ХАРЬКІВСЬКА ДЕРЖАВНА АКАДЕМІЯ
ЗАЛІЗНИЧНОГО ТРАНСПОРТУ

ДОНЕЦЬКИЙ ІНСТИТУТ ЗАЛІЗНИЧНОГО ТРАНСПОРТУ

Кафедра вищої математики і фізики

Ю.М. ВОЛЧЕНКО

ДИСКРЕТНЕ ПЕРЕТВОРЕННЯ ЛАПЛАСА ТА ЙОГО ЗАСТОСУВАННЯ

МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ
з дисципліни
«ВИЩА МАТЕМАТИКА»

Донецьк

2002

Волченко Ю.М. Дискретне перетворення Лапласа та його застосування. – Донецьк: ДонІЗТ, 2002.– 41 с.

Викладено теоретичний матеріал, що є частиною розділу «Операційне числення», яка відноситься до аналізу дискретных динамічних процесів і включена до програми з вищої математики для студентів спеціальности АТЗ. Розглянуті основні властивості дискретного перетворення Лапласа, виведення формул з таблиці «оригінал-зображення», обговорені питання використання скінченних різниць і розв'язання скінченно-різницевих рівнянь. Окремо продемонстровано застосування операційного числення до аналізу дискретних динамічних лінійних систем, конкретно, методи обчислення перехідної, вагової і передавальної функцій об'єкту. Викладення супроводжується ілюстративними прикладами.

Іл. 5, табл. 2, бібліогр. 5 найм.

Методичні рекомендації розглянуто і рекомендовано до публікації на засіданні кафедри вищої математики і фізики 1 вересня 2001 р., протокол № 1.

Рецензенти

доцент, к.т.н. А.Б. Бойнік,
доцент, к.е.н. А.М. Кремліна

Зміст

1 Дискретні перетворення

1.1 Задачі, в яких виникають різницеві рівняння

Крім процесів, що змінюються неперервно і описуються звичайними диференціальними рівняннями або рівняннями з частинними похідними, існує велика кількість систем, функціонування яких відбувається стрибкоподібно, тобто стан системи змінюється в окремі, ізольовані моменти часу. Прикладами можуть бути релейні пристрої, автоматичні регулятори, керовані ЕОМ та ін. Такі системи називають ***дискретними*** і звичайно моделюють за допомогою так званих ***різницевих*** рівнянь.

Приклад 1.1 (математичний)**.** *Треба обчислити визначник n-го порядку такої тридіагональної матриці:*

$$s(n) = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 2 & 4 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 4 \end{vmatrix}.$$

Початок розв'язання. Якщо розкласти цей визначник за елементами першого рядка, дістанемо

$$s(n) = 4s(n-1) - 2 \begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 4 \end{vmatrix} = 4s(n-1) - 4s(n-2).$$

Таким чином, щоб знайти визначник $s(n)$, треба розв'язати рівняння

$$s(n) + 4s(n-2) - 4s(n-1) = 0, \tag{1.1}$$

яке відноситься до класу різницевих рівнянь. □

Приклад 1.2 (технічний). *Система «імпульсний елемент – аперіодична ланка».*

Постанова задачі. Розглянемо послідовне з'єднання імпульсного елементу, що генерує імпульси прямокутної форми висоти 1, і аперіодичної ланки зі сталою часу T і коефіцієнтом підсилення k (рис. 1.1). Періодична послідовність імпульсів, що генерує імпульсний елемент (рис. 1.2), визначається параметрами: $T_{\text{і}}$ — тривалістю імпульсу і $T_{\text{п}}$ — тактом дискретної системи (періодом повторення імпульсів). Аперіодична ланка задається таким диференціальним рівнянням:

Рис. 1.1: Модуляція сигналу

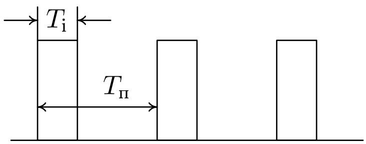

Рис. 1.2: Імпульси

$$T\dot{x} + x = ku,$$

де $u(t)$ — вхідний, $x(t)$ — вихідний сигнали ланки, t — час. Наприклад, ним може бути коливальний контур (рис. 1.3). Його рівняння:

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = u,$$

тому $T = k = L/R$. Можна показати, що за певних умов функціонування системи «імпульсний елемент – аперіодична ланка» описується таким різницевим рівнянням

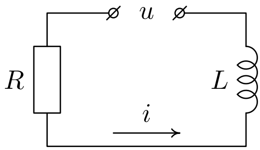

Рис. 1.3: Коливальний контур

$$x(n+1) - \alpha x(n) = k\alpha(\alpha^{-\gamma} - 1)u(n), \tag{1.2}$$

де $\alpha = e^{-T_{\text{п}}/T}$, $\gamma = T_{\text{и}}/T_{\text{п}}$ — відносна тривалість импульсу. □

В кожному з отриманих рівнянь як невідомі фігурують функції, задані тільки в цілих точках. Такі функції називаються ***гратчастими***. Фактично це — своєрідно позначені послідовності.

Рівняння (1.1) і (1.2) є ***лінійними різницевими рівняннями зі сталими коефіцієнтами***. У загальному випадку таке рівняння записують у такий спосіб:

$$a_0x(n) + a_1x(n+1) + \ldots + a_kx(n+k) = u(n), \tag{1.3}$$

де $a_0, \ldots, a_k$ — дійсні числа, які називають ***коефіцієнтами рівняння***, $x(n)$ — ***невідома*** гратчаста функція, $u(n)$ — задана гратчаста функція. Різниця між найбільшим і найменшим значеннями аргументу невідомої функції називається ***порядком*** різницевого рівняння. Наприклад, рівняння (1.1) — другого порядку, рівняння (1.2) — першого порядку, а рівняння (1.3) — k-го порядку. Рівняння (1.3) можна розв'язати різними способами [1, 2]. Одним з них є операційний метод [1], що базується на дискретному перетворенні Лапласа. Тому насамперед вивчимо дискретні перетворення гратчастих функцій.

1.2 Поняття про z- і D-перетворення

Гратчаста функція $f(n)$ називається ***дискретним оригіналом***, якщо

1) $f(n) = 0$ для $n < 0$,

2) знайдуться константи $M > 0$, μ такі, що $|f(n)| \le Me^{\mu n}$.

Z-перетворенням дискретного оригіналу називається функція комплексної змінної $F(z)$ такого вигляду:

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n) z^{-n}. \tag{1.4}$$

Можно показати, що $F(z)$ аналітична ззовні круга $|z| = e^{\alpha}$. Формула (1.4) є розкладом функції $F(z)$ у ряд Лорана в околі правильної нескінченно віддаленої точки. Це дозволяє для відновлення гратчастої функції $f(n)$ за її Z-перетворенням скористатися коефіцієнтами ряду Лорана для $F(z)$, отриманих у будь-який спосіб. Наприклад, можна застосувати формулу коефіцієнтів ряду Лорана

$$f(n) = \frac{1}{2\pi j} \int\limits_{L} F(z) z^{n-1} dz,$$

якщо всі особливі точки функції $F(z)$ розташовані усередині контуру L.

