

Дифференциальные уравнения первого порядка II

Волченко Ю.М.

Содержание лекции

Дифференциальные уравнения первого порядка. Линейные уравнения. Уравнения Бернулли и Риккати.

Анимация процессов в RL -контуре для различных входных сигналов.

Анимация работает только в программе Acrobat Reader!

Решение в системе *Mathematica* дифференциальных уравнений рассмотренных на лекции типов.

28 ноября 2009 г.

1 Линейные уравнения

Линейным дифференциальным уравнением **1-го порядка** называется уравнение вида

$$y' + p(x)y = q(x), \quad (1)$$

в котором $p(x)$, $q(x)$ — известные функции, а $y(x)$ — неизвестная. Произведем в этом уравнении замену

$$y(x) = u(x)v(x), \quad (2)$$

причем, тогда $y' = u'v + uv'$, а затем подставим эти выражения вместо y и y' , соответственно, в заданное уравнение:

$$u'v + \underbrace{uv' + puv}_{u(v' + pv)} = q.$$

Из выделенных фигурной скобкой слагаемых вынесем за скобки функцию u :

$$u'v + u(v' + pv) = q.$$

Подберем функцию v так, чтобы выражение в скобках стало нулем; в результате уравнение превратится в систему уравнений вида

$$\begin{cases} v' = -pv, \\ u'v = q. \end{cases}$$

Сначала решают первое уравнение, которое является уравнением с разделяющимися переменными, причем, произвольную постоянную, которая появляется в процессе решения, заменяют каким-нибудь числом, которое бы упрощало дальнейшее решение. Найденную таким образом функцию $v(x)$ подставляют во второе уравнение, которое тоже становится уравнением с разделяющимися переменными, решают (произвольную постоянную уже не конкретизируют) и получают функцию $u(x)$.

Остается подставить найденные функции в формулу (2) для получения общего решения линейного уравнения (1).

Пример 1. Для электрического контура, показанного на рис. 1, найти зависимость тока i от параметров контура, сопротивления R и индуктивности L .

Решение. Входное напряжение $u(t)$ состоит из падений напряжения на сопротивлении R и на индуктивности L . Напряжение на пассивном сопротивлении по закону Ома равно $u_R = Ri$, а падение напряжения на индуктивности пропорционально величине индуктивности и скорости изменения тока: $u_L = L di/dt$. Таким образом, получаем уравнение

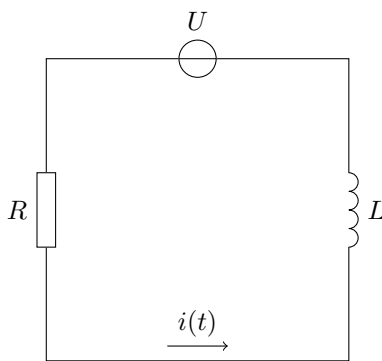


Рис. 1. RL -контур

$$L \frac{di}{dt} + Ri = u, \quad (3)$$

которое является линейным дифференциальным уравнением 1-го порядка. Сделаем замену

$$i(t) = a(t)b(t), \quad (4)$$

где $a(t)$, $b(t)$ — новые неизвестные функции. Это выражение и выражение для производной $i' = a'b + ab'$ подставим в уравнение (3):

$$L(a'b + ab') + Rab = u, \quad La'b + \underbrace{Lab' + Rab}_{= u} = u.$$

Вынесем из выделенных фигурной скобкой слагаемых за скобки a :

$$La'b + a(Lb' + Rb) = u,$$

и подберем такую функцию b , чтобы в скобках получить ноль; приходим к системе из двух уравнений

$$\begin{cases} Lb' = -Rb, \\ La'b = u. \end{cases} \quad (5)$$

Решим сначала первое из них, представив его в виде:

$$\frac{db}{dt} = -\frac{Rb}{L}.$$

Разделим переменные, умножив обе части уравнения на dt и разделив на b :

$$\frac{db}{b} = -\frac{R dt}{L},$$

затем проинтегрируем полученное равенство:

$$\ln |b| = -\frac{Rt}{L} + \ln |m|, \quad \ln |b| = \ln |me^{-Rt/L}|,$$

и найдем, что

$$b = me^{-Rt/L}.$$

Примем, что константа m равна 1 и используем полученное решение в виде:

$$b = e^{-Rt/L}.$$

Теперь подставим это выражение во второе уравнение системы (5) и получим еще одно уравнение с разделяющимися переменными:

$$La'e^{-Rt/L} = u, \quad L \frac{da}{dt} = ue^{Rt/L}, \quad da = \frac{1}{L} ue^{Rt/L} dt.$$

Проинтегрировать его до конца не удастся, так как функция $u(t)$ пока не задана. После интегрирования получится вот что:

$$a = \frac{1}{L} \int ue^{Rt/L} dt.$$

Подставим полученные выражения вместо a и b в формулу (4):

$$i(t) = ab = \frac{1}{L} e^{-Rt/L} \int u(t)e^{Rt/L} dt. \quad (6)$$

Дальнейшее решение зависит от вида напряжения $u(t)$, которое подается в контур. Рассмотрим два случая.

