ХАРЬКОВСКАЯ ГОСУДАРСТВЕННАЯ АКАДЕМИЯ
ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОГО ТРАНСПОРТА

ДОНЕЦКИЙ ИНСТИТУТ ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОГО ТРАНСПОРТА

Кафедра высшей математики и физики

Ю.М. ВОЛЧЕНКО

ДИСКРЕТНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАПЛАСА И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ
по дисциплине
"ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА"

Донецк

2002

Волченко Ю.М. Дискретное преобразование Лапласа и его применение. – Донецк: ДонИЖТ, 2002.– 42 с.

Изложен теоретический материал, представляющий часть раздела "Операционное исчисление которая относится к анализу дискретных динамических процессов и входит в программу по высшей математике для студентов специальности АТС. Рассмотрены основные свойства дискретного преобразования Лапласа, вывод формул из таблицы "оригинал-изображение обсуждены вопросы применения конечных разностей и решения конечно-разностных уравнений. Отдельно показано применение операционного исчисления для анализа дискретных динамических линейных систем, в частности, методы получения переходной, весовой и передаточной функций объекта. Изложение сопровождается иллюстративными примерами.

Ил. 5, табл. 2, библиогр. 5 назв.

Методические рекомендации рассмотрены и рекомендованы к публикации на заседании кафедры высшей математики и физики 1 сентября 2001 г., протокол № 1.

Рецензенты

доцент, к.т.н. А.Б. Бойник,
доцент, к.э.н. А.М. Кремлина

Оглавление

1 Дискретные преобразования **4**

1.1 Постановка задач 4

1.2 Понятие о Z- и D-преобразованиях 6

1.3 Свойства D-преобразования 9

2 Конечные разности **19**

2.1 Определения 19

2.2 Изображение 20

2.3 Использование в уравнениях 21

3 Конечно-разностные уравнения **22**

4 Линейные дискретные системы **27**

4.1 Переходная функция 27

4.2 Весовая функция 30

4.3 Передаточная функция 32

A Таблицы **35**

A.1 Свойства D-преобразования 35

A.2 Таблица «оригинал-изображение» 36

Литература **37**

1 Дискретные преобразования

1.1 Задачи, приводящие к разностным уравнениям

Помимо процессов, изменяющихся непрерывно и описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями или уравнениями в частных производных, существует множество систем, функционирование которых происходит скачкообразно, так что состояние системы изменяется в отдельные, изолированные моменты времени. В качестве примеров можно привести релейные устройства, автоматические регуляторы, управляемые ЭВМ и др. Такие системы называют ***дискретными*** и обычно моделируют с помощью так называемых ***разностных*** уравнений.

Пример 1.1 (математический)**.** *Требуется вычислить определитель n-го порядка трехдиагональной матрицы вида*

$$s(n) = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 2 & 4 & 2 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 2 & \ldots & 0 \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 4 \end{vmatrix}.$$

Начало решения. Если разложить этот определитель по элементам первой строки, получим

$$s(n) = 4s(n-1) - 2\begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 2 & \ldots & 0 \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 4 \end{vmatrix} = 4s(n-1) - 4s(n-2).$$

Таким образом, чтобы найти определитель $s(n)$, нужно решить уравнение

$$s(n) + 4s(n-2) - 4s(n-1) = 0, \tag{1.1}$$

которое относится к классу разностных уравнений. □

Пример 1.2 (технический)**.** *Система "импульсный элемент – апериодическое звено".*

Постановка задачи. Рассмотрим последовательное соединение импульсного элемента, генерирующего импульсы прямоугольной формы высоты 1, и апериодического звена с постоянной времени T и коэффициентом усиления k (рис. 1.1). Периодическая последовательность импульсов,

Рис. 1.1: Модулирование сигнала

которые генерирует импульсный элемент (рис. 1.2), определяется параметрами: $T_{\text{и}}$ — длительностью импульса и $T_{\text{п}}$ — тактом дискретной системы (периодом повторения импульсов). Апериодическое звено задается дифференциальным уравнением вида

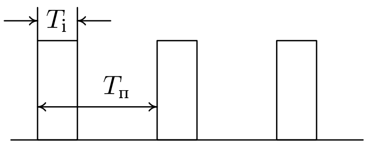

Рис. 1.2: Импульсы

$$T\dot{x} + x = ku,$$

где $u(t)$ — входной, $x(t)$ — выходной сигналы звена, t — время. Например, им может быть колебательный контур (рис. 1.3). Его уравнение:

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = u,$$

так что $T = k = L/R$. Можно показать, что при определенных условиях

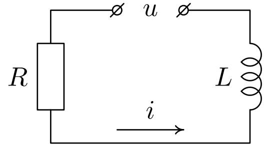

Рис. 1.3: Колебательный контур

функционирование системы "импульсный элемент – апериодическое звено"описывается разностным уравнением вида

$$x(n+1) - \alpha x(n) = k\alpha(\alpha^{-\gamma} - 1)u(n), \tag{1.2}$$

где $\alpha = e^{-T_\text{п}/T}$, $\gamma = T_\text{и}/T_\text{п}$ — относительная длительность импульса. □

В каждом из полученных уравнений в качестве неизвестных фигурируют функции, заданные только в целочисленных точках. Такие функции называются ***решетчатыми***. Фактически это — своеобразно обозначенные последовательности.

Уравнения (1.1) и (1.2) являются ***линейными разностными уравнениями с постоянными коэффициентами***. В общем случае такое уравнение записывают следующим образом:

$$a_0x(n) + a_1x(n+1) + \ldots + a_kx(n+k) = u(n), \tag{1.3}$$

где $a_0, \ldots, a_k$ — действительные числа, называемые ***коэффициентами уравнения***, $x(n)$ — ***неизвестная*** решетчатая функция, $u(n)$ — заданная решетчатая функция. Разность между наибольшим и наименьшим значениями аргумента неизвестной функции называется ***порядком*** разностного уравнения. Например, уравнение (1.1) — второго порядка, уравнение (1.2) — первого порядка, а уравнение (1.3) — k-го порядка. Уравнение (1.3) может быть решено различными способами [1, 2]. Одним из них является операционный метод [1], основывающийся на дискретном преобразовании Лапласа. Поэтому прежде всего изучим дискретные преобразования решетчатых функций.

1.2 Понятие о Z- и D-преобразованиях

Решетчатая функция $f(n)$ называется ***дискретным оригиналом***, если

1) $f(n) = 0$ при $n < 0$,

2) найдутся константы $M > 0$, μ такие, что $|f(n)| \leq Me^{\mu n}$.

Z-преобразованием дискретного оригинала называется функция комплексной переменной $F(z)$ вида

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n) z^{-n}. \tag{1.4}$$

Можно показать, что $F(z)$ аналитична вне круга $|z| = e^{\alpha}$. Формула (1.4) представляет собой разложение функции $F(z)$ в ряд Лорана в окрестности правильной бесконечно удаленной точки. Это позволяет для восстановления решетчатой функции $f(n)$ по ее Z-преобразованию воспользоваться коэффициентами ряда Лорана для $F(z)$, полученными любым способом. Например, можно применить формулу коэффициентов ряда Лорана

$$f(n) = \frac{1}{2\pi j} \int\limits_L F(z) z^{n-1} dz,$$

если все особые точки функции $F(z)$ лежат внутри контура L.

