Дифференциальные уравнения первого порядка I

Волченко Ю.М.

Содержание лекции

Дифференциальные уравнения первого порядка. Задача Коши. Теорема о существовании и единственности решения задачи Коши. Понятие об особых решениях дифференциальных уравнений. Уравнения с разделяющимися переменными. Особые решения. Огибающая. Однородные уравнения.

Анимация процессов в RC-контуре.
Анимация работает только в программе Acrobat Reader!

Аналитическое и численное решение дифференциальных уравнений 1-го порядка в системе *Mathematica*. Построение графиков решений.

28 ноября 2009 г.

1 Основные понятия

Дифференциальные уравнения — компактный и эффективный способ записи математических моделей во многих областях науки и техники. Их решения могут принимать вид не только конкретных математических объектов, но и целых классов таких объектов. Это дает возможность изучать поведение систем, которые моделируются дифференциальными уравнениями, в целом диапазоне параметров и, таким образом, предвидеть разнообразные последствия их поведения. Поэтому используются дифференциальные уравнения не только в технических науках, но и в экономике, социологии, психологии и др.

Пример 1. *В так называемом RC-контуре в начальный момент времени $t = 0$ напряжения нет, а потом начинает подаваться постоянное напряжение U. Конденсатор емкостью C заряжается через сопротивление R. Найти закон накопления заряда в конденсаторе, напряжение в нем и ток в контуре для произвольного момента времени $t > 0$.*

Решение. Из физики известно, что входное напряжение U складывается из падений напряжения на сопротивлении R и на емкости C. Напряжение на пассивном сопротивлении по закону Ома равно $u_R = Ri$, где i — ток в контуре, а падение напряжения

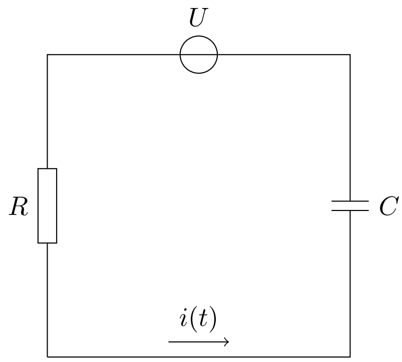


Рис. 1. RC-контур.

на конденсаторе пропорционально его заряду q и обратно пропорционально емкости конденсатора: $u_C = q/C$. Таким образом, приходим к равенству

$$Ri + \frac{q}{C} = U.$$

Поскольку ток есть изменение заряда в единицу времени, а такое изменение в математике является производной, то $i = dq/dt$ и это равенство можно переписать так:

$$R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = U. \tag{1}$$

В этом уравнении C, R и U известны, а неизвестным является заряд $q(t)$. Следовательно, имеем уравнение, в котором неизвестным является функция, причем, в уравнение входит и ее производная. Такой тип уравнений и будет изучаться далее. $\square$

Дифференциальным уравнением называется уравнение, в котором неизвестным является функция и которая входит в уравнение вместе со своими производными (хотя бы с одной). ***Порядком*** дифференциального уравнения называется порядок старшей производной неизвестной функции, которая входит в уравнение. ***Решением*** дифференциального уравнения называется любая функция, которая после подстановки ее в дифференциальное уравнение вместо неизвестной функции превращает его в тождество. Если неизвестная функция зависит от нескольких аргументов, дифференциальное уравнение называется ***уравнением в частных производных***. Если неизвестная функция зависит лишь от одного аргумента, уравнение называется ***обыкновенным дифференциальным уравнением***. Пока мы будем рассматривать только обыкновенные дифференциальные уравнения, поэтому слово «обыкновенные» будет опускаться. Таким образом, уравнение (1) является дифференциальным уравнением первого порядка. График решения дифференциального уравнения называется ***интегральной кривой***.

В общем случае дифференциальное уравнение 1-го порядка имеет вид

$$F(x, y, y') = 0, \tag{2}$$

где $y(x)$ — неизвестная функция.

Еще одна форма дифференциального уравнения 1-го порядка,

$$y' = f(x, y), \tag{3}$$

называется ***уравнением, разрешенным относительно производной***.