Якщо в Z-перетворенні (1.4) покласти $z = e^{q}$, то вийде ***D-перетворення*** або ***дискретне перетворення Лапласа*** дискретного оригіналу:

$$F^{*}(q) = D[f] = \sum_{n=0}^{\infty} f(n) e^{-nq}. \tag{1.5}$$

Функція $F^{*}(q)$ називається ***зображенням*** функції $f(n)$, а зв'язок між ними позначається так:

$$f(n) \leftarrow\!\!\!\div\, F^{*}(q).$$

З формули (1.5) випливає рівність, за допомогою якої можна по зображенню $F^{*}(q)$ відновити дискретний оригінал:

$$f(n) = \frac{1}{2\pi j} \int\limits_{\gamma-\pi j}^{\gamma+\pi j} F^{*}(q) e^{nq} dq.$$

Дуже часто для отримання зображень використовують формули суми геометричної прогресії:

$$\sum_{i=0}^{m} s^{n} = \frac{1 - s^{m+1}}{1 - s}, \tag{1.6}$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} s^{n} = \frac{1}{1 - s}, \quad |s| < 1. \tag{1.7}$$

Приклад 1.3. *Знайти зображення функції $e^{\alpha n}$.*

Розв'язання. Оскільки завжди знайдеться таке $\mu > 0$, для якого $\alpha < \mu$, то $e^{\alpha n} < e^{\mu n}$ і властивість 2) оригинала виконується при такому μ і $M = 1$. Виходить, зображення заданої функції існує. Знайдемо його за формулами (1.5) і (1.7):

$$D[e^{\alpha n}] = \sum_{n=0}^{\infty} e^{\alpha n} e^{-nq} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{n(\alpha - q)} = \frac{1}{1 - e^{\alpha - q}} = \frac{e^q}{e^q - e^\alpha}.$$

Таким чином,

$$\boxed{e^{\alpha n} \leftarrow\!\!\div \frac{e^q}{e^q - e^\alpha}}.$$

□

Приклад 1.4. *Знайти зображення функції a^n.*

Розв'язання. Використовуючи результат попереднього прикладу, дістаємо

$$D[a^n] = D[e^{n \ln a}] = \frac{e^q}{e^q - e^{\ln a}} = \frac{e^q}{e^q - a}.$$

Тобто,

$$\boxed{a^n \leftarrow\!\!\div \frac{e^q}{e^q - a}}. \tag{1.8}$$

□

Приклад 1.5. *Знайти зображення функції*

$$\sigma(n) = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0. \end{cases}$$

Розв'язання.

$$D[\sigma(n)] = \sum_{n=0}^{\infty} \sigma(n) e^{-nq} = 1e^{0q} = 1.$$

Тоді

$$\boxed{\sigma(n) \leftarrow\!\!\div 1}. \tag{1.9}$$

□

1.2. Поняття про Z- і D-перетворення

Приклад 1.6. *Знайти зображення одиничної ступінчастої функції*

$$\mathbb{1}(n) = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0. \end{cases}$$

Розв'язання.

$$D[\mathbb{1}(n)] = \sum_{n=0}^{\infty} 1e^{-nq} = \frac{1}{1-e^{-q}} = \frac{e^q}{e^q - 1}.$$

Це означає, що

$$\boxed{\mathbb{1}(n) \leftarrow\!\!\div \frac{e^q}{e^q - 1}}. \qquad (1.10)$$

□

В більш складних випадках треба застосовувати властивості D-перетворення.

1.3 Властивості D-перетворення

Теорема 1.1 (лінійності)**.** *Лінійна комбінація оригіналів зображується лінійною комбінацією їхніх зображень:*

$$f_i(n) \leftarrow\!\!\div F_i^*(q), i = \overline{1, m} \Longrightarrow \sum_{i=1}^{m} C_i f_i(n) \leftarrow\!\!\div \sum_{i=1}^{m} C_i F_i^*(q),$$

де C_i — довільні сталі.

Доведення. Оскільки збіжні ряди можна додавати і множити на число, то

$$D\left[\sum_{i=1}^{m} C_i f_i(n)\right] = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{i=1}^{m} C_i f_i(n)\right] e^{-qn} = \sum_{i=1}^{m} C_i \sum_{n=0}^{\infty} f_i(n) e^{-nq} =$$
$$= \sum_{i=1}^{m} C_i D[f_i(n)].$$

□

Приклад 1.7. *Знайти зображення функції* $\sin\beta n$*, використовуючи теорему лінійності.*

Розв'язання.

$$D[\sin\beta n] = D\left[\frac{1}{2j}(e^{j\beta n} - e^{-j\beta n})\right] = \frac{1}{2j}\left(D[e^{j\beta n}] - D[e^{-j\beta n}]\right) =$$
$$= \frac{1}{2j}\left(\frac{e^q}{e^q - e^{j\beta}} - \frac{e^q}{e^q - e^{-j\beta}}\right) = \frac{e^q}{2j}\cdot\frac{e^q - e^{-j\beta} - e^q + e^{j\beta}}{e^{2q} - e^q(e^{j\beta} + e^{-j\beta}) + 1} =$$
$$= \frac{e^q(e^{j\beta} - e^{-j\beta})/(2j)}{e^{2q} - 2e^q(e^{j\beta} + e^{-j\beta})/2 + 1} = \frac{e^q\sin\beta}{e^{2q} - 2e^q\cos\beta + 1}.$$

Отже,

$$\boxed{sin\beta n \leftarrow\!\!\div\; \frac{e^q\sin\beta}{e^{2q} - 2e^q\cos\beta + 1}.} \tag{1.11}$$

□

Приклад 1.8. *Знайти зображення функції* $\cos\beta n$.

Розв'язання.

$$D[\cos\beta n] = D\left[\frac{1}{2}(e^{j\beta n} + e^{-j\beta n})\right] = \frac{1}{2}\left(D[e^{j\beta n}] + D[e^{j\beta n}]\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{e^q}{e^q - e^{j\beta}} + \frac{e^q}{e^q - e^{-j\beta}}\right) = \frac{e^q}{2}\cdot\frac{e^q - e^{-j\beta} + e^q - e^{j\beta}}{e^{2q} - e^q(e^{j\beta} + e^{-j\beta}) + 1} =$$
$$= \frac{e^q(e^q - (e^{j\beta} + e^{-j\beta})/2)}{e^{2q} - 2e^q(e^{j\beta} + e^{-j\beta})/2 + 1} = \frac{e^q(e^q - \cos\beta)}{e^{2q} - 2e^q\cos\beta + 1}.$$

$$\boxed{\cos\beta n \leftarrow\!\!\div\; \frac{e^q(e^q - \cos\beta)}{e^{2q} - 2e^q\cos\beta + 1}.} \tag{1.12}$$

□

Аналогично можна знайти, що

$$\boxed{\operatorname{sh}\beta n \leftarrow\!\!\div\; \frac{e^q\operatorname{sh}\beta}{e^{2q} - 2e^q\operatorname{ch}\beta + 1},}$$

$$\boxed{\operatorname{ch}\beta n \leftarrow\!\!\div\; \frac{e^q(e^q - \operatorname{ch}\beta)}{e^{2q} - 2e^q\operatorname{ch}\beta + 1}.}$$

Теорема 1.2 (загаювання). *Зображення загаювальної функції може бути отримане з зображення оригіналу без загаювання множенням на експоненту. Точніше, якщо $f(n) \leftarrow\!\!\!\!\div F^*(q)$ і $0 < k < n$ — ціле число, то*

$$f(n-k) \leftarrow\!\!\!\!\div e^{-kq}F^*(q).$$

Доведення. Роблячи заміну змінної підсумовування, дістаємо, що

$$\begin{aligned} D[f(n-k)] &= \sum_{n=0}^{\infty} f(n-k)e^{-nq} =< m = n-k,\ n = m+k >= \\ &= \sum_{m=-k}^{\infty} f(m)e^{-(m+k)q} = \sum_{m=-k}^{\infty} f(m)e^{-mq}e^{-kq} = \\ &= e^{-kq}\sum_{m=0}^{\infty} f(m)e^{-mq} = e^{-kq}D[f(n)], \end{aligned}$$

бо $f(-s) = 0,\ s > 0$. □

Приклад 1.9. *Знайти зображення функції a^{n-1}.*

Розв'язання. Раніше була отримана відповідність $a^n \leftarrow\!\!\!\!\div e^q/(e^q - a)$. Використовуючи її і теорему загаювання для $k = 1$, знаходимо

$$a^{n-1} \leftarrow\!\!\!\!\div e^{-q}\frac{e^q}{e^q - a} = \frac{1}{e^q - a}.$$

□

Теорема 1.3 (випередження). *Якщо $f(n) \leftarrow\!\!\!\!\div F^*(q)$ і $k > 0$ — ціле число, то*

$$f(n+k) \leftarrow\!\!\!\!\div e^{kq}\left[F^*(q) - \sum_{m=0}^{k-1} f(m)e^{-mq}\right].$$

Доведення. Знову виконуючи заміну змінної підсумовування, дістаємо

$$\begin{aligned} D[f(n+k)] &= \sum_{n=0}^{\infty} f(n+k)e^{-nq} =< m = n+k,\ n = m-k >= \\ &= \sum_{m=k}^{\infty} f(m)e^{-(m-k)q} = e^{kq}\left[\sum_{m=0}^{\infty} f(m)e^{-mq} - \sum_{m=0}^{k-1} f(m)e^{-mq}\right] = \\ &= e^{kq}\left\{D[f(n)] - \sum_{m=0}^{k-1} f(m)e^{-mq}\right\}. \end{aligned}$$

□

Приклад 1.10. *Знайти зображення функції* a^{n+2}.