Если в Z-преобразовании (1.4) положить $z = e^q$, то получится ***D-преобразование*** или ***дискретное преобразование Лапласа*** дискретного оригинала:

$$F^*(q) = D[f] = \sum_{n=0}^{\infty} f(n) e^{-nq}. \tag{1.5}$$

Функция $F^*(q)$ носит название ***изображения*** функции $f(n)$, а связь между ними обозначается так:

$$f(n) \leftarrow\!\!\!\!\div F^*(q).$$

Из формулы (1.5) следует равенство, с помощью которого можно по изображению $F^*(q)$ восстановить дискретный оригинал:

$$f(n) = \frac{1}{2\pi j} \int\limits_{\gamma-\pi j}^{\gamma+\pi j} F^*(q) e^{nq} dq.$$

Очень часто для получения изображений используются формулы суммы геометрической прогрессии:

$$\sum_{i=0}^{m} s^n = \frac{1 - s^{m+1}}{1 - s}, \tag{1.6}$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} s^n = \frac{1}{1 - s}, \quad |s| < 1. \tag{1.7}$$

Пример 1.3. *Найти изображение функции* $e^{\alpha n}$*.*

Решение. Так как всегда найдется такое $\mu > 0$, для которого $\alpha < \mu$, то $e^{\alpha n} < e^{\mu n}$ и свойство 2) оригинала выполняется при таком μ и $M = 1$. Значит, изображение заданной функции существует. Найдем его по формулам (1.5) и (1.7)

$$D[e^{\alpha n}] = \sum_{n=0}^{\infty} e^{\alpha n} e^{-nq} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{n(\alpha - q)} = \frac{1}{1 - e^{\alpha - q}} = \frac{e^q}{e^q - e^\alpha}.$$

Таким образом,

$$\boxed{e^{\alpha n} \leftarrow\!\!\!\div \frac{e^q}{e^q - e^\alpha}}.$$

□

Пример 1.4. *Найти изображение функции* a^n*.*

Решение. Используя результат предыдущего примера, получаем:

$$D[a^n] = D[e^{n \ln a}] = \frac{e^q}{e^q - e^{\ln a}} = \frac{e^q}{e^q - a}.$$

Итак,

$$\boxed{a^n \leftarrow\!\!\!\div \frac{e^q}{e^q - a}}. \tag{1.8}$$

□

Пример 1.5. *Найти изображение функции*

$$\sigma(n) = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ 0, & n \neq 0. \end{cases}$$

Решение.

$$D[\sigma(n)] = \sum_{n=0}^{\infty} \sigma(n) e^{-nq} = 1e^{0q} = 1.$$

Значит,

$$\boxed{\sigma(n) \leftarrow\!\!\!\div 1}. \tag{1.9}$$

$\square$

Пример 1.6. *Найти изображение единичной ступенчатой функции*

$$\mathbb{1}(n) = \begin{cases} 1, & n \geq 0, \\ 0, & n < 0. \end{cases}$$

Решение.

$$D[\mathbb{1}(n)] = \sum_{n=0}^{\infty} 1e^{-nq} = \frac{1}{1-e^{-q}} = \frac{e^q}{e^q - 1}.$$

Следовательно,

$$\boxed{\mathbb{1}(n) \leftarrow\!\!\!\div \frac{e^q}{e^q - 1}}. \tag{1.10}$$

$\square$

В более сложных случаях необходимо применение свойств D-преобразования.

1.3 Свойства D-преобразования

Теорема 1.1 (линейности). *Линейная комбинация оригиналов изображается линейной комбинацией их изображений:*

$$f_i(n) \leftarrow\!\!\!\div F_i^*(q), i = \overline{1, m} \Longrightarrow \sum_{i=1}^{m} C_i f_i(n) \leftarrow\!\!\!\div \sum_{i=1}^{m} C_i F_i^*(q),$$

где C_i — произвольные постоянные.

Доказательство. Так как сходящиеся ряды можно складывать и умножать на число, то

$$D\left[\sum_{i=1}^{m} C_i f_i(n)\right] = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{i=1}^{m} C_i f_i(n)\right] e^{-qn} = \sum_{i=1}^{m} C_i \sum_{n=0}^{\infty} f_i(n) e^{-nq} =$$
$$= \sum_{i=1}^{m} C_i D[f_i(n)].$$

□

Пример 1.7. *Найти изображение функции* $\sin\beta n$*, используя теорему линейности.*

Решение.

$$D[\sin\beta n] = D\left[\frac{1}{2j}(e^{j\beta n} - e^{-j\beta n})\right] = \frac{1}{2j}\left(D[e^{j\beta n}] - D[e^{-j\beta n}]\right) =$$
$$= \frac{1}{2j}\left(\frac{e^q}{e^q - e^{j\beta}} - \frac{e^q}{e^q - e^{-j\beta}}\right) = \frac{e^q}{2j}\cdot\frac{e^q - e^{-j\beta} - e^q + e^{j\beta}}{e^{2q} - e^q(e^{j\beta} + e^{-j\beta}) + 1} =$$
$$= \frac{e^q(e^{j\beta} - e^{-j\beta})/(2j)}{e^{2q} - 2e^q(e^{j\beta} + e^{-j\beta})/2 + 1} = \frac{e^q \sin\beta}{e^{2q} - 2e^q\cos\beta + 1}.$$

Следовательно,

$$\boxed{sin\beta n \leftarrow\!\!\!\div\; \frac{e^q \sin\beta}{e^{2q} - 2e^q\cos\beta + 1}.} \tag{1.11}$$

□

Пример 1.8. *Найти изображение функции* $\cos\beta n$*.*

Решение.

$$D[\cos\beta n] = D\left[\frac{1}{2}(e^{j\beta n} + e^{-j\beta n})\right] = \frac{1}{2}\left(D[e^{j\beta n}] + D[e^{j\beta n}]\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{e^q}{e^q - e^{j\beta}} + \frac{e^q}{e^q - e^{-j\beta}}\right) = \frac{e^q}{2}\cdot\frac{e^q - e^{-j\beta} + e^q - e^{j\beta}}{e^{2q} - e^q(e^{j\beta} + e^{-j\beta}) + 1} =$$
$$= \frac{e^q(e^q - (e^{j\beta} + e^{-j\beta})/2)}{e^{2q} - 2e^q(e^{j\beta} + e^{-j\beta})/2 + 1} = \frac{e^q(e^q - \cos\beta)}{e^{2q} - 2e^q\cos\beta + 1}.$$

$$\boxed{\cos\beta n \risingdotseq \frac{e^q(e^q-\cos\beta)}{e^{2q}-2e^q\cos\beta+1}.} \tag{1.12}$$

□

Аналогично можно найти, что

$$\boxed{\operatorname{sh}\beta n \risingdotseq \frac{e^q\operatorname{sh}\beta}{e^{2q}-2e^q\operatorname{ch}\beta+1},}$$

$$\boxed{\operatorname{ch}\beta n \risingdotseq \frac{e^q(e^q-\operatorname{ch}\beta)}{e^{2q}-2e^q\operatorname{ch}\beta+1}.}$$

Теорема 1.2 (запаздывания). *Изображение запаздывающей функции может быть получено из изображения незапаздывающего оригинала умножением на экспоненту. Точнее, если* $f(n) \risingdotseq F^*(q)$ *и* $0 < k < n$ *— целое число, то*

$$f(n-k) \risingdotseq e^{-kq}F^*(q).$$

Доказательство. Делая замену переменной суммирования, получаем, что

$$D[f(n-k)] = \sum_{n=0}^{\infty} f(n-k)e^{-nq} =< m=n-k,\ n=m+k >=$$

$$= \sum_{m=-k}^{\infty} f(m)e^{-(m+k)q} = \sum_{m=-k}^{\infty} f(m)e^{-mq}e^{-kq} =$$

$$= e^{-kq}\sum_{m=0}^{\infty} f(m)e^{-mq} = e^{-kq}D[f(n)],$$

так как $f(-s)=0,\ s>0.$ □

Пример 1.9. *Найти изображение функции* a^{n-1}.