Важная особенность дифференциальных уравнений — как правило, бесчисленное множество решений. Например, уравнение $y' = f(x)$, которое изучалось в интегральном исчислении, имеет решение

$$y(x) = \int\limits_{x_0}^{x} f(x)\,dx + C,$$

которое на самом деле из-за наличия произвольной постоянной C представляет собой целое семейство решений. Выделить единственную функцию из семейства решений можно, указав начальное условие, которое задает значение неизвестной функции для некоторого значения аргумента:

$$y(x_0) = y_0. \tag{4}$$

Задачей Коши называется решение дифференциального уравнения (2) или дифференциального уравнения (3) для заданного начального условия (4).

Теорема 1 (О существовании и единственности решения задачи Коши для дифференциального уравнения (3)). *Если правая часть f уравнения и ее производная f'_y непрерывны в некоторой области D на плоскости xOy, в которой находится точка (x_0, y_0), то существует единственное решение задачи Коши.*

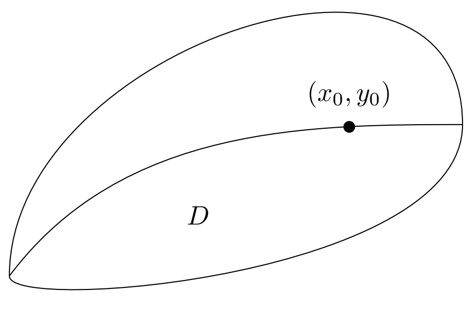


Рис. 2. К теореме существования и единственности

Если условия приведенной теоремы выполнены, это означает, что через точку (x_0, y_0) области D проходит единственная интегральная кривая дифференциального уравнения (см. рис. 2).

Мы видим, что при выполнении условий теоремы можно получить либо бесконечное множество решений дифференциального уравнения, либо только одно из них, если заданы начальные условия. Это позволяет классифицировать решения следующим образом. Пусть C – произвольная постоянная. ***Общим решением*** дифференциального уравнения называется функция $y = \varphi(x, C)$, которая является решением уравнения для любых значений C, и для любого начального условия найдется такое значение $C = C_0$, что это начальное условие будет выполнено: $y_0 = \varphi(x_0, C_0)$.

Иногда решение дифференциального уравнения первого порядка приводит к алгебраическому уравнению вида

$$\Phi(x, y, C) = 0, \tag{5}$$

из которого невозможно выразить x через y, или наоборот. Такое решение, которое определяет $y(x)$ как неявную функцию, называется ***общим интегралом*** дифференциального уравнения (5). ***Частным решением (интегралом)*** дифференциального уравнения называется его общее решение (интеграл) для конкретного значения произвольной постоянной C. Часто вместо «найти решение дифференциального уравнения» говорят «проинтегрировать дифференциальное уравнение».

2 Уравнения с разделяющимися переменными

Эти уравнения 1-го порядка записывают или с помощью дифференциалов:

$$p(x)q(y)\,dx + r(x)s(y)\,dy = 0,$$

или с помощью производной:

$$\frac{dy}{dx} = \alpha(x)\beta(y).$$

Характерной особенностью последнего уравнения является то, что его правая часть представляет собой произведение двух функций, одна из которых зависит лишь от x, а вторая – лишь от y. Для решения уравнения с разделяющимися переменными умножим обе части уравнения на множитель $dx/\beta(y)$:

$$\frac{dy}{dx} = \alpha(x)\beta(y) \left| \cdot \frac{dx}{\beta(y)} \right. .$$

Получим

$$\boxed{\frac{dy}{\beta(y)} = \alpha(x)\,dx.} \tag{6}$$

Видим, что разные переменные оказались в разных частях уравнения. Такое уравнение называется дифференциальным уравнением ***с разделенными переменными***. Его можно записать в такой форме:

$$\int \frac{dy}{\beta(y)} = \int \alpha(x)\,dx. \tag{7}$$

Действительно, если взять производную от обеих частей последнего равенства, получим, что

$$\left(\int \frac{y'(x)\,dx}{\beta[y(x)]}\right)'_x = \left(\int \alpha(x)\,dx\right)'_x, \quad \frac{y'}{\beta(y)} = \alpha(x), \tag{8}$$

а это и есть уравнение (6).