Роз'вязання. Виходячи з відповідності $a^n \leftarrow\!\!\div\, e^q/(e^q-a)$ і застосовуючи теорему випередження для $k=2$, маємо

$$a^{n+2} \leftarrow\!\!\div\, e^{2q}\left(\frac{e^q}{e^q-a} - a^0e^0 - a^1e^{-q}\right) = \frac{e^{3q}}{e^q-a} - e^{2q} - ae^q = \frac{a^2e^q}{e^q-a}.$$

□

Теорема 1.4 (про зсув)**.** *Зсуву зображення відповідає множення оригіналу на експоненту. Тобто, якщо* $f(n) \leftarrow\!\!\div\, F^*(q)$, *то*

$$e^{\alpha n}f(n) \leftarrow\!\!\div\, F^*(q-\alpha).$$

Доведення.

$$D[e^{\alpha n}f(n)] = \sum_{n=0}^{\infty} e^{\alpha n}f(n)e^{-nq} = \sum_{n=0}^{\infty} f(n)e^{-(q-\alpha)n} = F^*(q-\alpha).$$

□

Приклад 1.11. *Знайти зображення функції* $e^{-\alpha n}\sin\beta n$.

Роз'вязання. До отриманої раніше відповідності

$$\sin\beta n \leftarrow\!\!\div\, \frac{e^q\sin\beta}{e^{2q}-2e^q\cos\beta+1}$$

застосуємо теорему про зсув і, множачи чисельник і знаменник дробу на $e^{-2\alpha}$, знаходимо

$$e^{-\alpha n}\sin\beta n \leftarrow\!\!\div\, \frac{e^{q+\alpha}\sin\beta}{e^{2(q+\alpha)}-2e^{q+\alpha}\cos\beta+1} = \frac{e^{q-\alpha}\sin\beta}{e^{2q}-2e^{q-\alpha}\cos\beta+e^{-2\alpha}}.$$

□

Аналогично можна дістати, що

$$e^{-\alpha n}\cos\beta n \leftarrow\!\!\div\, \frac{e^q(e^q-e^{-\alpha}\cos\beta)}{e^{2q}-2e^{q-\alpha}\cos\beta+e^{-2\alpha}}.$$

Теорема 1.5 (про диференціювання зображення). *Диференціюванню зображення відповідає множення оригіналу на $-n$:*

$$F^*(q) \risingdotseq f(n) \Longrightarrow [F^*(q)]' \risingdotseq -nf(n).$$

Доведення. Візьмемо похідну від обох частин рівності (1.5):

$$[F^*(q)]' = \left[\sum_{n=0}^{\infty} f(n)e^{-nq}\right]'_q = \sum_{n=0}^{\infty}[-nf(n)]e^{-nq} \risingdotseq -nf(n).$$

□

Висновок 1.1. $[F^*(q)]'' \risingdotseq n^2 f(n), \ldots, [F^*(q)]^{(k)} \risingdotseq (-1)^k n^k f(n)$.

Приклад 1.12. *Знайти зображення функції $f(n) = n$.*

Розв'язання. У прикладі 1.6 було знайдене зображення одиничної східчастої функції:

$$\mathbb{1}(n) \fallingdotseq \frac{e^q}{e^q - 1}.$$

Оскільки можна записати $n = -(-n)\mathbb{1}(n)$, то зображення функції $f(n) = n$ у силу попередньої теореми дорівнює похідній зображення функції $\mathbb{1}(n)$, узятої із знаком мінус:

$$-\left(\frac{e^q}{e^q - 1}\right)' = -\frac{e^{2q} - e^q - e^{2q}}{(e^q - 1)^2} = \frac{e^q}{(e^q - 1)^2}.$$

Тобто

$$\boxed{n \fallingdotseq \frac{e^q}{(e^q - 1)^2}.}$$

□

Приклад 1.13. *Знайти зображення функції $f(n) = n^2$.*

Розв'язання. Скористаємося результатом попереднього прикладу, для чого задану функцію запишемо так: $f(n) = -(-n)n$. Тоді її зображення буде дорівнювати похідній зображення функції n, взятій із знаком мінус:

$$-\left(\frac{e^q}{(e^q - 1)^2}\right)' = -\frac{e^q(e^q - 1)^2 - 2(e^q - 1)e^{2q}}{(e^q - 1)^4} = -\frac{e^{2q} - e^q - 2e^{2q}}{(e^q - 1)^3} =$$
$$= \frac{e^{2q} + e^q}{(e^q - 1)^3} = \frac{e^q(e^q + 1)}{(e^q - 1)^3}.$$

Таким чином,

$$\boxed{n^2 \leftarrow\!\div\!- \frac{e^q(e^q+1)}{(e^q-1)^3}.}$$

$\square$

Приклад 1.14. *Знайти зображення функції* $f(n) = C_n^k$.

Розв'язання. У прикладі 1.12 було отримано, що $n \leftarrow\!\div\!- e^q/(e^q-1)^2$, тоді за теоремою загаювання $n-1 \leftarrow\!\div\!- 1/(e^q-1)^2$. Отже, за теоремою про диференціювання зображення

$$n(n-1) \leftarrow\!\div\!- -\left(\frac{1}{(e^q-1)^2}\right)' = \frac{2e^q(e^q-1)}{(e^q-1)^4} = 2!\frac{e^q}{(e^q-1)^3}, \tag{1.13}$$

тому за теоремою лінійності

$$C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2!} \leftarrow\!\div\!- \frac{e^q}{(e^q-1)^3}.$$

З відповідності (1.13) за теоремою загаювання знаходимо, що $(n-1)(n-2) \leftarrow\!\div\!- 2!/(e^q-1)^3$ і знову за теоремою про диференціювання зображення дістаємо:

$$n(n-1)(n-2) \leftarrow\!\div\!- -2!\left(\frac{1}{(e^q-1)^3}\right)' = 2!\frac{3e^q(e^q-1)^2}{(e^q-1)^6} = 3!\frac{e^q}{(e^q-1)^4},$$

виходить, що

$$C_n^3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \leftarrow\!\div\!- \frac{e^q}{(e^q-1)^4}.$$

Далі неважко здогадатись, що

$$\boxed{C_n^k \leftarrow\!\div\!- \frac{e^q}{(e^q-1)^{k+1}}.}$$

$\square$

Приклад 1.15. *Знайти зображення функції* $C_n^k e^{\alpha n}$.

Розв'язання. Використовуючи результат прикладу 1.14 і теорему про зсув, отримуємо, що

$$C_n^k e^{\alpha n} \risingdotseq \frac{e^{q-\alpha}}{(e^{q-\alpha}-1)^{k+1}}.$$

Множачи обидві частини дробу на $e^{\alpha(k+1)}$, знаходимо

$$\boxed{C_n^k e^{\alpha n} \risingdotseq \frac{e^{q+\alpha k}}{(e^q - e^\alpha)^{k+1}}.}$$

□

Приклад 1.16. *Знайти зображення функції $C_n^k a^n$.*

Розв'язання. Використовуємо попередній результат:

$$C_n^k a^n = C_n^k e^{n\ln a} \risingdotseq \frac{e^{q+k\ln a}}{(e^q - e^{\ln a})^{k+1}} = \frac{a^k e^q}{(e^q-a)^{k+1}}.$$

Отже,

$$\boxed{C_n^k a^n \risingdotseq \frac{a^k e^q}{(e^q-a)^{k+1}}.} \tag{1.14}$$

□

Величина $\sum_{i=0}^{n-1} f(i)$ називається ***сумою гратчастої функції***.