Решение. Ранее было получено соответствие $a^n \risingdotseq e^q/(e^q-a)$. Используя его и теорему запаздывания при $k=1$, находим

$$a^{n-1} \risingdotseq e^{-q}\frac{e^q}{e^q-a} = \frac{1}{e^q-a}.$$

□

Теорема 1.3 (опережения). *Если $f(n) \leftarrow\!\!\!\div F^*(q)$ и $k > 0$ — целое число, то*

$$f(n+k) \leftarrow\!\!\!\div e^{kq}\left[F^*(q) - \sum_{m=0}^{k-1} f(m)e^{-mq}\right].$$

Доказательство. Снова производя замену переменной суммирования, получаем

$$D[f(n+k)] = \sum_{n=0}^{\infty} f(n+k)e^{-nq} = < m = n+k,\ n = m-k > =$$
$$= \sum_{m=k}^{\infty} f(m)e^{-(m-k)q} = e^{kq}\left[\sum_{m=0}^{\infty} f(m)e^{-mq} - \sum_{m=0}^{k-1} f(m)e^{-mq}\right] =$$
$$= e^{kq}\left\{D[f(n)] - \sum_{m=0}^{k-1} f(m)e^{-mq}\right\}.$$

□

Пример 1.10. *Найти изображение функции a^{n+2}.*

Решение. Исходя из соответствия $a^n \leftarrow\!\!\!\div e^q/(e^q - a)$ и применяя теорему опережения при $k = 2$, имеем

$$a^{n+2} \leftarrow\!\!\!\div e^{2q}\left(\frac{e^q}{e^q - a} - a^0e^0 - a^1e^{-q}\right) = \frac{e^{3q}}{e^q - a} - e^{2q} - ae^q = \frac{a^2e^q}{e^q - a}.$$

□

Теорема 1.4 (смещения). *Смещению изображения соответствует умножение оригинала на экспоненту. То есть, если $f(n) \leftarrow\!\!\!\div F^*(q)$, то*

$$e^{\alpha n}f(n) \leftarrow\!\!\!\div F^*(q - \alpha).$$

Доказательство.

$$D[e^{\alpha n}f(n)] = \sum_{n=0}^{\infty} e^{\alpha n}f(n)e^{-nq} = \sum_{n=0}^{\infty} f(n)e^{-(q-\alpha)n} = F^*(q - \alpha).$$

□

Пример 1.11. *Найти изображение функции $e^{-\alpha n}\sin\beta n$.*

Решение. К полученному ранее соответствию

$$\sin\beta n \leftarrow\!\!\div \frac{e^q\sin\beta}{e^{2q}-2e^q\cos\beta+1}$$

применяем теорему смещения и, умножая числитель и знаменатель дроби на $e^{-2\alpha}$, находим

$$e^{-\alpha n}\sin\beta n \leftarrow\!\!\div \frac{e^{q+\alpha}\sin\beta}{e^{2(q+\alpha)}-2e^{q+\alpha}\cos\beta+1}=\frac{e^{q-\alpha}\sin\beta}{e^{2q}-2e^{q-\alpha}\cos\beta+e^{-2\alpha}}.$$

□

Аналогично можно получить, что

$$e^{-\alpha n}\cos\beta n \leftarrow\!\!\div \frac{e^q(e^q-e^{-\alpha}\cos\beta)}{e^{2q}-2e^{q-\alpha}\cos\beta+e^{-2\alpha}}.$$

Теорема 1.5 (о дифференцировании изображения)**.** *Дифференцированию изображения отвечает умножение оригинала на $-n$:*

$$F^*(q) \div\!\!\rightarrow f(n) \Longrightarrow [F^*(q)]' \div\!\!\rightarrow -nf(n).$$

Доказательство. Возьмем производную от обеих частей равенства (1.5):

$$[F^*(q)]'=\left[\sum_{n=0}^{\infty}f(n)e^{-nq}\right]'_q=\sum_{n=0}^{\infty}[-nf(n)]e^{-nq} \div\!\!\rightarrow -nf(n).$$

□

Следствие 1.1. $[F^*(q)]'' \div\!\!\rightarrow n^2f(n),\ldots,[F^*(q)]^{(k)} \div\!\!\rightarrow (-1)^kn^kf(n).$

Пример 1.12. *Найти изображение функции $f(n)=n$.*

Решение. В примере 1.6 было найдено изображение единичной ступенчатой функции:

$$\mathbb{1}(n) \leftarrow\!\!\div \frac{e^q}{e^q-1}.$$

Так как можно записать $n=-(-n)\mathbb{1}(n)$, то изображение функции $f(n)=n$ в силу предыдущей теоремы равно производной изображения функции $\mathbb{1}(n)$, взятой со знаком минус:

$$-\left(\frac{e^q}{e^q-1}\right)'=-\frac{e^{2q}-e^q-e^{2q}}{(e^q-1)^2}=\frac{e^q}{(e^q-1)^2}.$$

То есть

$$\boxed{n \risingdotseq \frac{e^q}{(e^q-1)^2}.}$$

□

Пример 1.13. *Найти изображение функции $f(n) = n^2$.*

Решение. Воспользуемся результатом предыдущего примера, для чего заданную функцию запишем так: $f(n) = -(-n)n$. Тогда ее изображение будет равно производной изображения функции n, взятой со знаком минус:

$$-\left(\frac{e^q}{(e^q-1)^2}\right)' = -\frac{e^q(e^q-1)^2 - 2(e^q-1)e^{2q}}{(e^q-1)^4} = -\frac{e^{2q} - e^q - 2e^{2q}}{(e^q-1)^3} =$$
$$= \frac{e^{2q} + e^q}{(e^q-1)^3} = \frac{e^q(e^q+1)}{(e^q-1)^3}.$$

Таким образом,

$$\boxed{n^2 \risingdotseq \frac{e^q(e^q+1)}{(e^q-1)^3}.}$$

□

Пример 1.14. *Найти изображение функции $f(n) = C_n^k$.*

Решение. В примере 1.12 было получено, что $n \risingdotseq e^q/(e^q-1)^2$, тогда по теореме запаздывания $n-1 \risingdotseq 1/(e^q-1)^2$. Следовательно, по теореме о дифференцировании изображения

$$n(n-1) \risingdotseq -\left(\frac{1}{(e^q-1)^2}\right)' = \frac{2e^q(e^q-1)}{(e^q-1)^4} = 2!\frac{e^q}{(e^q-1)^3}, \tag{1.13}$$

поэтому по теореме линейности

$$C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2!} \risingdotseq \frac{e^q}{(e^q-1)^3}.$$

Из соответствия (1.13) по теореме запаздывания находим, что $(n-1)(n-2) \risingdotseq 2!/(e^q-1)^3$ и снова по теореме о дифференцировании изображения получаем:

$$n(n-1)(n-2) \risingdotseq -2!\left(\frac{1}{(e^q-1)^3}\right)' = 2!\frac{3e^q(e^q-1)^2}{(e^q-1)^6} = 3!\frac{e^q}{(e^q-1)^4},$$

значит,

$$C_n^3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \leftarrow\!\!\!\!\div \frac{e^q}{(e^q-1)^4}.$$

Далее нетрудно догадаться, что

$$\boxed{C_n^k \leftarrow\!\!\!\!\div \frac{e^q}{(e^q-1)^{k+1}}.}$$

□

Пример 1.15. *Найти изображение функции* $C_n^k e^{\alpha n}$.

Решение. Используя результат примера 1.14 и теорему смещения, получаем, что

$$C_n^k e^{\alpha n} \leftarrow\!\!\!\!\div \frac{e^{q-\alpha}}{(e^{q-\alpha}-1)^{k+1}}.$$

Умножая обе части дроби на $e^{\alpha(k+1)}$, находим

$$\boxed{C_n^k e^{\alpha n} \leftarrow\!\!\!\!\div \frac{e^{q+\alpha k}}{(e^q-e^\alpha)^{k+1}}.}$$

□

Пример 1.16. *Найти изображение функции* $C_n^k a^n$.

Решение. Используем предыдущий результат:

$$C_n^k a^n = C_n^k e^{n\ln a} \leftarrow\!\!\!\!\div \frac{e^{q+k\ln a}}{(e^q-e^{\ln a})^{k+1}} = \frac{a^k e^q}{(e^q-a)^{k+1}}.$$

Итак,

$$\boxed{C_n^k a^n \leftarrow\!\!\!\!\div \frac{a^k e^q}{(e^q-a)^{k+1}}.} \tag{1.14}$$

□

Величина $\sum_{i=0}^{n-1} f(i)$ называется ***суммой решетчатой функции***.

