

Криволинейный и поверхностный интегралы

Волченко Ю.М.

Содержание лекции

Понятие криволинейного интеграла. Условия его существования, вычисление и применение. Понятие поверхностного интеграла. Условия его существования, вычисление и применение.

Вычисление криволинейных и поверхностных интегралов в системе *Mathematica*.

11 марта 2015 г.

1 Криволинейный интеграл

1.1 Определение

Интеграл, с которым мы сейчас познакомимся, является обобщением определенного интеграла. Обобщение заключается в том, что не отрезок интегрирования разбивается на ячейки, а заданная кривая в трехмерном пространстве, в которую преобразуется отрезок (при определенных условиях разбиение кривой инициирует разбиение на ячейки и некоторого отрезка, по которому выполняется практическое интегрирование). Понятно? Студент на моей лекции однажды спросил: «А Вы сами поняли то, что сейчас сказали?» Более понятно это выглядит так.

Пусть имеется кривая \mathcal{AB} , определяемая векторной функцией

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}, \quad (1)$$

$t_0 \leq t \leq T$. Следуя общей схеме определения интегралов[†], эту кривую будем считать тем геометрическим объектом Q , которое мы произвольным образом разобьем на части-ячейки $\Delta l_i = \mathcal{A}_{i-1}\mathcal{A}_i$ точками $A_1 = A, A_2, \dots, A_n = B$ и выберем в каждой ячейке произвольным же образом точки $P_i(x_i, y_i, z_i)$, где

[†]Лекция «Двойной интеграл I».

$x_i = x(t_i)$, $y_i = y(t_i)$, $z_i = z(t_i)$ (рис. 1). Пусть на кривой определена функция $f(P)$. Тогда, если существует интегральный предел интегральной суммы

$$\sum_{i=1}^n f(P_i) \Delta l_i, \quad (2)$$

то он называется **криволинейным интегралом** (I рода) и обозначается

$$\int_{AB} f(P) dl, \text{ или } \int_{\mathcal{L}} f(P) dl,$$

причем, появление второго интеграла объясняется тем, что кривую можно обозначить и одной буквой, например, \mathcal{L} .

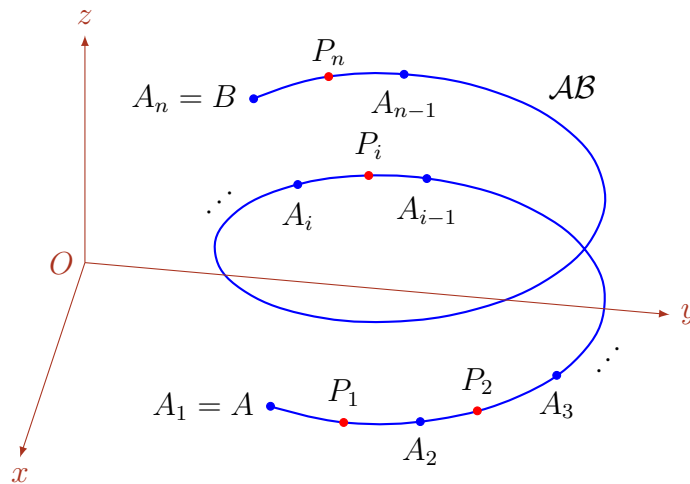


Рис. 1. Разбиение кривой в пространстве.

Чтобы сформулировать условия существования такого интеграла, вспомним, что понятия непрерывности и гладкости кривой (1) нам уже известны[†]. Добавим еще два определения. Кривая (1) называется **кусочно гладкой**, если она непрерывна и ее можно разделить на конечное число гладких частей. Кривая (1) называется **кривой без самопересечений**, если для любых $t_1, t_2 \in [t_0; T]$, таких, что либо $t_1 \in (t_0; T)$, либо $t_2 \in (t_0; T)$, выполняется $\mathbf{r}(t_1) \neq \mathbf{r}(t_2)$. Отметим, что допускается равенство $\mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}(T)$, при выполнении которого самопересечение не возникает, а кривая с таким свойством называется **замкнутой**.