Теорема 1.6 (зображення суми)**.** *Якщо гратчаста функція $f(n)$ має зображення $F^*(q)$, то*

$$\boxed{\sum_{i=0}^{n-1} f(i) \risingdotseq \frac{F^*(q)}{e^q-1}}.$$

Доведення. Дискретне перетворення Лапласа суми гратчастої функції має вигляд:

$$D\left[\sum_{i=0}^{n-1} f(i)\right] = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{n-1} f(i)e^{-nq}. \tag{1.15}$$

Пари індексів (n,i), що беруть участь у підсумовуванні, утворюють координати точок із цілими координатами, показаних на рис. 1.4. Якщо у

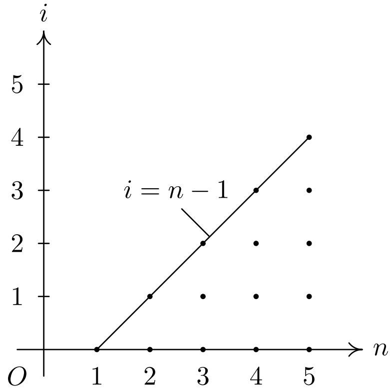

Рис. 1.4: Точки підсумовування

формулі (1.15) поміняти місцями знаки підсумовування, то відповідно до цього рис. вийде вираз:

$$D\left[\sum_{i=0}^{n-1} f(i)\right] = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{n=i+1}^{\infty} f(i)e^{-nq} = \sum_{i=0}^{\infty} f(i)\sum_{n=i+1}^{\infty} e^{-nq}.$$

Але внутрішня сума є нескінченною геометричною прогресією, тому, застосовуючи формулу її суми (1.7), знаходимо

$$D\left[\sum_{i=0}^{n-1} f(i)\right] = \sum_{i=0}^{\infty} f(i)\frac{e^{-(i+1)q}}{1-e^{-q}} = \frac{e^{-q}}{1-e^{-q}}\sum_{i=0}^{\infty} f(i)e^{-iq} = \frac{F^*(q)}{e^q-1}.$$

□

Приклад 1.17. *Знайти суму* $\sum_{i=0}^{n-1} i^2$.

Розв'язання. У прикладі 1.13 було знайдено, що

$$n^2 \leftarrow\!\!\div\, e^q(e^q+1)/(e^q-1)^3.$$

Тоді використовуючи доведену теорему і результат прикладу 1.14, дістаємо

$$\sum_{i=0}^{n-1} i^2 \leftarrow\!\!\div \frac{e^q(e^q+1)}{(e^q-1)^4} = \frac{e^q}{(e^q-1)^3} + 2\frac{e^q}{(e^q-1)^4} \div\!\!\rightarrow$$
$$\div\!\!\rightarrow C_n^2 + 2C_n^3 = \frac{n(n-1)}{2} + \frac{2n(n-1)(n-2)}{6} =$$
$$= n(n-1)\left(\frac{1}{2} + \frac{n-2}{3}\right) = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6},$$

тобто

$$\sum_{i=0}^{n-1} i^2 = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}.$$

□

Згорткою двох гратчастих функцій $f_1(n)$ і $f_2(n)$ називається сума, що позначається так:

$$f_1 * f_2(n) = \sum_{k=0}^{n} f_1(k) f_2(n-k).$$

Теорема 1.7 (про зображення згортки)**.** *Згортка двох гратчастих оригіналів зображується добутком їхніх зображень:*

$$f_1(n) \leftarrow\!\!\div F_1^*(q), f_2(n) \leftarrow\!\!\div F_2^*(q) \Longrightarrow f_1 * f_2(n) \leftarrow\!\!\div F_1^*(q)F_2^*(q).$$

Доведення. За означенням D-перетворення функції $f_1(n)$ маємо

$$F_1^*(q)F_2^*(q) = F_2^*(q)\sum_{k=0}^{\infty} e^{-kq} f_1(k) = \sum_{k=0}^{\infty} [e^{-kq}F_2^*(q)] f_1(k).$$

За теоремою загаювання $e^{-kq}F_2^*(q) \div\!\!\rightarrow f_2(n-k)$, тоді за теоремою лінійності, з огляду на те, що $f_2(n-k) = 0$ для $k > n$, отримуємо

$$F_1^*(q)F_2^*(q) \div\!\!\rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} f_2(n-k) f_1(k) = \sum_{k=0}^{n} f_2(n-k) f_1(k) = f_1 * f_2(n),$$

що й треба було довести. □

Приклад 1.18. *Знайти оригінал, що відповідає зображенню*

$$F^*(q) = \frac{e^{2q}}{(e^q - a)(e^q - e^\alpha)}.$$

Розв'язання. Задане зображення можна подати у вигляді

$$F^*(q) = \frac{e^q}{(e^q - a)} \cdot \frac{e^q}{(e^q - e^\alpha)} = F_1^*(q) F_2^*(q),$$

де $F_1^*(q) = e^q/(e^q - a)$, $F_2^*(q) = e^q/(e^q - e^\alpha)$. У прикладі 1.4 було показано, що $F_1^*(q) \xrightarrow{\cdot} a^n$, а в прикладі 1.3 — що $F_2^*(q) \xrightarrow{\cdot} e^{\alpha n}$. Тому, використовуючи теорему про згортку і формулу суми скінченної геометричної прогресії (1.6), знаходимо

$$F^*(q) \xrightarrow{\cdot} \sum_{k=0}^{n} a^k e^{\alpha(n-k)} = e^{\alpha n} \sum_{k=0}^{n} (ae^{-\alpha})^k = e^{\alpha n} \frac{1 - (ae^{-\alpha})^{n+1}}{1 - ae^{-\alpha}} =$$
$$= \frac{e^{\alpha n} - a^{n+1} e^{-\alpha}}{1 - ae^{-\alpha}} = \frac{e^{\alpha(n+1)} - a^{n+1}}{e^\alpha - a}.$$

□

Властивості D-перетворення зібрані в додатку в табл. A.1, а основні відповідності «оригінал-зображення» — в табл. A.2. Більш повні таблиці див. в [1].

2 Скінченні різниці

2.1 Означення

Часто скінченно-різницеві рівняння записують за допомогою так званих скінченних різниць, надаючи їм вигляду, що нагадує запис диференціальних рівнянь за допомогою диференціалів. ***Різницею першого порядку*** гратчастої функції $f(n)$ називають величину

$$\Delta f(n) = f(n+1) - f(n). \tag{2.1}$$

Різницею другого порядку називають різницю, взяту від першої різниці: $\Delta^2 f(n) = \Delta[\Delta f(n)] = \Delta f(n+1) - \Delta f(n) = f(n+2) - f(n+1) - [f(n+1) - f(n)] = f(n+2) - 2f(n+1) + f(n)$. Остання формула нагадує формулу квадрата різниці двох величин. ***Різниця k-го порядку*** — це різниця, взята від різниці $k-1$-го порядку: $\Delta^k f(n) = \Delta[\Delta^{k-1} f(n)]$. Можна показати, що і для неї справедлива формула, що нагадує формулу k-го степеня різниці двох величин:

$$\Delta^k f(n) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^k C_k^i f(n+k-i). \tag{2.2}$$

Навпаки, значення гратчастої функції можна виразити через скінченні різниці, вважаючи, що $f(n) = \Delta^0 f(n)$: $f(n+1) = f(n) + [f(n+1) - f(n)]$, або

$$f(n+1) = f(n) + \Delta f(n).$$

Далі, $f(n+2) = f(n+1) + \Delta f(n+1) = f(n) + \Delta f(n) + \Delta f(n) + \Delta^2 f(n)$, отже,

$$f(n+2) = f(n) + 2\Delta f(n) + \Delta^2 f(n).$$

Продовжуючи в тому ж дусі, приходимо до загальної формули:

$$f(n+k) = \sum_{i=0}^{k} C_k^i \Delta^i f(n). \tag{2.3}$$

Різниці мають властивості, схожі на властивості диференціалів (C, a, b — константи):

$$\begin{gathered}
\Delta C = 0, \\
\Delta n = 1, \\
\Delta[af(n) + bg(n)] = a\Delta f(n) + b\Delta g(n), \\
\Delta[f(n)g(n)] = f(n)\Delta g(n) + g(n+1)\Delta f(n).
\end{gathered}$$

Перші три з них очевидні, а четверта доводиться так:

$$\begin{aligned}
\Delta[f(n)g(n)] &= f(n+1)g(n+1) - f(n)g(n) = \\
&= f(n+1)g(n+1) - f(n)g(n+1) + f(n)g(n+1) - \\
&- f(n)g(n) = g(n+1)\Delta f(n) + f(n)\Delta g(n).
\end{aligned}$$

2.2 Зображення

Теорема 2.1. *Якщо гратчаста функція $f(n)$ має зображення $F^*(q)$, то її різниця k-го порядку зображується так:*

$$\Delta^k f(n) \risingdotseq (e^q - 1)^k F^*(q) - e^p \sum_{i=0}^{k-1} (e^q - 1)^{k-1-i} \Delta^i f(0). \tag{2.4}$$

Доведення. З формули (2.1) і теорем лінійності і випередження дістаємо

$$\Delta f(n) = f(n+1) - f(n) \risingdotseq e^q[F^*(q) - f(0)] - F^*(q),$$

або

$$\Delta f(n) \risingdotseq (e^q - 1)F^*(q) - e^q f(0), \tag{2.5}$$

що́ відповідає формулі (2.4) для $k = 1$.