Теорема 1.6 (изображение суммы)**.** *Если решетчатая функция $f(n)$ имеет изображение $F^*(q)$, то*

$$\boxed{\sum_{i=0}^{n-1} f(i) \risingdotseq \frac{F^*(q)}{e^q - 1}}.$$

Доказательство. Дискретное преобразование Лапласа суммы решетчатой функции имеет вид:

$$D\left[\sum_{i=0}^{n-1} f(i)\right] = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{n-1} f(i)e^{-nq}. \tag{1.15}$$

Пары индексов (n, i), участвующих в суммировании, образуют координаты

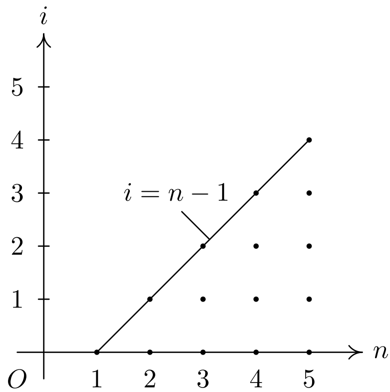

Рис. 1.4: Точки суммирования

точек с целыми координатами, показанных на рис. 1.4. Если в формуле (1.15) поменять местами знаки суммирования, то в соответствии с этим рисунком, получится выражение:

$$D\left[\sum_{i=0}^{n-1} f(i)\right] = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{n=i+1}^{\infty} f(i)e^{-nq} = \sum_{i=0}^{\infty} f(i)\sum_{n=i+1}^{\infty} e^{-nq}.$$

Но внутренняя сумма есть бесконечная геометрическая прогрессия, поэтому, применяя формулу ее суммы (1.7), находим

$$D\left[\sum_{i=0}^{n-1} f(i)\right] = \sum_{i=0}^{\infty} f(i)\frac{e^{-(i+1)q}}{1-e^{-q}} = \frac{e^{-q}}{1-e^{-q}}\sum_{i=0}^{\infty} f(i)e^{-iq} = \frac{F^*(q)}{e^q-1}.$$

□

Пример 1.17. *Найти сумму* $\sum_{i=0}^{n-1} i^2$.

Решение. В примере 1.13 было найдено, что

$$n^2 \leftarrow\!\!\div\, e^q(e^q+1)/(e^q-1)^3.$$

Тогда используя доказанную теорему и результат примера 1.14, получаем

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n-1} i^2 \leftarrow\!\!\div\, \frac{e^q(e^q+1)}{(e^q-1)^4} &= \frac{e^q}{(e^q-1)^3} + 2\frac{e^q}{(e^q-1)^4} \div\!\!\rightarrow \\ \div\!\!\rightarrow C_n^2 + 2C_n^3 &= \frac{n(n-1)}{2} + \frac{2n(n-1)(n-2)}{6} = \\ &= n(n-1)\left(\frac{1}{2}+\frac{n-2}{3}\right) = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6},\end{aligned}$$

то есть

$$\sum_{i=0}^{n-1} i^2 = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}.$$

□

Сверткой двух решетчатых функций $f_1(n)$ и $f_2(n)$ называется сумма, которая обозначается следующим образом:

$$f_1 * f_2(n) = \sum_{k=0}^{n} f_1(k)f_2(n-k).$$

Теорема 1.7 (об изображении свертки)**.** *Свертка двух решетчатых оригиналов изображается произведением их изображений:*

$$f_1(n) \leftarrow\!\!\div\, F_1^*(q),\, f_2(n) \leftarrow\!\!\div\, F_2^*(q) \Longrightarrow f_1 * f_2(n) \leftarrow\!\!\div\, F_1^*(q)F_2^*(q).$$

Доказательство. По определению D-преобразования функции $f_1(n)$ имеем

$$F_1^*(q)F_2^*(q) = F_2^*(q)\sum_{k=0}^{\infty} e^{-kq} f_1(k) = \sum_{k=0}^{\infty} [e^{-kq}F_2^*(q)] f_1(k).$$

По теореме запаздывания $e^{-kq}F_2^*(q) \risingdotseq f_2(n-k)$, тогда по теореме линейности, учитывая, что $f_2(n-k) = 0$ при $k > n$, получаем

$$F_1^*(q)F_2^*(q) \risingdotseq \sum_{k=0}^{\infty} f_2(n-k) f_1(k) = \sum_{k=0}^{n} f_2(n-k) f_1(k) = f_1 * f_2(n),$$

что и требовалось доказать. □

Пример 1.18. *Найти оригинал, соответствующий изображению*

$$F^*(q) = \frac{e^{2q}}{(e^q - a)(e^q - e^\alpha)}.$$

Решение. Заданное изображение можно представить в виде

$$F^*(q) = \frac{e^q}{(e^q - a)} \cdot \frac{e^q}{(e^q - e^\alpha)} = F_1^*(q)F_2^*(q),$$

где $F_1^*(q) = e^q/(e^q - a)$, $F_2^*(q) = e^q/(e^q - e^\alpha)$. В примере 1.4 было показано, что $F_1^*(q) \risingdotseq a^n$, а в примере 1.3 — что $F_2^*(q) \risingdotseq e^{\alpha n}$. Поэтому, используя теорему о свертке и формулу суммы конечной геометрической прогрессии (1.6), находим

$$F^*(q) \risingdotseq \sum_{k=0}^{n} a^k e^{\alpha(n-k)} = e^{\alpha n} \sum_{k=0}^{n} (ae^{-\alpha})^k = e^{\alpha n} \frac{1 - (ae^{-\alpha})^{n+1}}{1 - ae^{-\alpha}} =$$

$$= \frac{e^{\alpha n} - a^{n+1}e^{-\alpha}}{1 - ae^{-\alpha}} = \frac{e^{\alpha(n+1)} - a^{n+1}}{e^\alpha - a}.$$

□

Свойства D-преобразования собраны в приложении в табл. A.1, а основные соответствия "оригинал-изображение-— в табл. A.2. Более полные таблицы см. в [1].

2 Конечные разности

2.1 Определения

Часто конечно-разностные уравнения записывают с помощью так называемых конечных разностей, придавая им вид, напоминающий запись дифференциальных уравнений с помощью дифференциалов. ***Разностью первого порядка*** решетчатой функции $f(n)$ называют величину

$$\Delta f(n) = f(n+1) - f(n). \tag{2.1}$$

Разностью второго порядка называют разность, взятую от первой разности: $\Delta^2 f(n) = \Delta[\Delta f(n)] = \Delta f(n+1) - \Delta f(n) = f(n+2) - f(n+1) - [f(n+1) - f(n)] = f(n+2) - 2f(n+1) + f(n)$. Получилась формула, напоминающая формулу квадрата разности двух величин. ***Разность k-го порядка*** — это разность, взятая от разности $k-1$-го порядка: $\Delta^k f(n) = \Delta[\Delta^{k-1} f(n)]$. Можно показать, что и для нее справедлива формула, напоминающая формулу k-й степени разности двух величин:

$$\Delta^k f(n) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^k C_k^i f(n+k-i). \tag{2.2}$$

Наоборот, значения решетчатой функции можно выразить через конечные разности, считая, что $f(n) = \Delta^0 f(n)$: $f(n+1) = f(n) + [f(n+1) - f(n)]$, значит,

$$f(n+1) = f(n) + \Delta f(n).$$

Далее, $f(n+2) = f(n+1) + \Delta f(n+1) = f(n) + \Delta f(n) + \Delta f(n) + \Delta^2 f(n)$, следовательно,

$$f(n+2) = f(n) + 2\Delta f(n) + \Delta^2 f(n).$$

Продолжая в том же духе, приходим к общей формуле:

$$f(n+k) = \sum_{i=0}^{k} C_k^i \Delta^i f(n). \tag{2.3}$$

Разности обладают свойствами, похожими на свойства дифференциалов (C, a, b — константы):

$$\begin{gathered}\Delta C = 0,\\ \Delta n = 1,\\ \Delta[af(n) + bg(n)] = a\Delta f(n) + b\Delta g(n),\\ \Delta[f(n)g(n)] = f(n)\Delta g(n) + g(n+1)\Delta f(n).\end{gathered}$$