Кривые на рис. 1 и левом рис. 2 (красная кривая является проекцией на плоскость синей кривой) — это кривые без самопересечений, а кривая на правом рис. 2 имеет самопересечение в точке, обозначенной красным цветом. Все упомянутые кривые замкнуты, за исключением кривой на рис. 1.

[†]Лекция «Векторная функция скалярного аргумента».

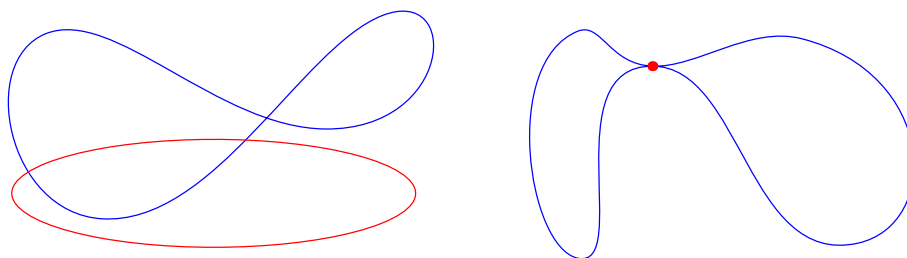


Рис. 2. К самопересечению кривых.

Теорема 1. Если функция $f(P)$ кусочно непрерывна на ограниченной кусочно гладкой кривой AB , то криволинейный интеграл существует.

Теорема 2 (о среднем). Если функция $f(P)$ непрерывна на ограниченной кусочно гладкой кривой \mathcal{L} , то на этой кривой найдется точка M , для которой

$$\int_{\mathcal{L}} f(P) dl = f(M) l,$$

где l — длина \mathcal{L} .

1.2 Вычисление криволинейного интеграла

Преобразуем интегральную сумму (2):

$$\sum_{i=1}^n f(P_i) \Delta l_i = \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \Delta l_i = \sum_{i=1}^n f(x(t_i), y(t_i), z(t_i)) \Delta l_i.$$

Если обозначить $\Delta x_i, \Delta y_i, \Delta z_i$ проекции дуги $\Delta l_i = \mathcal{A}_{i-1}\mathcal{A}_i$ на координатные оси, то при малых Δl_i эту дугу можно приближенно считать диагональю параллелепипеда с ребрами $\Delta x_i, \Delta y_i, \Delta z_i$, так что в силу известной формулы, связывающей длину диагонали параллелепипеда с длинами его ребер

$$\Delta l_i \approx \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2 + (\Delta z_i)^2}.$$

Теперь интегральную сумму можно представить в виде

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n f(P_i) \Delta l_i &\approx \\ &\approx \sum_{i=1}^n f(x(t_i), y(t_i), z(t_i)) \sqrt{\left(\frac{\Delta x_i}{\Delta t_i}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta t_i}\right)^2 + \left(\frac{\Delta z_i}{\Delta t_i}\right)^2} \Delta t_i, \end{aligned}$$

где $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$. Переходя в полученном равенстве к интегральному пределу, в левой его части получим криволинейный интеграл, а в правой — определенный:

$$\int_{AB} f(P) dl = \int_{t_0}^T f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)} dt. \quad (3)$$

Эта формула и служит для вычисления криволинейного интеграла.

Для плоской кривой $z(t) \equiv 0$ и равенство упрощается:

$$\int_{AB} f(P) dl = \int_{t_0}^T f(x(t), y(t)) \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt.$$

Если плоская кривая задана в явном виде как $y = y(x)$, $a \leq x \leq b$, параметром t можно считать x , и тогда

$$\int_{AB} f(P) dl = \int_a^b f(x, y(x)) \sqrt{1 + y'^2(x)} dx.$$

Пример 1. Найти сопротивление R проводника с постоянным поперечным сечением S , имеющего форму винтовой линии[†] AB :

$$\mathbf{r}(t) = R \cos t \mathbf{i} + R \sin t \mathbf{j} + vt \mathbf{k},$$

$0 \leq t \leq 2\pi$, если его удельное сопротивление изменяется по закону $\rho = \rho_0 + kt$, где $\rho_0 > 0$, $k > 0$ — константы.