Пусть интегралы в уравнении (7) берутся в аналитическом виде, и их первообразные являются функциями $\rho(y)$ для левой части и $\sigma(x)$ для правой части. Тогда из этого уравнения следует равенство

$$\rho(y) + C_1 = \sigma(x) + C_2.$$

Обозначим $C = C_2 - C_1$ и перепишем равенство в виде

$$\rho(y) = \sigma(x) + C. \tag{9}$$

На этом решение дифференциального уравнения с разделяющимися переменными будем считать законченным, уравнение (9) является его общим интегралом. Если удастся решить последнее уравнение относительно y или x, то можно будет записать и общее решение дифференциального уравнения в виде функции $y = \varphi(x, C)$ или $x = \psi(y, C)$.

Пример 2 (Заряд конденсатора. Продолжение примера 1). *Найти решение уравнения* (1).

Решение. Нетрудно видеть, что уравнение (1) является дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными вида (6), если его переписать таким образом:

$$R\frac{dq}{dt} = U - \frac{q}{C}, \quad \frac{dq}{dt} = \frac{CU - q}{RC}.$$

Отделим переменные, разделив на $q - CU$ и умножив на dt:

$$\frac{dq}{q - CU} = -\frac{dt}{RC}.$$

Обозначим $\alpha = 1/(RC)$ коэффициент затухания RC-контура и возьмем интегралы от обеих частей равенства:

$$\int \frac{dq}{q - CU} = -\int \alpha\,dt, \quad \ln|q - CU| = -\alpha t + \ln|d|,$$

где d – произвольная постоянная. Последнее уравнение преобразуем, используя свойства логарифма:

$$\ln|q - CU| = \ln|de^{-\alpha t}|,$$

откуда находим искомый закон накопления заряда на конденсаторе:

$$q(t) = CU + de^{-\alpha t}. \tag{10}$$

Одновременно эта функция является общим решением уравнения (1).

Найдем также частное решение этого уравнения, используя начальное условие, которое заключается в том, что в момент времени $t = 0$ конденсатор не был заряжен:

$$q(0) = 0,$$

то есть решим задачу Коши. Для этого правую часть формулы (10) приравняем к нулю, взяв в ней $t = 0$:

$$CU + d = 0,$$

откуда найдем соответствующее значение произвольной постоянной d:

$$d = -CU.$$

Подставляя найденное значение в выражение (10), получим искомое решение:

$$q(t) = CU(1 - e^{-\alpha t}).$$

Поскольку $i = dq/dt$, то дифференцирование последнего равенства дает формулу для изменения тока в контуре:

$$i = \frac{dq}{dt} = CU\alpha e^{-\alpha t} = \frac{CU}{RC}\,e^{-\alpha t},$$

$$i(t) = \frac{U}{R}\,e^{-\alpha t}.$$

Напряжение на конденсаторе равно

$$u_C(t) = \frac{q}{C} = U(1 - e^{-\alpha t}).$$

Из полученных функций мы видим, что заряд конденсатора и напряжение на нем растут, но ограничены величинами CU и U, соответственно, а ток стремится к нулю, когда $t \to \infty$. Эти процессы продолжаются неограниченно долго. Считают, что переходный процесс практически закончился, если ток уменьшился в 10 раз по сравнению с его максимальным значением U/R, а напряжение на емкости выросло до $0{,}9U$.

Анимация рис. 3 более детально демонстрирует влияние параметров R и C на ток в контуре и напряжение на конденсаторе. В прямом времени медиаплейера параметры R и C увеличиваются, в обратном – уменьшаются.

