаем замену переменной $z-z_0 = re^{j\varphi}$, $dz = rje^{j\varphi}\,d\varphi$, тогда

$$\int\limits_{c_r^-} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = \int_0^{2\pi} \frac{f\left(z_0+re^{j\varphi}\right)}{re^{j\varphi}}\,rje^{j\varphi}\,d\varphi = j\int_0^{2\pi} f\left(z_0+re^{j\varphi}\right)d\varphi =$$

$$= j\int_0^{2\pi} \left[f\left(z_0+re^{j\varphi}\right) - f(z_0)\right]d\varphi + 2\pi j f(z_0).$$

Подставим это выражение в правую часть формулы (П1):

$$\int\limits_{\gamma^+} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = j\int_0^{2\pi} \left[f\left(z_0+re^{j\varphi}\right) - f(z_0)\right]d\varphi + 2\pi j f(z_0). \tag{П2}$$

В силу непрерывности функции $f(z)$ в точке z_0 справедливо утверждение, что

$$\forall(\varepsilon>0)\,\exists(\delta>0)\,\forall(r>0)\ \ r<\delta\ \forall(\varphi\in[0;2\pi]) \Longrightarrow \left|f\left(z_0+re^{j\varphi}\right)-f(z_0)\right| < \varepsilon.$$

Но тогда

$$\left|\int_0^{2\pi} \left[f\left(z_0+re^{j\varphi}\right) - f(z_0)\right]d\varphi\right| < 2\pi\varepsilon$$

и, значит,

$$\lim_{r\to 0}\int_0^{2\pi} \left[f\left(z_0+re^{j\varphi}\right) - f(z_0)\right]d\varphi = 0.$$

Учитывая, что левая часть равенства (П2) не зависит от r, и переходя в этом равенстве к пределу при $r\to 0$, получим формулу (8).

[2)] Интегралы Коши (8) и (9) зависят от параметра z_0, поэтому нам понадобится теорема о дифференцируемости комплексного интеграла по параметру.

Теорема 6. *Пусть $\eta = \mu + j\nu$ — точка непрерывной кусочно гладкой кривой γ, а $z = x + jy$ — точка области D. Пусть функция $\psi(\eta, z)$ для любой точки $\eta\in\gamma$ является аналитической функцией для всех $z\in D$, причем функция ψ и ее производная $\partial\psi/\partial z$ непрерывны по совокупности переменных $\eta\in\gamma$ и $z\in D$. Тогда функция*

$$F(z) = \int\limits_{\gamma} \psi(\eta, z)\,d\eta \tag{П3}$$

является аналитической в области D и ее производная может быть записана в виде

$$F'(z) = \int\limits_{\gamma} \frac{\partial \psi(\eta, z)}{\partial z}\, d\eta. \tag{П4}$$

Доказательство. Представим функции ψ и F в алгебраической форме:

$$\begin{aligned} \psi(\eta, z) &= u(\mu, \nu, x, y) + jv(\mu, \nu, x, y), \\ F(z) &= p(x, y) + jq(x, y). \end{aligned}$$

Тогда из равенства (П3) получим

$$p(x, y) = \int\limits_{\gamma} u\, d\mu - v\, d\nu, \qquad q(x, y) = \int\limits_{\gamma} v\, d\mu + u\, d\nu.$$

По условию теоремы производные функций u и v по переменным x и y непрерывны по совокупности переменных μ, ν, x, y. Поэтому под знаками интегралов можно дифференцировать по x и y:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= \int\limits_{\gamma} \frac{\partial u}{\partial x}\, d\mu - \frac{\partial v}{\partial x}\, d\nu, \qquad & \frac{\partial p}{\partial y} &= \int\limits_{\gamma} \frac{\partial u}{\partial y}\, d\mu - \frac{\partial v}{\partial y}\, d\nu, \\ \frac{\partial q}{\partial x} &= \int\limits_{\gamma} \frac{\partial v}{\partial x}\, d\mu + \frac{\partial u}{\partial x}\, d\nu, \qquad & \frac{\partial q}{\partial y} &= \int\limits_{\gamma} \frac{\partial v}{\partial y}\, d\mu + \frac{\partial u}{\partial y}\, d\nu. \end{aligned}$$

Функции u и v как функции x и y удовлетворяют условиям Коши-Римана в области D, следовательно, последние два интеграла переписываются так:

$$\frac{\partial q}{\partial x} = \int\limits_{\gamma} -\frac{\partial u}{\partial y}\, d\mu + \frac{\partial v}{\partial y}\, d\nu = -\frac{\partial p}{\partial y}, \qquad \frac{\partial q}{\partial y} = \int\limits_{\gamma} \frac{\partial u}{\partial x}\, d\mu - \frac{\partial v}{\partial x}\, d\nu = \frac{\partial p}{\partial x}.$$

Таким образом, функции p и q в области D удовлетворяют условиям Коши-Римана. Кроме того, частные производные p и q по x и y непрерывны в D. Значит, функция $F(z)$ аналитична в этой области. Справедливость формулы (П4) вытекает из равенства

$$\begin{aligned} F'(z) &= \frac{\partial p}{\partial x} + j\,\frac{\partial q}{\partial x} = \int\limits_{\gamma} \frac{\partial u}{\partial x}\, d\mu - \frac{\partial v}{\partial x}\, d\nu + j \int\limits_{\gamma} \frac{\partial v}{\partial x}\, d\mu + \frac{\partial u}{\partial x}\, d\nu = \\ &= \int\limits_{\gamma} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + j\,\frac{\partial v}{\partial x} \right) d\mu + \int\limits_{\gamma} \left(-\frac{\partial v}{\partial x} + j\,\frac{\partial u}{\partial x} \right) d\nu = \\ &= \int\limits_{\gamma} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + j\,\frac{\partial v}{\partial x} \right) (d\mu + j\, d\nu) = \int\limits_{\gamma} \frac{\partial \psi(\eta, z)}{\partial z}\, d\eta. \end{aligned}$$

□

Перейдем теперь непосредственно к доказательству теоремы 5. Рассмотрим функции

$$\psi_k(\eta, z) = \frac{(k-1)!\varphi(\eta)}{(\eta - z)^k},\ k = 1, 2, \ldots .$$

Для всех точек $\eta \in \gamma$ и всех z из любой односвязной области D, не содержащей точек кривой γ, эти функции удовлетворяют условиям теоремы 6, поэтому для функции (10)

$$F'(z) = \frac{1}{2\pi j} \int\limits_{\gamma} \frac{\partial \psi_1(\eta, z)}{\partial z} d\eta = \frac{1}{2\pi j} \int\limits_{\gamma} \frac{\partial}{\partial z} \frac{\varphi(\eta)}{\eta - z} d\eta = \frac{1}{2\pi j} \int\limits_{\gamma} \frac{\varphi(\eta)}{(\eta - z)^2} d\eta.$$

Таким образом, верна формула (11). Поскольку

$$\frac{\partial \psi_k(\eta, z)}{\partial z} = \frac{k!\varphi(\eta)}{(\eta - z)^{k+1}}, \ k = 2, 3, \dots ,$$

то, пользуясь методом математической индукции, нетрудно убедиться и в справедливости формулы (12).

Литература

[1] Бугров Я.С., Никольский С.М. *Высшая математика. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного* . – М.: Наука, 1985, – с. 391-400.

[2] Письменный Д.Т. *Конспект лекций по высшей математике.* – М.: Рольф, 2000. Ч. 2. – с. 199–208.