Решение. Как известно из физики, сопротивление однородного проводника выражается формулой $R = \rho l/S$, где l — длина проводника. Произведем разбиение нашего неоднородного проводника на части-ячейки, как это было описано при определении криволинейного интеграла, причем, роль функции f у нас будет играть отношение ρ/S . Тогда произведение $\rho(P_i) \Delta l_i/S$ будет означать сопротивление проводника Δl_i при условии, что величина ρ/S для него приблизительно постоянна и равна $\rho(P_i) \Delta l_i/S$. Следовательно, интегральная сумма

$$\sum_{i=1}^n \frac{\rho(P_i)}{S} \Delta l_i$$

представляет собой приближенное значение сопротивления всего проводника, а его точное значение выражается криволинейным интегралом

$$R = \int_{AB} \frac{\rho(P)}{S} dl.$$

Для вычисления этого интеграла применим формулу (3):

$$R = \frac{1}{S} \int_0^{2\pi} (\rho_0 + kt) \sqrt{R^2 \sin^2 t + R^2 \cos^2 t + v^2} dt =$$

[†]Лекция «Функция I».

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\sqrt{R^2 + v^2}}{S} \int_0^{2\pi} (\rho_0 + kt) dt = \frac{\sqrt{R^2 + v^2}}{S} \left(\rho_0 t + \frac{kt^2}{2} \right) \Big|_0^{2\pi} = \\
 &= \frac{2\pi}{S} \sqrt{R^2 + v^2} (\rho_0 + k\pi).
 \end{aligned}$$

1.3 Приложения

В силу теоремы о среднем для криволинейного интеграла с помощью последнего можно вычислить длину кривой l :

$$l = \int_{\mathcal{L}} dl.$$

Еще одна геометрическая характеристика, которую можно определить, используя криволинейный интеграл, это — площадь цилиндрической поверхности.

Пусть кривая $\mathcal{AB} \subset xOy$ служит направляющей цилиндрической поверхности S , которую задает функция $z = f(x, y)$, а образующая этой поверхности параллельна оси Oz , рис. 3. Разбивая кривую \mathcal{AB} на части, как это было описано при определении криволинейного интеграла, построим на каждом отрезке $A_{i-1}A_i$ вертикальный прямоугольник высоты $f(P_i)$ (следует иметь в виду, что точка P_i в данном случае имеет лишь две координаты). Его площадь будет, таким образом, равна $f(P_i) \cdot A_{i-1}A_i$. Суммируя все такие площади, получим приближенное значение площади цилиндрической поверхности в виде интегральной суммы (2). Осуществляя интегральный предельный переход, придем к точной формуле

$$S = \int_{\mathcal{L}} f(x, y) dl.$$

Так же, как определенный, двойной и тройной интегралы, криволинейный позволяет вычислить массу m или заряд q материальной кривой \mathcal{L} , если задана $\gamma(P)$ — линейная плотность вещества или, соответственно, заряда кривой:

$$\left. \begin{array}{l} m \\ q \end{array} \right] = \int_{\mathcal{L}} \gamma(P) dl.$$

Вообще говоря, материальная кривая является частным случаем трехмерного тела, поэтому все определения статических моментов, центра тяжести и моментов инерции годятся и для трехмерных кривых. Справедливы также все теоремы об этих величинах, рассмотренные ранее[†]. Поэтому здесь мы ограничимся лишь формулами для перечисленных физических величин.

[†]Лекция "Тройной интеграл".