3 Особые решения. Огибающая

Решение дифференциального уравнения (3) называется ***особым***, если в каждой точке соответствующей интегральной кривой нарушается условие теоремы о существовании и единственности решения задачи Коши. Особое решение

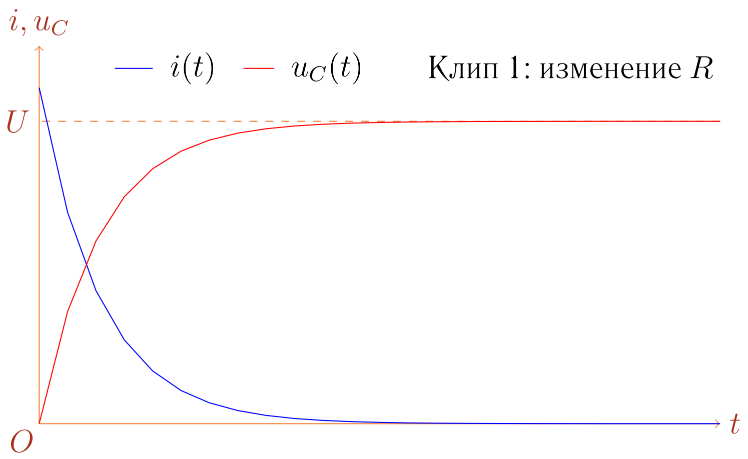


Рис. 3. Процессы в RC-контуре

не может быть получено из общего решения. Часто особым решением оказывается так называемая ***огибающая***, то есть кривая, которая касается в каждой своей точке какой-либо интегральной кривой заданного дифференциального уравнения, но не совпадает ни с одной из них.

Пример 3. *Решить дифференциальное уравнение* $y' = 3y^{2/3}$.

Решение. Решим заданное уравнение разделением переменных:

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{dy}{y^{2/3}} = dx, \quad y^{1/3} = x + C, \quad y = (x+C)^3.$$

Геометрически общее решение имеет вид семейства кубических парабол (см. рис. 4):

Однако есть еще одно решение $y = 0$ (проверяется подстановкой в уравнение), которое не получается из общего решения ни при каком значении произвольной постоянной C. В каждой точке этого решения нарушается условие теоремы о существовании и единственности решения задачи Коши, именно $f_y{}' = 2y^{-1/3}$ не существует при $y = 0$. Следовательно, решение $y = 0$ является особым решением заданного уравнения. Соответствующая интегральная кривая является огибающей общего решения.

4 Однородные уравнения

Функция $f(x, y)$ называется ***однородной m-го порядка***, если она удовлетворяет условию

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^m f(x, y).$$

Дифференциальное уравнение первого порядка называется ***однородным***, если оно имеет вид

$$a(x, y)\, dx + b(x, y)\, dy = 0,$$

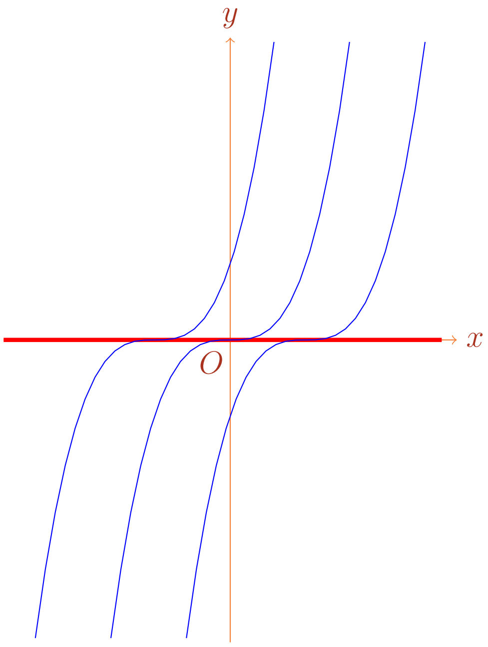


Рис. 4. Огибающая

где $a(x,y)$, $b(x,y)$— однородные функции одного порядка, или имеет вид

$$y'(x) = f(x,y), \tag{11}$$

где $f(x,y)$ — однородная функция первого порядка.

Рассмотрим решение последнего уравнения. Сделаем замену:

$$\boxed{y(x) = xu(x),} \tag{12}$$

где $u(x)$ — новая неизвестная функция, и подставим это выражение вместо $y(x)$, а вместо $y'(x)$ — производную этого выражения, $y'(x) = u(x) + xu'(x)$, в уравнение (11):

$$u + xu' = f(x, xu).$$

Так как функция $f(x,y)$ однородная первого порядка, то уравнение упрощается следующим образом:

$$u + xu' = f(1,u).$$

Дальнейшие преобразования показывают, что это уравнение является уравнением с разделяющимися переменными:

$$u' = \frac{f(1,u) - u}{x}.$$

Если удастся отыскать его общее решение $u(x) = \varphi(x,C)$ методами, которые были рассмотрены раньше, останется подставить это решение в формулу (12) для получения общего решение однородного уравнения (11):

$$y(x) = x\varphi(x, C).$$

Пример 4. *Решить уравнение* $(x + y)\,dx + x\,dy = 0$.