Первые три из них очевидны, а четвертое доказывается так:

$$\begin{aligned}\Delta[f(n)g(n)] &= f(n+1)g(n+1) - f(n)g(n) =\\ &= f(n+1)g(n+1) - f(n)g(n+1) + f(n)g(n+1) -\\ &- f(n)g(n) = g(n+1)\Delta f(n) + f(n)\Delta g(n).\end{aligned}$$

2.2 Изображение

Теорема 2.1. *Если решетчатая функция $f(n)$ имеет изображение $F^*(q)$, то ее разность k-го порядка изображается следующим образом:*

$$\Delta^k f(n) \leftarrow\!\!\!\!\div\; (e^q - 1)^k F^*(q) - e^p \sum_{i=0}^{k-1} (e^q - 1)^{k-1-i} \Delta^i f(0). \tag{2.4}$$

Доказательство. Из формулы (2.1) и теорем линейности и опережения получаем

$$\Delta f(n) = f(n+1) - f(n) \leftarrow\!\!\!\!\div\; e^q[F^*(q) - f(0)] - F^*(q),$$

или

$$\Delta f(n) \leftarrow\!\!\!\!\div\; (e^q - 1)F^*(q) - e^q f(0), \tag{2.5}$$

что́ соответствует формуле (2.4) при $k = 1$.

Найдем изображение разности второго порядка. Для этого сначала заметим, что формула (2.5) и теорема опережения дают соответствие

$$\Delta f(n+1) \leftarrow\!\!\!\!\div\; e^q[(e^q - 1)F^*(q) - e^q f(0) - \Delta f(0)].$$

Используя его и формулу (2.5), получаем

$$\begin{aligned}\Delta^2 f(n) = \Delta f(n+1) - \Delta f(n) \leftarrow\!\!\div\\ \leftarrow\!\!\div\ e^q[(e^q-1)F^*(q) - e^q f(0) - \Delta f(0)] -\\ -(e^q-1)F^*(q) + e^q f(0),\end{aligned}$$

или

$$\Delta^2 f(n) \leftarrow\!\!\div\ (e^q-1)^2 F^*(q) - e^q(e^q-1)f(0) - e^q\Delta f(0). \tag{2.6}$$

Это соответствует формуле (2.4) при $k=2$. Продолжая и так далее, можно убедится в том, что формула верна при любом k. □

2.3 Использование в уравнениях

Конечно-разностное уравнение (1.3)

$$a_0x(n) + a_1x(n+1) + \ldots + a_kx(n+k) = u(n) \tag{2.7}$$

с помощью формулы (2.3), примененной к неизвестной функции, может быть преобразовано к виду

$$b_0\Delta^k x(n) + b_1\Delta^{k-1}x(n) + \ldots + b_kx(n) = u(n), \tag{2.8}$$

в котором оно больше, чем уравнение (1.3), напоминает линейное дифференциальное уравнение k-го порядка с постоянными коэффициентами. Роль k-й производной играет разность k-го порядка. Следует, однако, отметить, что порядок уравнения (2.8) нельзя определить как порядок старшей разности неизвестной функции, входящей в уравнение. Действительно, в уравнении

$$\Delta^2 f(n) + 4\Delta f(n) + 3f(n) = 0$$

порядок старшей разности неизвестной функции равен 2. Преобразуем это уравнение с помощью формулы (2.2):

$$\begin{gathered}f(n+2) - 2f(n+1) + f(n) + 4f(n+1) - 4f(n) + 3f(n) = 0,\\ f(n+2) + 2f(n+1) = 0,\end{gathered}$$

или

$$f(n+1) + 2f(n) = 0.$$

Как видим, уравнение имеет первый порядок.

Поэтому, а также потому, что отыскивать изображения разностей неизвестной функции по формуле (2.4) довольно сложно, стараются решать конечно-разностное уравнение в виде (1.3). Если же оно задано в виде (2.8), его преобразуют в форму (2.7), используя равенство (2.2).

3 Конечно-разностные уравнения

Рассмотрим теперь решение конечно-разностного уравнения (1.3):

$$a_0x(n) + a_1x(n+1) + \ldots + a_kx(n+k) = u(n) \tag{3.1}$$

операционным методом. Обычно его требуется решить при заданных начальных условиях вида

$$x(0) = x_0,\ x(1) = x_1, \ldots, x(k-1) = x_{k-1}. \tag{3.2}$$

Решением разностного уравнения (3.1) называется любая решетчатая функция $f(n)$, которая после подстановки в уравнение вместо неизвестной функции $x(n)$ обращает его в тождество и удовлетворяет начальным условиям (3.2).

Применение операционного метода к решению уравнения (3.1) заключается в том, что обе части уравнения подвергают дискретному преобразованию Лапласа, в результате чего получают так называемое ***операторное уравнение*** (или ***изображающее уравнение***, или ***уравнение в изображениях***), в котором неизвестной является функция $X^*(q) \xrightarrow{\cdot} x(n)$. Так как операторное уравнение обычно — алгебраическое, то найти из него $X^*(q)$ несложно. Чтобы по нему определить искомый оригинал $x(n)$, используют специальные приемы, свойства D-преобразования и таблицы "оригинал-изображение". Аналогичным образом решают и системы конечно-разностных уравнений.

Пример 3.1 (продолжение примера 1.1)**.** *Решить уравнение* (1.1).

Решение. Перепишем указанное уравнение в виде

$$s(n+2) + 4s(n) - 4s(n+1) = 0. \tag{3.3}$$

Найдем $s(1) = |4| = 4$ и положим $s(0) = 1$. Нетрудно видеть, что при $s(0) = 1$ и $s(1) = 4$ из уравнения (1.1) следует, что $s(2) = 12$. Непосредственно вычисляя определитель $s(2)$, можно проверить правильность этого результата. Таким образом, $s(0) = 1$ и $s(1) = 4$ являются подходящими начальными условиями для уравнения (1.1). Введем изображение $s(n) \leftarrow\!\!\div S^*(q)$ и по теореме опережения получим $s(n+1) \leftarrow\!\!\div e^q[S^*(q) - s(0)] = e^q[S^*(q) - 1]$, $s(n+2) \leftarrow\!\!\div e^{2q}[S^*(q) - s(0) - s(1)e^{-q}] = e^{2q}S^*(q) - e^{2q} - 4e^q$. Применяя дискретное преобразование Лапласа к уравнению (3.3), приходим к уравнению в изображениях:

$$e^{2q}S^*(q) - e^{2q} - 4e^q + 4S^*(q) - 4e^qS^*(q) + 4e^q = 0,$$

из которого находим

$$S^*(q) = \frac{e^{2q}}{e^{2q} - 4e^q + 4} = \frac{e^{2q}}{(e^q - 2)^2} = \frac{1}{2}e^q\frac{2e^q}{(e^q - 2)^2}.$$

Формула (1.14) показывает, что

$$C_n^1 2^n \leftarrow\!\!\div \frac{2e^q}{(e^q - 2)^2};$$

используя далее теорему запаздывания, получаем искомое решение уравнения (3.3):

$$s(n) = \frac{1}{2}C_{n+1}^1 2^{n+1} = (n+1)2^n.$$

□

Пример 3.2 (продолжение примера 1.2). *Решить конечно-разностное уравнение* (1.2).

Решение. Обозначив в указанном уравнении $\beta = k\alpha(\alpha^{-\gamma} - 1)$, представим его в виде

$$x(n+1) - \alpha x(n) = \beta u(n). \tag{3.4}$$

Введем изображения: $x(n) \leftarrow\!\!\div X^*(q)$, $u(n) \leftarrow\!\!\div U^*(q)$. По формуле опережения $x(n+1) \leftarrow\!\!\div e^q[X^*(q) - x(0)]$. Предположим, что $x(0) = 0$, и применим дискретное преобразование Лапласа к уравнению (3.4):

$$e^qX^*(q) - \alpha X^*(q) = \beta U^*(q).$$

Находим изображение выходного сигнала:

$$X^*(q) = \frac{\beta U^*(q)}{e^q - \alpha}. \tag{3.5}$$

Получим решение уравнения (3.4) для двух различных входных сигналов.