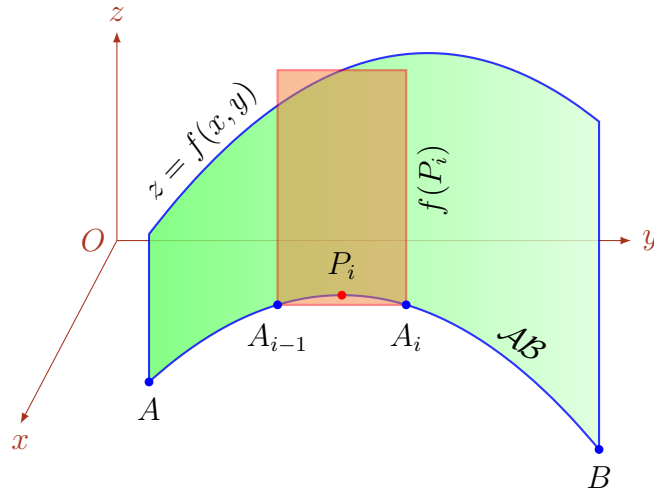


Рис. 3. Площадь цилиндрической поверхности.

Статические моменты материальной кривой \mathcal{L} линейной плотности $\gamma(P)$ относительно координатных плоскостей:

$$M_{yz} = \int_{\mathcal{L}} x\gamma(P) dl, \quad M_{xz} = \int_{\mathcal{L}} y\gamma(P) dl, \quad M_{xy} = \int_{\mathcal{L}} z\gamma(P) dl.$$

Координаты центра тяжести кривой:

$$c_x = \frac{1}{m} \int_{\mathcal{L}} x\gamma(P) dl, \quad c_y = \frac{1}{m} \int_{\mathcal{L}} y\gamma(P) dl, \quad c_z = \frac{1}{m} \int_{\mathcal{L}} z\gamma(P) dl.$$

Моменты инерции кривой относительно начала координат:

$$I_O = \int_{\mathcal{L}} (x^2 + y^2 + z^2) \gamma(P) dl, \quad (4)$$

относительно координатных осей:

$$I_x = \int_{\mathcal{L}} (y^2 + z^2) \gamma(P) dl, \quad I_y = \int_{\mathcal{L}} (x^2 + z^2) \gamma(P) dl,$$

$$I_z = \int_{\mathcal{L}} (x^2 + y^2) \gamma(P) dl,$$

относительно координатных плоскостей:

$$I_{yz} = \int_{\mathcal{L}} x^2 \gamma(P) dl, \quad I_{xz} = \int_{\mathcal{L}} y^2 \gamma(P) dl, \quad I_{xy} = \int_{\mathcal{L}} z^2 \gamma(P) dl.$$

Пример 2. Найти момент инерции винтовой спирали \mathcal{L} : $x(t) = ae^{kt} \cos t$, $y(t) = ae^{kt} \sin t$, $z(t) = be^{kt}$, $0 \leq t \leq \pi$, относительно начала координат, если ее линейная плотность $\gamma(P) \equiv 1$.

Решение. Вычислим производные координатных функций кривой:

$$x'(t) = a(k \cos t - \sin t) e^{kt}, \quad y'(t) = a(k \sin t + \cos t) e^{kt}, \quad z'(t) = bke^{kt},$$

и применим формулы (4) и (3):

$$\begin{aligned} I_O &= \int_{\mathcal{L}} (x^2 + y^2 + z^2) \gamma(P) dl = \int_0^\pi (a^2 + b^2) e^{2kt} \sqrt{a^2(k^2 + 1) e^{2kt} + b^2 k^2 e^{2kt}} dt = \\ &= (a^2 + b^2) \sqrt{a^2(k^2 + 1) + b^2 k^2} \int_0^\pi e^{3kt} dt = \\ &= \frac{1}{3k} (a^2 + b^2) \sqrt{a^2(k^2 + 1) + b^2 k^2} e^{3kt} \Big|_0^\pi = \\ &= \frac{1}{3k} (a^2 + b^2) (e^{3k\pi} - 1) \sqrt{a^2(k^2 + 1) + b^2 k^2}. \end{aligned}$$

2 Поверхностный интеграл

2.1 Определение

Следующий интеграл является обобщением двойного интеграла в том смысле, что двойной интеграл возникает в результате разбиения на ячейки плоской области, а поверхностный интеграл получается при разбиении на ячейки произвольной поверхности, которую можно считать деформированной плоской областью.