Решение. Функции $a(x, y) = x + y$ и $b(x, y) = x$ обладают свойством:

$$a(\lambda x, \lambda y) = \lambda x + \lambda y = \lambda(x + y) = \lambda a(x, y), \quad b(\lambda x, \lambda y) = \lambda x = \lambda b(x, y),$$

следовательно, являются однородными функциями одного, первого, порядка. Значит, заданное уравнение является однородным уравнением. Сделаем замену

$$y(x) = xu(x), \quad dy = [u(x) + xu'(x)]\,dx,$$

которую подставим в заданное уравнение:

$$(x + xu)\,dx + x(u + xu')\,dx = 0, \quad x + 2xu + x^2u' = 0.$$

Отметим, что $x = 0$ является решением заданного уравнения и, предполагая теперь, что $x \neq 0$, разделим на него обе части последнего уравнения:

$$1 + 2u + xu' = 0, \quad x\,\frac{du}{dx} = -1 - 2u.$$

Получили уравнение с разделяющимися переменными. Разделим переменные и решим уравнение:

$$\frac{du}{2u + 1} = -\frac{dx}{x}, \quad \frac{1}{2}\ln|1 + 2u| = -\ln|x| + \ln|C|, \quad 1 + 2u = \frac{C}{x^2}.$$

Возвращаемся к функции $y(x)$, делая обратную замену $u(x) = y(x)/x$:

$$1 + 2\,\frac{y}{x} = \frac{C}{x^2}, \quad x^2 + 2xy = C.$$

Последнее равенство является общим интегралом заданного уравнения. Его можно превратить в общее решение и окончательное решение записать в виде:

$$\begin{cases} y = \frac{C - x^2}{2x}, \ x \neq 0; \\ x = 0. \end{cases}$$

□

В Приложении показано применение системы *Mathematica* к решению обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка.

Приложение

Система *Mathematica* способна решать обыкновенные дифференциальные уравнения с помощью операторов DSolve и NDSolve. Первая из этих команд в простейшем случае имеет формат DSolve[eqn,y,x], где eqn — дифференциальное уравнение, которое надо решить относительно неизвестной функции y, зависящей от аргумента x.

Например, общее решение уравнения $y' + y = \sin x$ *Mathematica* находит следующим образом:

```
DSolve[y'[x] + y[x] == Sin[x],y[x],x]
```

$$\{\{y[x] \to e^{-x}C[1] + \frac{1}{2}(-Cos[x] + Sin[x])\}\}$$

Произвольная постоянная имеет вид C[1], потому что, как мы увидим на следующих лекциях, каков порядок дифференциального уравнения, столько и произвольных постоянных будет в решении. Поэтому обычно произвольные постоянные, входящие в решение, нумеруются.

Если нас не устраивает обозначение C[1], можно задать свое собственное с помощью указания GeneratedParameters → name, где name — подходящее для нас обозначение. Например, обозначим произвольную постоянную буквой d:

```
DSolve[y'[x] + y[x] == Sin[x],y[x],x,GeneratedParameters → d]
```

$$\{\{y[x] \to e^{-x}d[1] + \frac{1}{2}(-Cos[x] + Sin[x])\}\}$$

В системе *Mathematica* предусмотрена и возможность установить более привычную для нас нумерацию произвольных постоянных с помощью нижнего индекса:

```
DSolve[y'[x]+y[x] == Sin[x],y[x],x,GeneratedParameters → (Subscript[d,#]&)]
```