а) Пусть $u(n) = d\sigma(n) \leftarrow\!\!\div\, d$ (см. (1.9)).

Представим изображение выходного сигнала в следующем виде:

$$X^*(q) = \frac{\beta d}{e^q - \alpha} = \beta d e^{-q} \frac{e^q}{e^q - \alpha}$$

и заметим, что в соответствии с формулой (1.8)

$$\alpha^n \leftarrow\!\!\div\, \frac{e^q}{e^q - \alpha};$$

тогда по теореме запаздывания $x(n) = \beta d \alpha^{n-1},\ n \geq 1$.

б) Пусть $u(n) = \mathbb{1}(n) \leftarrow\!\!\div\, \dfrac{e^q}{e^q - 1}$ (см. (1.10)).

Запишем изображение выходного сигнала так:

$$X^*(q) = \frac{\beta e^q}{(e^q - 1)(e^q - \alpha)} = \frac{\beta}{1 - \alpha}\left(e^{-q}\frac{e^q}{e^q - 1} - \alpha e^{-q}\frac{e^q}{e^q - \alpha}\right).$$

Следовательно,

$$x(n) = \frac{\beta}{1 - \alpha}[\mathbb{1}(n - 1) - \alpha^n].$$

□

Пример 3.3. *Решить конечно-разностное уравнение:*

$$x(n + 2) - x(n + 1) + x(n) = 0$$

при начальных условиях $x(0) = x(1) = 1$.

Решение. Обозначим $x(n) \leftarrow\!\!\div\, X^*(q)$ изображение неизвестной функции и по теореме опережения найдем

$$x(n + 1) \leftarrow\!\!\div\, e^q[X^*(q) - 1],\ x(n + 2) \leftarrow\!\!\div\, e^{2q}[X^*(q) - 1 - e^{-q}]. \tag{3.6}$$

Поэтому используя эти соотношения и применяя к заданному уравнению дискретное преобразование Лапласа, получим такое операторное уравнение:

$$e^{2q}[X^*(q) - 1 - e^{-q}] - e^q[X^*(q) - 1] + X^*(q) = 0,$$

или

$$X^*(q)(e^{2q} - e^q + 1) = e^{2q} + e^q - e^q,$$

из которого найдем изображение неизвестной функции:

$$X^*(q) = \frac{e^{2q}}{e^{2q} - e^q + 1}.$$

Представим его следующим образом:

$$X^*(q) = \frac{e^q \left(e^q - \cos\frac{\pi}{3}\right)}{e^{2q} - 2e^q\cos\frac{\pi}{3} + 1} + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{e^q \sin\frac{\pi}{3}}{e^{2q} - 2e^q\cos\frac{\pi}{3} + 1}.$$

Используя соответствия (1.11) и (1.12), можем записать решение заданного конечно-разностного уравнения в виде:

$$x(n) = \cos\frac{\pi}{3}n + \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\frac{\pi}{3}n = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{3}n + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\frac{\pi}{3}n\right) =$$
$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\sin\frac{\pi}{3}n\cos\frac{\pi}{3} + \sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{3}n\right),$$

или

$$x(n) = \frac{2}{\sqrt{3}}\sin\frac{(n+1)\pi}{3}.$$

$\square$

Пример 3.4. *Решить систему конечно-разностных уравнений*

$$\begin{cases} x(n+1) - 2x(n) - 2y(n) & = 3^n, \\ y(n+1) - x(n) - 3y(n) & = 2^n. \end{cases}$$

при нулевых начальных условиях.

Решение. Введем изображения неизвестных функций $X^*(q)$, $Y^*(q)$ и, используя начальные условия и теорему опережения, получим, что $x(n+1) \leftarrow\!\!\div\; e^q X^*(q)$, $y(n+1) \leftarrow\!\!\div\; e^q Y^*(q)$. Изобразим также правые части уравнений: $3^n \leftarrow\!\!\div\; e^q/(e^q-3)$, $2^n \leftarrow\!\!\div\; e^q/(e^q-2)$. Далее, применяя дискретное преобразование Лапласа к каждому уравнению заданной системы, придем к следующей системе операторных уравнений:

$$\begin{cases} e^q X^*(q) - 2X^*(q) - 2Y^*(q) & = \dfrac{e^q}{e^q - 3}, \\ e^q Y^*(q) - X^*(q) - 3Y^*(q) & = \dfrac{e^q}{e^q - 2}, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} X^*(q)(e^q-2) - 2Y^*(q) & = \dfrac{e^q}{e^q-3}, \\ -X^*(q) + Y^*(q)(e^q-3) & = \dfrac{e^q}{e^q-2}. \end{cases}$$

Решим эту систему методом определителей:

$$\Delta = \begin{vmatrix} e^q-2 & -2 \\ -1 & e^q-3 \end{vmatrix} = (e^q-2)(e^q-3) - 2 = e^{2q} - 5e^q + 4 =$$
$$= (e^q-1)(e^q-4),$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \dfrac{e^q}{e^q-3} & -2 \\ [10pt] \dfrac{e^q}{e^q-2} & e^q-3 \end{vmatrix} = e^q + \frac{2e^q}{e^q-2} = \frac{e^{2q}}{e^q-2},$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} e^q-2 & \dfrac{e^q}{e^q-3} \\ [10pt]-1 & \dfrac{e^q}{e^q-2} \end{vmatrix} = e^q + \frac{e^q}{e^q-3} = \frac{e^q(e^q-2)}{e^q-3};$$

$$X^*(q) = \frac{e^{2q}}{(e^q-2)(e^q-1)(e^q-4)}, \quad Y^*(q) = \frac{e^q(e^q-2)}{(e^q-3)(e^q-1)(e^q-4)}.$$

Выполним разложение полученных выражений на простейшие дроби:

$$X^*(q) = e^q \frac{e^q}{(e^q-2)(e^q-1)(e^q-4)} = \frac{1}{3} \cdot \frac{e^q}{e^q-1} + \frac{2}{3} \cdot \frac{e^q}{e^q-4} - \frac{e^q}{e^q-2},$$

$$Y^*(q) = e^q \frac{e^q-2}{(e^q-3)(e^q-1)(e^q-4)} =$$
$$= -\frac{3}{2} \cdot \frac{e^q}{e^q-3} - \frac{1}{6} \cdot \frac{e^q}{e^q-1} + \frac{8}{3} \cdot \frac{e^q}{e^q-4}.$$

Используя формулу (1.8), находим оригиналы этих функций, являющиеся решением заданной системы уравнений:

$$x(n) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}4^n - 2^n = \frac{1}{3}(1 + 2^{2n+1} - 3 \cdot 2^n),$$
$$y(n) = -\frac{3}{2}3^n - \frac{1}{6} + \frac{8}{3}4^n = \frac{1}{6}(2^{2n+4} - 3^{n+2} - 1).$$

□

Для самостоятельного решения задач рекомендуется использовать сборники задач [3] и [4].

4 Линейные дискретные системы

4.1 Переходная функция

В природе, технике, обществе можно наблюдать объекты, представляющие собой совокупности некоторого количества частей, взаимодействующих друг с другом и изменяющих свое состояние с течением времени. Такие объекты в теории регулирования и управления принято называть ***динамическими системами(ДС)***[5]. Обычно за поведением ДС можно наблюдать, изучая либо ее выходной сигнал, либо, если это возможно, непосредственно ее состояние. Кроме того, так как обычно ДС реагирует на изменение внешней среды, на нее можно подать входной сигнал и проанализировать ее реакцию. Упрощенно ДС представляется в виде, показанном на рис. 4.1.