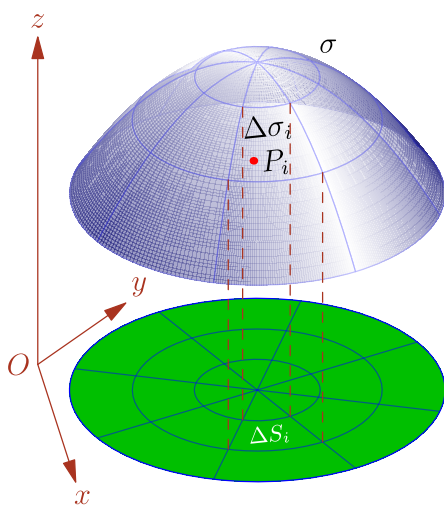


Рис. 4. К поверхностному интегралу.

Рассмотрим поверхность $\sigma: z = \varphi(x, y)$, которая будет тем геометрическим объектом Q , для которого мы и определим новый вид интеграла. Разобьем эту поверхность принадлежащими ей произвольными кривыми на части-ячейки и выберем в каждой ячейке $\Delta\sigma_i$ произвольным образом точку P_i (рис. 4). Предположим, что на σ определена функция $f(P)$. Тогда, если существует интегральный предел интегральной суммы

$$\sum_{i=1}^n f(P_i) \Delta\sigma_i, \quad (5)$$

то он называется **поверхностным интегралом** (I рода) и обозначается

$$\iint_{\sigma} f(P) d\sigma. \quad (6)$$

Теорема 3. Если функция $f(P)$ кусочно непрерывна на ограниченной кусочно гладкой поверхности[†] σ с кусочно гладкой границей, то поверхностный интеграл существует.

Теорема 4 (о среднем). Если функция $f(P)$ непрерывна на ограниченной кусочно гладкой поверхности σ , то на этой поверхности найдется точка M , для которой

$$\iint_{\sigma} f(P) d\sigma = f(M) \sigma.$$

2.2 Вычисление поверхностного интеграла

Спроектируем поверхность σ вместе с разбивающими ее кривыми в область D на плоскости xOy . В результате эта область будет разбита на ячейки ΔS_i , являющиеся проекциями ячеек $\Delta\sigma_i$ (рис. 4). Так как площадь ячейки $\Delta\sigma_i$ может быть вычислена с помощью двойного интеграла[‡], то интегральную сумму (5) можно переписать в виде

$$\sum_{i=1}^n f(P_i) \Delta\sigma_i = \sum_{i=1}^n f(P_i) \iint_{\Delta S_i} \sqrt{1 + \varphi_x'^2 + \varphi_y'^2} dS.$$

По теореме о среднем для двойного интеграла в каждой ячейке ΔS_i найдется такая точка R_i , что выполнится равенство

$$\sum_{i=1}^n f(P_i) \Delta\sigma_i = \sum_{i=1}^n f(P_i) \sqrt{1 + \varphi_x'^2(R_i) + \varphi_y'^2(R_i)} \Delta S_i.$$

Поскольку точки P_i выбираются произвольным образом, ничто не мешает нам их первые координаты отождествить с соответствующими координатами точек R_i и придти к равенству

$$\sum_{i=1}^n f(P_i) \Delta\sigma_i = \sum_{i=1}^n f(R_i, \varphi(R_i)) \sqrt{1 + \varphi_x'^2(R_i) + \varphi_y'^2(R_i)} \Delta S_i.$$

[†]Лекция «Тройной интеграл».