$$\{\{y[x] \to e^{-x}d_1 + \frac{1}{2}(-Cos[x] + Sin[x])\}\}$$

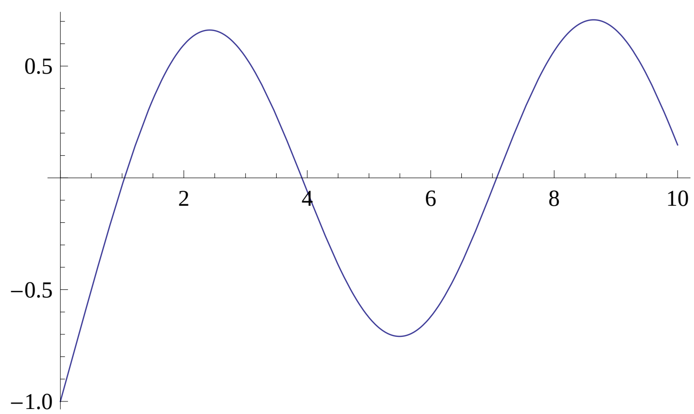
Чтобы получить частное решение дифференциального уравнения, надо добавить к уравнению начальное условие. Например, для решения предыдущего уравнения при начальном условии $y(0) = -1$, надо выполнить следующий оператор:

```
DSolve[{y'[x] + y[x] == Sin[x], y[0] == -1},y[x],x]
```

$$\{\{y[x] \to -\frac{1}{2}e^{-x}(1 + e^{x}Cos[x] - e^{x}Sin[x])\}\}$$

Можно сразу же построить график решения, т.е. интегральную кривую данного уравнения:

```
Plot[y[x] /.%, {x,0,10}]
```



Если же решение дифференциального уравнения необходимо для каких-то других целей, то его надо извлечь из ответа, выдаваемого системой *Mathematica*. Делается это так:

```
DSolve[{y'[x] + y[x] == Sin[x], y[0] == -1},y[x],x]
y[x_] = y[x] /. %[[1]]
```

$$-\frac{1}{2}e^{-x}(1 + e^{x}\mathrm{Cos}[x] - e^{x}\mathrm{Sin}[x])$$

Теперь с ним можно работать. Например, при $x = 1$ найти его точное и приближенное значения:

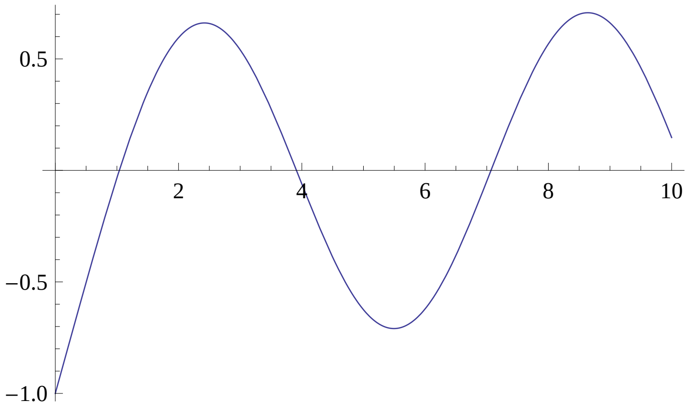
```
y[1]
```

$$-\frac{1 + e\,\mathrm{Cos}[1] - e\,\mathrm{Sin}[1]}{2e}$$

```
y[1]//N
-0.0333554
```

или опять-таки построить график:

```
Plot[y[x],{x,0,10}]
```



Система *Mathematica* справляется и с нечисловыми коэффициентами в записи уравнения. Решим, например, уравнение, рассмотренное в первом примере лекции:

```
DSolve[R q'[t] + q[t]/C == U,q[t],t,GeneratedParameters → d]
```

$$\{\{q[t] \to CU + e^{-\frac{t}{CR}}d[1]\}\}$$

Второй пример из лекции:

```
Factor[DSolve[y'[x] == 3 (y[x])^(2/3),y[x],x]]
```

$$\{\{y[x] \to \frac{1}{27}(3\ x + C[1])^{3}\}\}$$

Ответ совпадет с полученным на лекции, если множитель $1/27$ внести под знак куба, а произвольную постоянную представить в виде $C = C[1]/3$. Оператор `Factor` понадобился для того, чтобы придать ответу более компактную форму.