Знайдемо зображення різниці другого порядку. Для цього спочатку зауважимо, що формула (2.5) і теорема випередження дають відповідність

$$\Delta f(n+1) \risingdotseq e^q[(e^q - 1)F^*(q) - e^q f(0) - \Delta f(0)].$$

Використовуючи її і формулу (2.5), отримуємо

$$\begin{aligned}\Delta^2 f(n) = \Delta f(n+1) - \Delta f(n) \leftarrow\!\!\div\!\!- \\ \leftarrow\!\!\div\!\!- e^q[(e^q-1)F^*(q) - e^q f(0) - \Delta f(0)] - \\ -(e^q-1)F^*(q) + e^q f(0),\end{aligned}$$

або

$$\Delta^2 f(n) \leftarrow\!\!\div\!\!- (e^q-1)^2 F^*(q) - e^q(e^q-1)f(0) - e^q \Delta f(0). \tag{2.6}$$

Це відповідає формулі (2.4) для $k = 2$. Продовжуючи і так далі, можна переконатися в тому, що формула справедлива для будь-якого k. □

2.3 Використання в рівняннях

Скінченно-різницеве рівняння (1.3)

$$a_0 x(n) + a_1 x(n+1) + \ldots + a_k x(n+k) = u(n) \tag{2.7}$$

за допомогою формули (2.3), застосованої до невідомої функції, може бути перетворене до вигляду

$$b_0 \Delta^k x(n) + b_1 \Delta^{k-1} x(n) + \ldots + b_k x(n) = u(n), \tag{2.8}$$

в якому воно більше, ніж рівняння (1.3), нагадує лінійне диференціальне рівняння k-го порядку зі сталими коефіцієнтами. Роль k-ї похідної відіграє різниця k-го порядку. Треба, однак, зауважити, що порядок рівняння (2.8) не можна визначити як порядок старшої різниці невідомої функції, що входить у рівняння. Дійсно, у рівнянні

$$\Delta^2 f(n) + 4\Delta f(n) + 3f(n) = 0$$

порядок старшої різниці невідомої функції дорівнює 2. Перетворимо це рівняння за допомогою формули (2.2):

$$\begin{gathered} f(n+2) - 2f(n+1) + f(n) + 4f(n+1) - 4f(n) + 3f(n) = 0, \\ f(n+2) + 2f(n+1) = 0, \end{gathered}$$

або

$$f(n+1) + 2f(n) = 0.$$

Як бачимо, рівняння має перший порядок.

Тому, а також тому, що відшукувати зображення різниць невідомої функції за формулою (2.4) досить складно, намагаються розв'язувати скінченно-різницеве рівняння у вигляді (1.3). Якщо ж воно задане у вигляді (2.8), його перетворюють у форму (2.7), використовуючи рівність (2.2).

3 Скінченно-різницеві рівняння

Розглянемо тепер розв'язання скінченно-різницевого рівняння (1.3):

$$a_0 x(n) + a_1 x(n+1) + \ldots + a_k x(n+k) = u(n) \tag{3.1}$$

операційним методом. Звичайно його треба розв'язувати для заданих початкових умов вигляду

$$x(0) = x_0,\ x(1) = x_1, \ldots, x(k-1) = x_{k-1}. \tag{3.2}$$

Розв'язком різницевого рівняння (3.1) називається будь-яка гратчаста функція $f(n)$, що після підстановки в рівняння замість невідомої функції $x(n)$ перетворює його в тотожність і задовольняє початкові умови (3.2).

Застосування операційного методу до розв'язання рівняння (3.1) полягає в тому, що обидві частини рівняння піддають дискретному перетворенню Лапласа, в результаті чого дістають так зване ***операторне рівняння*** (або ***рівняння в зображеннях***), у якому невідомою є функція $X^*(q) \stackrel{\cdot}{\longrightarrow} x(n)$. Оскільки операторне рівняння звичайно — алгебраїчне, то знайти з нього $X^*(q)$ неважко. Щоб по ньому визначити шуканий оригінал $x(n)$, використовують спеціальні методи, властивості D-перетворення і таблиці «оригінал-зображення». Аналогічним способом розв'язують і системи скінченно-різницевих рівнянь.

Приклад 3.1 (продовження прикладу 1.1)**.** *Розв'язати рівняння* (1.1)*.*

Розв'язання. Перепишемо зазначене рівняння у вигляді

$$s(n+2) + 4s(n) - 4s(n+1) = 0. \tag{3.3}$$

Знайдемо $s(1) = |4| = 4$ і покладемо $s(0) = 1$. Неважко побачити, що для $s(0) = 1$ і $s(1) = 4$ з рівняння (1.1) випливає, що $s(2) = 12$. Безпосередньо обчислюючи визначник $s(2)$, можна перевірити слушність цього результату. Таким чином, $s(0) = 1$ і $s(1) = 4$ є придатними початковими умовами для рівняння (1.1). Введемо зображення $s(n) \leftarrow\!\!\div S^*(q)$ і за теоремою випередження дістанемо $s(n+1) \leftarrow\!\!\div e^q[S^*(q) - s(0)] = e^q[S^*(q) - 1]$, $s(n+2) \leftarrow\!\!\div e^{2q}[S^*(q) - s(0) - s(1)e^{-q}] = e^{2q}S^*(q) - e^{2q} - 4e^q$. Застосовуючи дискретне перетворення Лапласа до рівняння (3.3), отримуємо рівняння в зображеннях:

$$e^{2q}S^*(q) - e^{2q} - 4e^q + 4S^*(q) - 4e^q S^*(q) + 4e^q = 0,$$

з якого знаходимо

$$S^*(q) = \frac{e^{2q}}{e^{2q} - 4e^q + 4} = \frac{e^{2q}}{(e^q - 2)^2} = \frac{1}{2}e^q \frac{2e^q}{(e^q - 2)^2}.$$

Формула (1.14) показує, що

$$C_n^1 2^n \leftarrow\!\!\div \frac{2e^q}{(e^q - 2)^2};$$

використовуючи далі теорему загаювання, знаходимо шуканий розв'язок рівняння (3.3):

$$s(n) = \frac{1}{2}C_{n+1}^1 2^{n+1} = (n+1)2^n.$$

□

Приклад 3.2 (продовження прикладу 1.2)**.** *Розв'язати скінченно-різницеве рівняння* (1.2)*.*

Розв'язання. Позначимо у зазначеному рівнянні $\beta = k\alpha(\alpha^{-\gamma} - 1)$ і подамо його у вигляді

$$x(n+1) - \alpha x(n) = \beta u(n). \tag{3.4}$$

Введемо зображення: $x(n) \leftarrow\!\!\div X^*(q)$, $u(n) \leftarrow\!\!\div U^*(q)$. За формулою випередження $x(n+1) \leftarrow\!\!\div e^q[X^*(q) - x(0)]$. Припустимо, що $x(0) = 0$, і застосуємо дискретне перетворення Лапласа до рівняння (3.4):

$$e^q X^*(q) - \alpha X^*(q) = \beta U^*(q).$$

Знаходимо зображення вихідного сигналу:

$$X^*(q) = \frac{\beta U^*(q)}{e^q - \alpha}. \tag{3.5}$$

Дістанемо розв'язок рівняння (3.4) для двох різних вхідних сигналів.