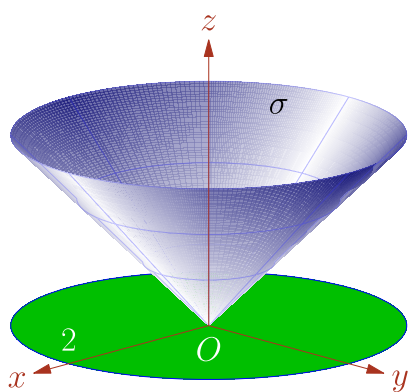
[‡]Лекция «Двойной интеграл II».

Остается реализовать интегральный предел, чтобы в левой части получить поверхностный, а в правой — двойной интеграл:

$$\iint_{\sigma} f(P) d\sigma = \iint_D f(R, \varphi(R)) \sqrt{1 + \varphi'_x{}^2(R) + \varphi'_y{}^2(R)} dS.$$

Пример 3. Найти заряд части конической поверхности $x^2 + y^2 = z^2$, $0 \leq z \leq 2$, если ее поверхностный заряд равен $\gamma = 3R$, где R — радиус конуса на высоте z .

Решение. Очевидно, $R = z = \sqrt{x^2 + y^2}$, а заряд поверхности σ выражается поверхностным интегралом (6), в котором $f = \gamma$. Поэтому заряд q конуса определяется формулой



$$\begin{aligned} q &= \iint_{\sigma} \gamma(P) d\sigma = \\ &= \iint_D \gamma(R, \varphi(R)) \sqrt{1 + \varphi'_x{}^2(R) + \varphi'_y{}^2(R)} dS, \end{aligned}$$

где σ — конус, D — его проекция — круг радиуса 2 на плоскость xOy , $\varphi(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ — правая часть уравнения конуса $z = \sqrt{x^2 + y^2}$. Следовательно, так как

$$\varphi'_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \varphi'_y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

то

$$q = 3 \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} \sqrt{1 + \frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2}} dS = 3\sqrt{2} \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dS. \quad (7)$$

Переходя к полярным координатам по формулам $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$, получим

$$q = 3\sqrt{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \rho^2 d\rho = 3\sqrt{2} \varphi \Big|_0^{2\pi} \frac{\rho^3}{3} \Big|_0^2 = 16\sqrt{2}\pi.$$

2.3 Приложения

Снова используя теорему о среднем, но теперь уже для поверхностного интеграла, при $f(P) \equiv 1$, можно получить площадь поверхности σ :

$$\sigma = \iint_{\sigma} d\sigma.$$

Поверхностный интеграл позволяет найти следующие физические величины, аналогичные тем, что вычисляет тройной интеграл.

Масса m (заряд q) поверхности σ :

$$\left. \begin{array}{l} m \\ q \end{array} \right] = \iint_{\sigma} \gamma(P) d\sigma,$$

где γ — поверхностная плотность (поверхностный заряд) поверхности.

Статические моменты поверхности σ относительно координатных плоскостей:

$$M_{yz} = \iint_{\sigma} x\gamma(P) d\sigma, \quad M_{xz} = \iint_{\sigma} y\gamma(P) d\sigma, \quad M_{xy} = \iint_{\sigma} z\gamma(P) d\sigma.$$

Координаты центр тяжести поверхности σ :

$$x_C = \frac{1}{m} \iint_{\sigma} x\gamma(P) d\sigma, \quad y_C = \frac{1}{m} \iint_{\sigma} y\gamma(P) d\sigma, \quad z_C = \frac{1}{m} \iint_{\sigma} z\gamma(P) d\sigma,$$

где m — масса поверхности.