Еще один лекционный пример:

```
DSolve[x + y[x] + x y'[x] == 0,y[x],x]
```

$$\left\{\left\{y[x] \to -\frac{x}{2} + \frac{C[1]}{x}\right\}\right\}$$

Однако даже *Mathematica* не в состоянии решить то, что вообще нельзя решить. Например, если решение дифференциального уравнения сводится к взятию «неберущегося» интеграла. Вот пример:

```
DSolve[y'[x] == Sin[x]/x, y[x], x]
{{y[x] → C[1] + SinIntegral[x]}}
```

Полученное сообщение означает, что решение дифференциального уравнения выражается с помощью интеграла, который *Mathematica* называет `SinIntegral[x]`, а в математике он называется интегральным синусом и имеет следующий вид:

$$\operatorname{Si} x = \int\limits_0^x \frac{\sin t}{t}\, dt.$$

Известно, что этот интеграл нельзя представить в виде какой-либо элементарной функции.

Однако невозможность решить задачу аналитически не означает, что не существует какого-либо приближенного ее решения. Система *Mathematica* снабжена множеством вычислительных методов, которые позволяют получить численное решение дифференциального уравнения. При этом, конечно, уже никакие буквенные параметры в уравнение входить не должны, а задание начальных условий становится обязательным. Например, для решения предыдущего уравнения вместо `DSolve` можно применить оператор `NDSolve[eqns,y,{x,x`$_{\min}$`,x`$_{\max}$`}]`, в котором `eqns` означает дифференциальное уравнение вместе с соответствующими начальными условиями, `y` — неизвестную функцию, `x` — ее аргумент, $\mathtt{x}_{\min}$, $\mathtt{x}_{\max}$ — диапазон изменения аргумента.

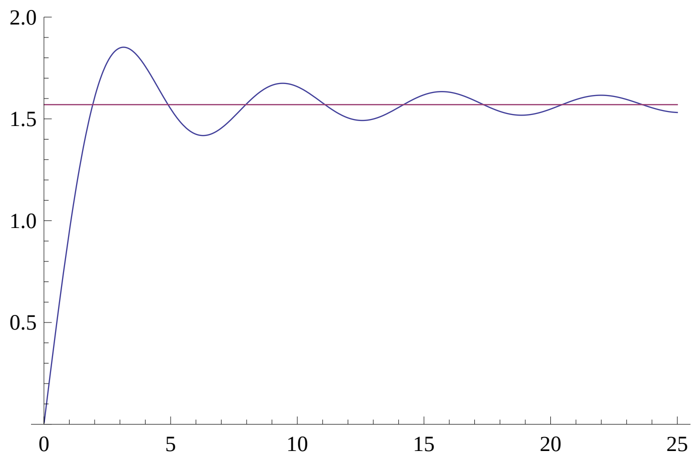
Вот что у нас получится:

```
NDSolve[{y'[x] == Sin[x]/x, y[0.01] == 0.01}, y[x], {x, 0.01, 25}]
{{y[x] → InterpolatingFunction[{{0.01,25.}},<>][x]}}
```

Начальное условие задано не в точке $(0;0)$, а в достаточно близкой к ней точке $(0.01;0.01)$, так как в начале координат правая часть уравнения имеет особенность, на которую *Mathematica*, конечно, укажет, но уравнение решать не станет.

Ответ, представленный системой *Mathematica*, означает, что решение получено в виде аппроксимирующей функции, значения которой вычисляются с помощью интерполяции. Мы не будем вдаваться в подробности использования этой функции, поскольку она нам понадобится только для графической иллюстрации решения:

```
Plot[Evaluate[y[x] /. %, 1.57], {x, 0.01, 25}, PlotRange → {0, 2}]
```



Литература

[1] Бугров Я.С., Никольский С.М. *Высшая математика. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного.* – М.: Наука, 1985, – с. 9-28, 50-53.

[2] Письменный Д.Т. *Конспект лекций по высшей математике.* – М.: Рольф, 2000. Ч. 2. – с. 9–17.

[3] Федорюк М.В. *Обыкновенные дифференциальные уравнения.* – М.: Наука, 1985, – с. 7–21.