а) Нехай $u(n) = d\sigma(n) \leftarrow\!\div d$ (див. (1.9)).
Подамо зображення вихідного сигналу в такому вигляді:

$$X^*(q) = \frac{\beta d}{e^q - \alpha} = \beta d e^{-q} \frac{e^q}{e^q - \alpha}$$

і зауважимо, що відповідно до формули (1.8)

$$\alpha^n \leftarrow\!\div \frac{e^q}{e^q - \alpha};$$

тоді за теоремою загаювання $x(n) = \beta d \alpha^{n-1}$, $n \geq 1$.

б) Нехай $u(n) = 1\!\!\mathrm{I}(n) \leftarrow\!\div \dfrac{e^q}{e^q - 1}$ (див. (1.10)).
Запишемо зображення вихідного сигналу так:

$$X^*(q) = \frac{\beta e^q}{(e^q - 1)(e^q - \alpha)} = \frac{\beta}{1 - \alpha} \left(e^{-q} \frac{e^q}{e^q - 1} - \alpha e^{-q} \frac{e^q}{e^q - \alpha} \right).$$

Отже,

$$x(n) = \frac{\beta}{1 - \alpha} [1\!\!\mathrm{I}(n-1) - \alpha^n].$$

$\square$

Приклад 3.3. *Розв'язати скінченно-різницеве рівняння:*

$$x(n+2) - x(n+1) + x(n) = 0$$

для початкових умов $x(0) = x(1) = 1$.

Розв'язання. Позначимо $x(n) \leftarrow\!\div X^*(q)$ зображення невідомої функції і за теоремою випередження знайдемо

$$x(n+1) \leftarrow\!\div e^q [X^*(q) - 1], \;\; x(n+2) \leftarrow\!\div e^{2q}[X^*(q) - 1 - e^{-q}]. \tag{3.6}$$

Тому використовуючи ці співвідношення і застосовуючи до заданого рівняння дискретне перетворення Лапласа, дістанемо таке операторне рівняння:

$$e^{2q}[X^*(q) - 1 - e^{-q}] - e^q[X^*(q) - 1] + X^*(q) = 0,$$

або

$$X^*(q)(e^{2q} - e^q + 1) = e^{2q} + e^q - e^q,$$

з якого знайдемо зображення невідомої функції:

$$X^*(q) = \frac{e^{2q}}{e^{2q} - e^q + 1}.$$

Перепишемо його таким чином:

$$X^*(q) = \frac{e^q\left(e^q - \cos\frac{\pi}{3}\right)}{e^{2q} - 2e^q\cos\frac{\pi}{3} + 1} + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{e^q \sin\frac{\pi}{3}}{e^{2q} - 2e^q\cos\frac{\pi}{3} + 1}.$$

Використовуючи відповідності (1.11) і (1.12), можемо записати розв'язок заданого скінченно-різницевого рівняння у вигляді:

$$x(n) = \cos\frac{\pi}{3}n + \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\frac{\pi}{3}n = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{3}n + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\frac{\pi}{3}n\right) =$$
$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\sin\frac{\pi}{3}n\cos\frac{\pi}{3} + \sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{3}n\right),$$

або

$$x(n) = \frac{2}{\sqrt{3}}\sin\frac{(n+1)\pi}{3}.$$

□

Приклад 3.4. *Розв'язати систему скінченно-різницевих рівнянь*

$$\begin{cases} x(n+1) - 2x(n) - 2y(n) &= 3^n, \\ y(n+1) - x(n) - 3y(n) &= 2^n. \end{cases}$$

для нульових початкових умов.

Розв'язання. Введемо зображення невідомих функцій $X^*(q)$, $Y^*(q)$ і, використовуючи початкові умови і теорему випередження, отримаємо, що $x(n+1) \leftarrow\!\!\!\div\; e^q X^*(q)$, $y(n+1) \leftarrow\!\!\!\div\; e^q Y^*(q)$. Зобразимо також праві частини рівнянь: $3^n \leftarrow\!\!\!\div\; e^q/(e^q-3)$, $2^n \leftarrow\!\!\!\div\; e^q/(e^q-2)$. Далі, застосовуючи дискретне перетворення Лапласа до кожного рівняння заданої системи, прийдемо до такої системи операторних рівнянь:

$$\begin{cases} e^q X^*(q) - 2X^*(q) - 2Y^*(q) &= \dfrac{e^q}{e^q-3}, \\ e^q Y^*(q) - X^*(q) - 3Y^*(q) &= \dfrac{e^q}{e^q-2}, \end{cases}$$

або
$$\begin{cases} X^*(q)(e^q-2)-2Y^*(q) &= \dfrac{e^q}{e^q-3}, \\ -X^*(q)+Y^*(q)(e^q-3) &= \dfrac{e^q}{e^q-2}. \end{cases}$$
Розв'яжемо цю систему методом визначників:
$$\Delta = \begin{vmatrix} e^q-2 & -2 \\ -1 & e^q-3 \end{vmatrix} = (e^q-2)(e^q-3)-2 = e^{2q}-5e^q+4 = \\ = (e^q-1)(e^q-4),$$
$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \dfrac{e^q}{e^q-3} & -2 \\ \dfrac{e^q}{e^q-2} & e^q-3 \end{vmatrix} = e^q + \frac{2e^q}{e^q-2} = \frac{e^{2q}}{e^q-2},$$
$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} e^q-2 & \dfrac{e^q}{e^q-3} \\ -1 & \dfrac{e^q}{e^q-2} \end{vmatrix} = e^q + \frac{e^q}{e^q-3} = \frac{e^q(e^q-2)}{e^q-3};$$
$$X^*(q) = \frac{e^{2q}}{(e^q-2)(e^q-1)(e^q-4)}, \quad Y^*(q) = \frac{e^q(e^q-2)}{(e^q-3)(e^q-1)(e^q-4)}.$$
Виконаємо розкладання отриманих виразів на елементарні дроби:
$$X^*(q) = e^q\frac{e^q}{(e^q-2)(e^q-1)(e^q-4)} = \frac{1}{3}\cdot\frac{e^q}{e^q-1} + \frac{2}{3}\cdot\frac{e^q}{e^q-4} - \frac{e^q}{e^q-2},$$
$$Y^*(q) = e^q\frac{e^q-2}{(e^q-3)(e^q-1)(e^q-4)} = \\ = -\frac{3}{2}\cdot\frac{e^q}{e^q-3} - \frac{1}{6}\cdot\frac{e^q}{e^q-1} + \frac{8}{3}\cdot\frac{e^q}{e^q-4}.$$

Використовуючи формулу (1.8), знаходимо оригінали цих функцій, які є розв'язком заданої системи рівнянь:
$$x(n) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}4^n - 2^n = \frac{1}{3}(1 + 2^{2n+1} - 3\cdot 2^n),$$
$$y(n) = -\frac{3}{2}3^n - \frac{1}{6} + \frac{8}{3}4^n = \frac{1}{6}(2^{2n+4} - 3^{n+2} - 1).$$

□

Для самостійного розв'язання задач рекомендується використовувати збірники задач [3] і [4].

4 Лінійні дискретні системи

4.1 Перехідна функція

В природі, техніці, суспільстві можна спостерігати об'єкти, що являють собою сукупності деякої кількості частин, які взаємодіють одна з одною і змінюють свій стан із часом. Такі об'єкти в теорії регулювання і керування називають ***динамічними системами(ДС)***[5]. Звичайно за поведінкою ДС можна спостерігати, вивчаючи або її вихідний сигнал, або, якщо це можливо, безпосередньо її стан. Крім того, завдяки тому, що звичайно ДС реагує на зміну зовнішнього середовища, на неї можна подати вхідний сигнал і проаналізувати її реакцію. Спрощено ДС можна подати у вигляді, показаному на рис. 4.1.