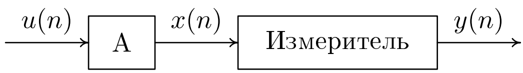

Рис. 4.1: Динамическая система

На нем $u(n)$ означает входной сигнал, $x(n)$ — состояние ДС, $y(n)$ — выходной сигнал в момент дискретного времени n, а A — так называемый оператор ДС. Оператор представляет собой закон, по которому функционирует система: он преобразует входной сигнал $u(n)$ в функцию состояния системы:

$$x(n) = \mathrm{A}\, u(n). \tag{4.1}$$

В дальнейшем мы будем предполагать, что $u(n)$, $x(n)$ — скалярные функции и состояние $x(n)$ доступно для наблюдения, то есть измеритель нам не нужен (см. рис. 4.2).

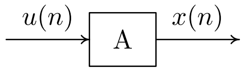

Рис. 4.2: Упрощенная динамическая система

Наиболее простыми среди ДС являются ***линейные системы (ЛС)***, их оператор обладает свойством линейности (c_1, c_2 — константы):

$$\mathrm{A}(c_1 u_1(n) + c_2 u_2(n)) = c_1\,\mathrm{A}\,u_1(n) + c_2\,\mathrm{A}\,u_2(n), \tag{4.2}$$

которое позволяет, зная реакцию ДС на входные сигналы u_1 и u_2, получить ее реакцию по формуле (4.2) на любую линейную комбинацию этих сигналов.

Так как ряд представляет собой предел конечной суммы, то свойство линейности выполняется и в такой форме:

$$\mathrm{A}\sum_{m=-\infty}^{\infty} c(m)u(n,m) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c(m)\,\mathrm{A}\,u(n,m), \tag{4.3}$$

где $u(n,m)$ — входной сигнал, зависящий от некоторого параметра m, а оператор A в правой части равенства действует на $u(n,m)$ только как на функцию n (при фиксированном m).

Очень часто дискретные линейные динамические системы описываются разностным линейным уравнением с постоянными коэффициентами вида:

$$a_0 x(n) + \ldots + a_k x(n+k) = b_0 u(m) + \ldots + b_l u(m+l).$$

Например, последовательное соединение импульсного элемента с апериодическим звеном (пример 1.2) представляет собой дискретную ЛС.

Основными задачами, которые возникают в теории управления ЛС, являются следующие: по входному сигналу $u(n)$ и реакции ЛС $x(n)$ определить оператор A; исследовать качество перехода системы в устойчивое состояние; найти ее частотные характеристики. Решить эти задачи можно, подав на вход ЛС специальные сигналы.

Предположим, что ЛС выведена из своего устойчивого состояния. Если система асимптотически устойчива, она через некоторое время практически вернется в него. Этот переход из неустойчивого состояния в устойчивое называется ***переходным процессом***. Переходный процесс может протекать по-разному. Если он длится долго и система совершает большие колебания, то такая система, даже и устойчивая, не может считаться хорошей.

Чтобы оценить качество переходного процесса, на ее вход подают единичную ступенчатую функцию Хевисайда $\mathbb{1}(n)$, определенную в примере 1.6, и изучают отклик системы, который называют ***переходной функцией*** системы и обозначают $h(n,m)$, где m — момент начала подачи функции Хевисайда. Время M_Π от начала переходного процесса до момента n, когда $|h(n,m)-h(\infty,m)| < 0,05|h(\infty,m)|$ называется ***временем переходного процесса***. Если в течение времени M функция $h(n,m)-h(\infty,m)$ изменяет знак, то каждый экстремум называется ***перерегулированием***, а число таких экстремумов за время переходного процесса M называется ***числом перерегулирований***.

Принято считать переходный процесс удовлетворительным, если число перерегулирований не превышает двух. В некоторых случаях перерегулирование вообще не допускается.

Пример 4.1. *Найти переходную функцию дискретной системы "импульсный элемент – апериодическое звено".*

Решение. Решим уравнение (3.4) при условии, что входной сигнал является единичной ступенчатой функцией, $u(n)=\mathbb{1}(n-k)$:

$$x(n+1)-\alpha x(n)=\beta\mathbb{1}(n-k), \qquad x(0)=0,$$

для чего введем изображения

$$x(n)\leftarrow\!\!\div X^*(q), \qquad x(n+1)\leftarrow\!\!\div e^qX^*(q),$$
$$\mathbb{1}(n-k)\leftarrow\!\!\div e^{-kq}\frac{e^q}{e^q-1}$$

и составим операторное уравнение

$$e^qX^*(q)-\alpha X^*(q)=\beta e^{-kq}\frac{e^q}{e^q-1}.$$

Получим

$$X^*(q)=\beta e^{-kq}\frac{1}{e^q-1}\cdot\frac{1}{e^q-\alpha}e^q.$$

Оригинал для изображения

$$\frac{\beta e^q}{(e^q-1)(e^q-\alpha)}$$

был найден в примере 3.2; он оказался равным

$$\frac{\beta}{1-\alpha}\left[\mathbb{1}(n-1)-\alpha^{n}\right].$$

Поэтому на основании теоремы запаздывания получаем

$$x(n)=\frac{\beta}{1-\alpha}\left[\mathbb{1}(n-k-1)-\alpha^{n-k}\right];$$

следовательно, переходная функция данной дискретной системы выражается формулой

$$h(n,k)=\begin{cases}\dfrac{\beta}{1-\alpha}\left[1-\alpha^{n-k}\right], & n>k;\\ [10pt]0, & n\le k.\end{cases}$$

□

4.2 Весовая функция

Если подавать на вход ЛС все более короткий и все более мощный импульс ("удар"), то ,оказывается, можно получать все более полную информацию о ее операторе A. В теории дискретных систем роль такого входного сигнала играет функция $\sigma(n)$, рассмотренная в примере 1.5. С ее помощью произвольный входной сигнал можно представить в виде

$$u(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}u(m)\sigma(n-m). \tag{4.4}$$

Реакция ЛС на функцию $\sigma(n)$, поданную в момент времени k, называется ***весовой***, или ***импульсной переходной функцией*** ЛС и обозначается $g(n,k)=\mathrm{A}\,\sigma(n-k)$, причем, для физически осуществимой системы следует считать, что $g(n,k)=0$ при $k\ge n$.

Применим к равенству (4.4) оператор A линейной системы, учитывая ее свойство (4.3):

$$x(n)=\mathrm{A}\,u(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}u(m)\,\mathrm{A}\,\sigma(n-m)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}g(n,m)u(m),$$

где $g(n,m) = \mathrm{A}\,\sigma(n-m)$. Для физически осуществимой системы отсюда следует, что

$$x(n) = \sum_{m=k}^{n-1} g(n,m)u(m) \tag{4.5}$$

при условии, что входной сигнал подавался, начиная с момента времени $n = k$. Если в последнюю формулу вместо $u(m)$ подставить единичную ступенчатую функцию, получится выражение

$$h(n,k) = \sum_{m=k}^{n-1} g(n,m)\mathbb{1}(m-k) = \sum_{m=k}^{n-1} g(n,m), \qquad k < n, \tag{4.6}$$

которое связывает весовую функцию системы с ее переходной функцией.