Моменты инерции поверхности σ относительно начала координат:

$$I_O = \iint_{\sigma} (x^2 + y^2 + z^2) \gamma(P) d\sigma;$$

относительно координатных осей

$$I_x = \iint_{\sigma} (y^2 + z^2) \gamma(P) d\sigma, \quad I_y = \iint_{\sigma} (x^2 + z^2) \gamma(P) d\sigma,$$

$$I_z = \iint_{\sigma} (x^2 + y^2) \gamma(P) d\sigma;$$

относительно координатных плоскостей

$$I_{yz} = \iint_{\sigma} x^2\gamma(P) d\sigma, \quad I_{xz} = \iint_{\sigma} y^2\gamma(P) d\sigma, \quad I_{xy} = \iint_{\sigma} z^2\gamma(P) d\sigma.$$

Пример 4. Найти центр тяжести однородного конуса из примера 3.

Решение. Не нарушая общности можно считать, что $\gamma(P) \equiv 1$. Масса конуса m численно равна площади его поверхности, поэтому $m = \pi r l$, где r — радиус проекции D конуса на xOy , $l = \sqrt{r^2 + h^2} = \sqrt{2}r = 2\sqrt{2}$ — образующая конуса. Поэтому $m = 4\sqrt{2}\pi$. В силу симметрии конуса сразу получаем первые две координаты его центра тяжести $c_x = c_y = 0$. В процессе поиска координаты c_z , повторяя выкладки примера 3, приходим к интегралу

$$c_z = \frac{1}{4\pi} \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dS.$$

Этот интеграл только множителем отличается от интеграла (7). Поэтому

$$c_z = \frac{16\sqrt{2}\pi}{4\pi \cdot 3\sqrt{2}} = \frac{4}{3}.$$

□

В Приложении¹⁾ показано, как вычислять криволинейные и поверхностные интегралы в системе *Mathematica*.

Приложение

1) Ничего нового вы здесь не найдете, так как вычисление рассмотренных интегралов сводится к вычислению интегралов, изученных нами ранее. Впрочем, может быть какие-то детали вычислений будут кому-нибудь полезны.

Так решается задача о моменте инерции винтовой спирали из примера 2:

$$x[t_]:=a e^{kt} \text{Cos}[t]$$

$$y[t_]:=a e^{kt} \text{Sin}[t]$$

$$z[t_]:=b e^{kt}$$

Assuming [a > 0 && b > 0 && k > 0,

$$\int_0^\pi (x[t]^2 + y[t]^2 + z[t]^2) \sqrt{(\partial_t x[t])^2 + (\partial_t y[t])^2 + (\partial_t z[t])^2} dt$$

$$\frac{(a^2 + b^2)(-1 + e^{3k\pi}) \sqrt{b^2 k^2 + a^2 (1 + k^2)}}{3k}$$

Пример 3:

$$f[x_, y_] := \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$fx := \partial_x f[x, y]$$

$$fy := \partial_y f[x, y]$$

trans = {x → r Cos[ff], y → r Sin[ff]};

ffx = fx /. trans;

ffy = fy /. trans;

$$3 \int_0^{2\pi} \int_0^2 r (f[x, y] /. trans) \sqrt{1 + ffx^2 + ffy^2} dr dff$$

$$16\sqrt{2}\pi$$

Наконец, в системе *Mathematica* 10 решим пример 4:

Clear[x, y]

RegionCentroid[ImplicitRegion[z^2 == x^2 + y^2 && 0 ≤ z ≤ 2, {x, y, z}]]

$$\left\{0, 0, \frac{4}{3}\right\}$$

Оператор `Clear` «разопределяет» свои аргументы, т. е. отменяет все данные ранее этим аргументам определения. Теперь им можно дать новые определения, которые не войдут в конфликт с прежними. Иначе *Mathematica* отказалась бы решать поставленную задачу.

Литература

- [1] Бугров Я.С., Никольский С.М. *Высшая математика. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного*. – М.: Наука, 1985, – с. 203–204, 229–231.
- [2] Письменный Д.Т. *Конспект лекций по высшей математике*. – М.: Рольф, 2000. Ч. 2. – с. 77–82, 93–98.