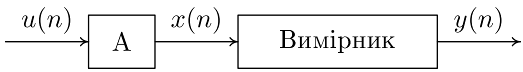

Рис. 4.1: Динамічна система

На ньому $u(n)$ означає вхідний сигнал, $x(n)$ — стан ДС, $y(n)$ — вихідний сигнал у момент дискретного часу n, а A — так званий оператор ДС. Оператор являє собою закон, за яким функціонує система; він перетворює вхідний сигнал $u(n)$ у функцію стану системи:

$$x(n) = \mathrm{A}\, u(n). \tag{4.1}$$

Надалі ми будемо припускати, що $u(n)$, $x(n)$ — скалярні функції і стан $x(n)$ доступний для спостереження, тобто вимірник нам не потрібний (див. рис. 4.2).

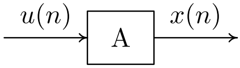

Рис. 4.2: Спрощена динамічна система

Найпростішими серед ДС є ***лінійні системи (ЛС)***, їх оператор має властивість лінійності (c_1, c_2 — константи):

$$\mathrm{A}(c_1 u_1(n) + c_2 u_2(n)) = c_1 \,\mathrm{A}\, u_1(n) + c_2 \,\mathrm{A}\, u_2(n), \tag{4.2}$$

яка дозволяє, знаючи реакцію ДС на вхідні сигнали u_1 і u_2, дістати її реакцію за формулою (4.2) на будь-яку лінійну комбінацію цих сигналів.

Оскільки ряд являє собою границю скінченної суми, то властивість лінійності виконується і в такій формі:

$$\mathrm{A} \sum_{m=-\infty}^{\infty} c(m) u(n,m) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c(m) \,\mathrm{A}\, u(n,m), \tag{4.3}$$

де $u(n,m)$ — вхідний сигнал, що залежить від деякого параметра m, а оператор А у правій частині рівності діє на $u(n,m)$ тільки як на функцію n (для фіксованого m).

Дуже часто дискретні лінійні динамічні системи описуються різницевим лінійним рівнянням зі сталими коефіцієнтами:

$$a_0 x(n) + \ldots + a_k x(n+k) = b_0 u(m) + \ldots + b_l u(m+l).$$

Наприклад, послідовне з'єднання імпульсного елемента з аперіодичною ланкою (приклад 1.2) являє собою дискретну ЛС.

Основними задачами, що виникають у теорії керування ЛС, є такі: по вхідному сигналу $u(n)$ і реакції ЛС $x(n)$ відшукати оператор А; дослідити якість переходу системи в стійкий стан; знайти її частотні характеристики. Розв'язати ці задачі можна, якщо подати на вхід ЛС спеціальні сигнали.

Припустимо, що ЛС виведена зі свого стійкого стану. Якщо система асимптотично стійка, вона через якийсь час практично повернеться в нього. Цей перехід із нестійкого стану в стійкий називається ***перехідним процесом***. Перехідний процес може відбуватись по-різному. Якщо він триває довго і система робить великі коливання, то така система, навіть і стійка, не може вважатися задовільною.

4.1. Перехідна функція

Щоб оцінити якість перехідного процесу, на її вхід подають одиничну східчасту функцію Хевісайда $\mathbb{1}(n)$, означену в прикладі 1.6, і вивчають відгук системи, що називають ***перехідною функцією*** системи і позначають $h(n, m)$, де m — момент початку подачі функції Хевісайда. Тривалість часу M_Π від початку перехідного процесу до моменту n, коли $|h(n, m) - h(\infty, m)| < 0,05|h(\infty, m)|$ називається ***тривалістю перехідного процесу***. Якщо протягом часу M_Π функція $h(n, m) - h(\infty, m)$ змінює знак, то кожний екстремум називається ***перерегулюванням***, а число таких екстремумів за час перехідного процесу M_Π називається ***числом перерегулювань***.

Перехідний процес вважають задовільним, якщо число перерегулювань не перевищує двох. У деяких випадках перерегулювання взагалі не допускається.

Приклад 4.1. *Знайти перехідну функцію дискретної системи «імпульсний елемент – аперіодична ланка».*

Розв'язання. Розв'яжемо рівняння (3.4) за умови, що вхідний сигнал є одиничною східчастою функцією, $u(n) = \mathbb{1}(n - k)$:

$$x(n + 1) - \alpha x(n) = \beta \mathbb{1}(n - k), \qquad x(0) = 0,$$

для чого введемо зображення

$$x(n) \leftarrow\!\div\, X^*(q), \qquad x(n + 1) \leftarrow\!\div\, e^q X^*(q),$$

$$\mathbb{1}(n - k) \leftarrow\!\div\, e^{-kq} \frac{e^q}{e^q - 1}$$

і складемо операторне рівняння

$$e^q X^*(q) - \alpha X^*(q) = \beta e^{-kq} \frac{e^q}{e^q - 1}.$$

Дістанемо

$$X^*(q) = \beta e^{-kq} \frac{1}{e^q - 1} \cdot \frac{1}{e^q - \alpha} e^q.$$

Оригінал для зображення

$$\frac{\beta e^q}{(e^q - 1)(e^q - \alpha)}$$

був знайдений у прикладі 3.2; виявилось, що він дорівнює

$$\frac{\beta}{1 - \alpha} \left[\mathbb{1}(n - 1) - \alpha^n\right].$$

Тому на підставі теореми загаювання отримуємо

$$x(n) = \frac{\beta}{1-\alpha}\left[\mathbb{I}(n-k-1) - \alpha^{n-k}\right];$$

отже, перехідна функція даної дискретної системи виражається формулою

$$h(n,k) = \begin{cases} \dfrac{\beta}{1-\alpha}\left[1-\alpha^{n-k}\right], & n > k; \\ 0, & n \le k. \end{cases}$$

□

4.2 Вагова функція

Якщо подавати на вхід ЛС все більш короткий і все більш потужний імпульс («удар»), то, виявляється, можна отримувати все більш повну інформацію про її оператор A. В теорії дискретних систем роль такого вхідного сигналу відіграє функція $\sigma(n)$, розглянута в прикладі 1.5. За її допомогою довільний вхідний сигнал можна подати у вигляді

$$u(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} u(m)\sigma(n-m). \tag{4.4}$$

Реакція ЛС на функцію $\sigma(n)$, подану в момент часу k, називається ***ваговою***, або ***імпульсною перехідною функцією*** ЛС і позначається $g(n,k) = \mathrm{A}\,\sigma(n-k)$, причому, для фізично здійсненної системи слід вважати, що $g(n,k) = 0$, коли $k \ge n$.

Застосуємо до рівності (4.4) оператор A лінійної системи, враховуючи його властивість (4.3):

$$x(n) = \mathrm{A}\,u(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} u(m)\,\mathrm{A}\,\sigma(n-m) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} g(n,m)u(m),$$

де $g(n,m) = \mathrm{A}\,\sigma(n-m)$. Для фізично здійсненної системи звідси випливає, що

$$x(n) = \sum_{m=k}^{n-1} g(n,m)u(m) \tag{4.5}$$

за умови, що вхідний сигнал подавався, починаючи з моменту часу $n = k$. Якщо в останню формулу замість $u(m)$ підставити одиничну східчасту функцію, вийде вираз

$$h(n,k) = \sum_{m=k}^{n-1} g(n,m)\mathbb{1}(m-k) = \sum_{m=k}^{n-1} g(n,m), \qquad k < n, \tag{4.6}$$

який пов'язує вагову функцію системи з її перехідною функцією.