Можно найти и выражение, реализующее противоположную связь. Действительно, формулу (4.6) можно переписать так:

$$h(n,k) = g(n,k) + \sum_{m=k+1}^{n-1} g(n,m) = g(n,k) + h(n,k+1),$$

а тогда

$$g(n,k) = h(n,k) - h(n,k+1), \qquad k < n. \tag{4.7}$$

Пример 4.2. *Используя результат примера 4.1 и равенство (4.7), найти весовую функцию системы "импульсный элемент – апериодическое звено".*

Решение. Применяя указанные результаты, находим

$$\begin{aligned} g(n,k) &= h(n,k) - h(n,k+1) = \\ &= \frac{\beta}{1-\alpha}\left[1-\alpha^{n-k}\right] - \frac{\beta}{1-\alpha}\left[1-\alpha^{n-k-1}\right] = \\ &= \frac{\beta}{1-\alpha}(\alpha^{n-k-1}-\alpha^{n-k}) = \frac{\beta}{1-\alpha}\alpha^{n-k-1}(1-\alpha), \end{aligned}$$

или

$$g(n,k) = \beta\alpha^{n-k-1}, \;\; k < n.$$

Теперь отклик этой системы на любой входной сигнал в соответствии с формулой (4.5) можно представить следующим образом:

$$x(n) = \beta \sum_{m=k}^{n-1} \alpha^{n-m-1} u(m).$$

□

4.2. Весовая функция

4.3 Передаточная функция

Во всех рассмотренных выше примерах, весовая и переходная функции ЛС зависели лишь от разности аргументов:

$$h(n,m) = h(n-m), \qquad g(n,m) = g(n-m).$$

ЛС, обладающие таким свойством, называются ***стационарными***. Для стационарной системы отклик на входной сигнал с помощью весовой функции удобно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} x(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} g(n,m)u(m) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} g(n-m)u(m) = \\ =< s = n-m >= \sum_{s=-\infty}^{\infty} g(s)u(n-s), \end{aligned} \tag{4.8}$$

причем, для физически осуществимой ЛС эта формула принимает вид:

$$x(n) = \sum_{s=0}^{\infty} g(s)u(n-s), \ s \geq 0.$$

Подадим на вход стационарной физически осуществимой ЛС показательную функцию $u(m) = e^{qm}$:

$$x(n) = \sum_{s=0}^{\infty} g(s)e^{q(n-s)} = e^{qn}\sum_{s=0}^{\infty} g(s)e^{-qs}.$$

Коротко это можно записать так:

$$x(n) = e^{qn}G^*(q),$$

где

$$G^*q) = \sum_{s=0}^{\infty} g(s)e^{-sq}$$

— дискретное преобразование Лапласа весовой функции, называемое ***передаточной функцией*** дискретной системы. Таким образом, передаточная функция — реакция стационарной ЛС на решетчатую показательную функцию $u(m) = e^{qm}$. Если обозначить $x(n) \leftarrow\!\!\div X^*(q)$, $u(n) \leftarrow\!\!\div U^*(q)$ и

учесть, что $g(n+k)=0,\ k\geq 0$, то по теореме о свертке из равенства (4.8) получим
$$X^*(q)=G^*(q)U^*(q). \tag{4.9}$$

Предположим, что ЛС задана конечно-разностным уравнением

$$\sum_{r=0}^{k} a_r x(n+r)=\sum_{m=0}^{l} b_m u(n+m).$$

Применим к нему дискретное преобразование Лапласа:

$$\sum_{r=0}^{k} a_r e^{rq} X^*(q)=\sum_{m=0}^{l} b_m e^{mq} U^*(q),$$

или
$$X^*(q)=\frac{\varphi^*(q)}{\psi^*(q)}U^*(q), \tag{4.10}$$

где $\varphi^*(q)=\sum\limits_{m=0}^{l} b_m e^{mq}$, $\psi^*(q)=\sum\limits_{r=0}^{k} a_r e^{rq}$. Сравнивая выражения (4.9) и (4.10), приходим к выводу, что

$$G^*(q)=\frac{\varphi^*(q)}{\psi^*(q)}.$$

Полученное выражение показывает, что для данной ЛС передаточная функция является дробно-рациональной функцией. Если изображение входного сигнала также представлено дробно-рациональной функцией, то из равенства (4.9) следует, что и изображение выходного сигнала в этом случае является дробно-рациональной функцией. Значит, выходной сигнал-оригинал всегда может быть найден аналитически при использовании соответствующих теорем операционного исчисления и таблицы "оригинал-изображение".

Пример 4.3. *Найти передаточную функцию дискретной системы "импульсный элемент – апериодическое звено моделируемой уравнением*

$$x(n+1)-\alpha x(n)=\beta u(n).$$

Решение. При решении примера 3.2 была получена формула (3.5), которая при сравнении с равенством (4.10) показывает, что передаточная функция дискретной системы "импульсный элемент – апериодическое звено"выражается формулой

$$G^*(q) = \frac{\beta}{e^q - \alpha}.$$

□

Приложение A Таблицы

A.1 Свойства D-преобразования

Считается, что $f(n) \leftarrow\!\!\!\div\; F^*(q),\;\; f_j(n) \leftarrow\!\!\!\div\; F_j^*(q)$	
1. Линейность	$\sum\limits_{i=1}^{m} C_i f_i(n) \leftarrow\!\!\!\div\; \sum\limits_{i=1}^{m} C_i F_i^*(q)$
2. Смещение	$e^{\alpha n} f(n) \leftarrow\!\!\!\div\; F^*(q-\alpha).$
3. Запаздывание	$f(n-k) \leftarrow\!\!\!\div\; e^{-kq} F^*(q)$
4. Опережение	$f(n+k) \leftarrow\!\!\!\div\; e^{kq} \left[F^*(q) - \sum\limits_{i=0}^{k-1} f(i) e^{-iq} \right]$
5. Производная	$(-1)^k n^k f(n) \leftarrow\!\!\!\div\; [F^*(q)]^{(k)}$
6. Свертка	$f_1(n) * f_2(n) = \sum\limits_{i=0}^{n} f_1(i) f_2(n-i) \leftarrow\!\!\!\div\; F_1^*(q) F_2^*(q)$
7. Сумма	$\sum\limits_{i=0}^{n-1} f(i) \leftarrow\!\!\!\div\; \dfrac{F^*(q)}{e^q - 1}$

A.2 Таблица «оригинал-изображение»

Оригинал $f(n)$	Изображение $F^*(q)$
$\sigma(n) = \begin{cases} 1, & n = 0; \\ 0, & n \neq 0. \end{cases}$	1
$\mathbb{1}(n) = \begin{cases} 1, & n \geq 0; \\ 0, & n < 0. \end{cases}$	$\dfrac{e^q}{e^q - 1}$
a^n	$\dfrac{e^q}{e^q - a}$
$e^{\alpha n}$	$\dfrac{e^q}{e^q - e^\alpha}$
n	$\dfrac{e^q}{(e^q - 1)^2}$
n^2	$\dfrac{e^q(e^q + 1)}{(e^q - 1)^3}$
$\sin \beta n$	$\dfrac{e^q \sin \beta}{e^{2q} - 2e^q \cos \beta + 1}$
$\cos \beta n$	$\dfrac{e^q(e^q - \cos \beta)}{e^{2q} - 2e^q \cos \beta + 1}$
$\operatorname{sh} \beta n$	$\dfrac{e^q \operatorname{sh} \beta}{e^{2q} - 2e^q \operatorname{ch} \beta + 1}$
$\operatorname{ch} \beta n$	$\dfrac{e^q(e^q - \operatorname{ch} \beta)}{e^{2q} - 2e^q \operatorname{ch} \beta + 1}$
C_n^k	$\dfrac{e^q}{(e^q - 1)^{k+1}}$
$C_n^k e^{\alpha n}$	$\dfrac{e^{q+k\alpha}}{(e^q - e^\alpha)^{k+1}}$
$C_n^k a^n$	$\dfrac{a^k e^q}{(e^q - a)^{k+1}}$

Литература

[1] Мартыненко В.С. Операционное исчисление. — Киев: Выща школа, 1990.

[2] Фудзисава Т., Касами Т. Математика для радиоинженеров. Теория дискретных структур. — М.: Радио и связь, 1984.

[3] Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости. — М.: Наука, 1981.

[4] Сборник задач по математике для втузов. Специальные разделы математического анализа/ Под ред. А.В. Ефимова, Б.П. Демидовича. — М.: Наука, 1981.

[5] Основы автоматического управления/ Под ред. В.С. Пугачева. — М.: Наука, 1974.

Волченко Юрий Михайлович

Методические рекомендации по дисциплине
"Высшая математика"
"Дискретное преобразование Лапласа и его применение"

Технические редакторы Навальнева О.В., Григорьева Л.В.
Подписано к печати
Формат 60*84/16 Бум.кн.журн.
Печать ксероксная
Изд. № 1 Заказ № 10(к) Тираж 75 экз.

Донецкий институт железнодорожного транспорта
83018 г. Донецк, ул. Горная, 6