Можна знайти і вираз, що реалізує протилежний зв'язок. Дійсно, формулу (4.6) можна переписати так:

$$h(n,k) = g(n,k) + \sum_{m=k+1}^{n-1} g(n,m) = g(n,k) + h(n,k+1),$$

а тоді

$$g(n,k) = h(n,k) - h(n,k+1), \qquad k < n. \tag{4.7}$$

Приклад 4.2. *Використовуючи результат прикладу 4.1 і рівність (4.7), знайти вагову функцію системи «імпульсний елемент – аперіодична ланка».*

Розв'язання. Застосовуючи зазначені результати, знаходимо

$$\begin{aligned} g(n,k) &= h(n,k) - h(n,k+1) = \\ &= \frac{\beta}{1-\alpha}\left[1-\alpha^{n-k}\right] - \frac{\beta}{1-\alpha}\left[1-\alpha^{n-k-1}\right] = \\ &= \frac{\beta}{1-\alpha}(\alpha^{n-k-1} - \alpha^{n-k}) = \frac{\beta}{1-\alpha}\alpha^{n-k-1}(1-\alpha), \end{aligned}$$

або

$$g(n,k) = \beta\alpha^{n-k-1}, \;\; k < n.$$

Тепер відгук цієї системи на будь-який вхідний сигнал відповідно до формули (4.5) можна подати в такий спосіб:

$$x(n) = \beta \sum_{m=k}^{n-1} \alpha^{n-m-1} u(m).$$

□

4.3 Передавальна функція

В усіх розглянутих вище прикладах, вагова і перехідна функції ЛС залежали лише від різниці аргументів:

$$h(n,m) = h(n-m), \qquad g(n,m) = g(n-m).$$

ЛС, що мають таку властивість, називаються ***стаціонарними***. Для стаціонарної системи відгук на вхідний сигнал за допомогою вагової функції зручно записати таким чином:

$$\begin{aligned} x(n) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} g(n,m)u(m) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} g(n-m)u(m) = \\ &=< s = n-m >= \sum_{s=-\infty}^{\infty} g(s)u(n-s), \end{aligned} \tag{4.8}$$

причому, для фізично здійсненної ЛС ця формула набуває вигляду:

$$x(n) = \sum_{s=0}^{\infty} g(s)u(n-s), \;\; s \geq 0.$$

Подамо на вхід стаціонарної фізично здійсненної ЛС показникову функцію $u(m) = e^{qm}$:

$$x(n) = \sum_{s=0}^{\infty} g(s)e^{q(n-s)} = e^{qn} \sum_{s=0}^{\infty} g(s)e^{-qs}.$$

Коротко це можна записати так:

$$x(n) = e^{qn}G^*(q),$$

де

$$G^*q) = \sum_{s=0}^{\infty} g(s)e^{-sq}$$

— дискретне перетворення Лапласа вагової функції, яке називається ***передавальною функцією*** дискретної системи. Таким чином, передавальна функция — реакція стаціонарної ЛС на гратчасту показникову функцію $u(m) = e^{qm}$. Якщо позначити $x(n) \leftarrow\!\div X^*(q)$, $u(n) \leftarrow\!\div U^*(q)$ і врахувати, що $g(n+k) = 0,\;\; k \geq 0$, то за теоремою про згортку з рівності (4.8) дістанемо

$$X^*(q) = G^*(q)U^*(q). \tag{4.9}$$

Припустимо, що ЛС задана скінченно-різницевим рівнянням

$$\sum_{r=0}^{k} a_r x(n+r) = \sum_{m=0}^{l} b_m u(n+m).$$

Застосуємо до нього дискретне перетворення Лапласа:

$$\sum_{r=0}^{k} a_r e^{rq} X^*(q) = \sum_{m=0}^{l} b_m e^{mq} U^*(q),$$

або

$$X^*(q) = \frac{\varphi^*(q)}{\psi^*(q)} U^*(q), \tag{4.10}$$

де $\varphi^*(q) = \sum\limits_{m=0}^{l} b_m e^{mq}$, $\psi^*(q) = \sum\limits_{r=0}^{k} a_r e^{rq}$. Порівнюючи вирази (4.9) і (4.10), доходимо до висновку, що

$$G^*(q) = \frac{\varphi^*(q)}{\psi^*(q)}.$$

Отриманий вираз показує, що для даної ЛС передавальна функція є дрібно-раціональною функцією. Якщо зображення вхідного сигналу також задане дрібно-раціональною функцією, то з рівності (4.9) випливає, що і зображення вихідного сигналу в цьому випадку є дрібно-раціональною функцією. Таким чином, вихідний сигнал-оригінал завжди може бути знайдений аналітично при використанні відповідних теорем операційного числення і таблиці «оригінал-зображення».

Приклад 4.3. *Знайти передавальну функцію дискретної системи «імпульсний елемент – аперіодична ланка», що моделюється рівнянням*

$$x(n+1) - \alpha x(n) = \beta u(n).$$

Розв'язання. Розв'язання прикладу 3.2 дало формулу (3.5), яка при порівнянні з рівністю (4.10) показує, що передавальна функція дискретної системи «імпульсний елемент – аперіодична ланка» виражається формулою

$$G^*(q) = \frac{\beta}{e^q - \alpha}.$$

□

Додаток А Таблиці

А.1 Властивості D-перетворення

Вважається, що $f(n) \leftarrow\!\!\div F^*(q),\ f_j(n) \leftarrow\!\!\div F_j^*(q)$	
1. Лінійність	$\sum\limits_{i=1}^{m} C_i f_i(n) \leftarrow\!\!\div \sum\limits_{i=1}^{m} C_i F_i^*(q)$
2. Зсув	$e^{\alpha n} f(n) \leftarrow\!\!\div F^*(q-\alpha).$
3. Загаювання	$f(n-k) \leftarrow\!\!\div e^{-kq} F^*(q)$
4. Випередження	$f(n+k) \leftarrow\!\!\div e^{kq}\left[F^*(q) - \sum\limits_{i=0}^{k-1} f(i) e^{-iq}\right]$
5. Похідна	$(-1)^k n^k f(n) \leftarrow\!\!\div [F^*(q)]^{(k)}$
6. Згортка	$f_1(n) * f_2(n) = \sum\limits_{i=0}^{n} f_1(i) f_2(n-i) \leftarrow\!\!\div F_1^*(q) F_2^*(q)$
7. Сума	$\sum\limits_{i=0}^{n-1} f(i) \leftarrow\!\!\div \dfrac{F^*(q)}{e^q - 1}$

А.2 Таблиця «оригінал-зображення»

Оригінал $f(n)$	Зображення $F^*(q)$
$\sigma(n) = \begin{cases} 1, & n = 0; \\ 0, & n \neq 0. \end{cases}$	1
$\mathbb{1}(n) = \begin{cases} 1, & n \geq 0; \\ 0, & n < 0. \end{cases}$	$\dfrac{e^q}{e^q - 1}$
a^n	$\dfrac{e^q}{e^q - a}$
$e^{\alpha n}$	$\dfrac{e^q}{e^q - e^\alpha}$
n	$\dfrac{e^q}{(e^q - 1)^2}$
n^2	$\dfrac{e^q(e^q + 1)}{(e^q - 1)^3}$
$\sin \beta n$	$\dfrac{e^q \sin \beta}{e^{2q} - 2e^q \cos \beta + 1}$
$\cos \beta n$	$\dfrac{e^q(e^q - \cos \beta)}{e^{2q} - 2e^q \cos \beta + 1}$
$\operatorname{sh} \beta n$	$\dfrac{e^q \operatorname{sh} \beta}{e^{2q} - 2e^q \operatorname{ch} \beta + 1}$
$\operatorname{ch} \beta n$	$\dfrac{e^q(e^q - \operatorname{ch} \beta)}{e^{2q} - 2e^q \operatorname{ch} \beta + 1}$
C_n^k	$\dfrac{e^q}{(e^q - 1)^{k+1}}$
$C_n^k e^{\alpha n}$	$\dfrac{e^{q+k\alpha}}{(e^q - e^\alpha)^{k+1}}$
$C_n^k a^n$	$\dfrac{a^k e^q}{(e^q - a)^{k+1}}$

Література

[1] Мартыненко В.С. Операционное исчисление. — Киев: Выща школа, 1990.

[2] Фудзисава Т., Касами Т. Математика для радиоинженеров. Теория дискретных структур. — М.: Радио и связь, 1984.

[3] Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости. — М.: Наука, 1981.

[4] Сборник задач по математике для втузов. Специальные разделы математического анализа/ Под ред. А.В. Ефимова, Б.П. Демидовича. — М.: Наука, 1981.

[5] Основы автоматического управления/ Под ред. В.С. Пугачева. — М.: Наука, 1974.

Волченко Юрій Михайлович

Методичні рекомендації з дисципліни
«Вища математика»
«Дискретне перетворення Лапласа та його застосування»

Технічні редактори Навальнєва О.В., Григор'єва Л.В.
Підписано до друку
Формат 60*84/16 Бум.кн.журн.
Друк ксероксний
Вид. № 1 Замовлення № 10k Наклад 75 прим.

Донецький інститут залізничного транспорту
83018 м. Донецьк, вул. Горна, 6