1) Постоянное напряжение: $u(t) \equiv U = const.$

Интеграл (6) принимает вид

$$i(t) = \frac{U}{L} e^{-Rt/L} \int e^{Rt/L} dt$$

и легко вычисляется:

$$i(t) = \frac{U}{L} e^{-Rt/L} \left(\frac{L}{R} e^{Rt/L} + s \right) = \frac{U}{R} + \frac{sU}{L} e^{-Rt/L}. \quad (7)$$

Из полученного общего решения уравнения (3) определим его частное решение, которое соответствует начальному условию

$$i(t_0) = i_0. \quad (8)$$

Для этого подставим в общее решение $t = t_0$ и приравняем полученное выражение к i_0 :

$$\frac{U}{R} + \frac{sU}{L} e^{-Rt_0/L} = i_0, \quad \frac{sU}{L} e^{-Rt_0/L} = i_0 - \frac{U}{R}.$$

Отсюда найдем s :

$$s = \frac{L}{U} \left(i_0 - \frac{U}{R} \right) e^{Rt_0/L}.$$

Подставим это значение в формулу (7) и найдем искомое частное решение дифференциального уравнения (3):

$$i(t) = \frac{U}{R} + \left(i_0 - \frac{U}{R} \right) e^{-R(t-t_0)/L}.$$

Если $t \rightarrow \infty$, то ток стремится к постоянной величине $i_\infty = U/R$, то есть все более точно выполняется обычный закон Ома.

Анимация рис. 2 демонстрирует поведение полученного решения при изменении параметров U , L и R . Анимация состоит из трех клипов, иллюстрирующих различные аспекты поведения процессов в контуре.

Рис. 2. Ток в RL -контуре, $u(t) = U \equiv \text{const}$.

2) Гармонические колебания: $u(t) = U \sin(\omega t + \varphi)$.

Теперь интеграл (6) становится таким:

$$i(t) = \frac{U}{L} e^{-Rt/L} \int \sin(\omega t + \varphi) e^{Rt/L} dt. \quad (9)$$

Для его вычисления выведем общие формулы интегралов от произведений синуса либо косинуса на экспоненту. Сначала рассмотрим интеграл с синусом:

$$\begin{aligned} I_s &= \int \sin(\omega t + \varphi) e^{bt} dt = \\ &= \left\langle \alpha = \sin(\omega t + \varphi), d\beta = e^{bt} dt, d\alpha = \omega \cos(\omega t + \varphi) dt, \beta = \frac{1}{b} e^{bt} \right\rangle = \\ &= \frac{1}{b} \sin(\omega t + \varphi) e^{bt} - \frac{\omega}{b} \int \cos(\omega t + \varphi) e^{bt} dt = \frac{1}{b} \sin(\omega t + \varphi) e^{bt} - \frac{\omega}{b} I_c, \end{aligned}$$

где $I_c = \int \cos(\omega t + \varphi) e^{bt} dt$. Полученный результат позволяет получить и интеграл с косинусом:

$$\begin{aligned} I_c &= \int \cos(\omega t + \varphi) e^{bt} dt = \int \sin\left(\frac{\pi}{2} - \omega t - \varphi\right) e^{bt} dt = \\ &= \frac{1}{b} \sin\left(\frac{\pi}{2} - \omega t - \varphi\right) e^{bt} + \frac{\omega}{b} \int \cos\left(\frac{\pi}{2} - \omega t - \varphi\right) e^{bt} dt = \frac{1}{b} \cos(\omega t + \varphi) + \frac{\omega}{b} I_s. \end{aligned}$$

Из двух последних уравнений составим систему

$$\begin{cases} I_s = \frac{1}{b} \sin(\omega t + \varphi) e^{bt} - \frac{\omega}{b} I_c, \\ I_c = \frac{1}{b} \cos(\omega t + \varphi) e^{bt} + \frac{\omega}{b} I_s, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \omega I_c + b I_s = \sin(\omega t + \varphi) e^{bt}, \\ -b I_c + \omega I_s = -\cos(\omega t + \varphi) e^{bt}. \end{cases}$$

Решим ее по правилу Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \omega & b \\ -b & \omega \end{vmatrix} = \omega^2 + b^2,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \sin(\omega t + \varphi) e^{bt} & b \\ -\cos(\omega t + \varphi) e^{bt} & \omega \end{vmatrix} = [\omega \sin(\omega t + \varphi) + b \cos(\omega t + \varphi)] e^{bt},$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \omega & \sin(\omega t + \varphi) e^{bt} \\ -b & -\cos(\omega t + \varphi) e^{bt} \end{vmatrix} = [b \sin(\omega t + \varphi) - \omega \cos(\omega t + \varphi)] e^{bt},$$

$$I_c = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \int \cos(\omega t + \varphi) e^{bt} dt = \frac{\omega \sin(\omega t + \varphi) + b \cos(\omega t + \varphi)}{\omega^2 + b^2} e^{bt} + C_1,$$

$$I_s = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \int \sin(\omega t + \varphi) e^{bt} dt = \frac{b \sin(\omega t + \varphi) - \omega \cos(\omega t + \varphi)}{\omega^2 + b^2} e^{bt} + C_2.$$

Используем интеграл I_s для получения решения по формуле (9):

$$\begin{aligned} i(t) &= \frac{U}{L} e^{-Rt/L} \left[\frac{\frac{R}{L} \sin(\omega t + \varphi) - \omega \cos(\omega t + \varphi)}{\omega^2 + (R/L)^2} e^{Rt/L} + C_2 \right] = \\ &= U \frac{R \sin(\omega t + \varphi) - \omega L \cos(\omega t + \varphi)}{(\omega L)^2 + R^2} + \frac{C_2 U}{L} e^{-Rt/L}. \end{aligned}$$

Обозначим

$$\cos \psi = \frac{R}{\sqrt{(\omega L)^2 + R^2}}, \quad \sin \psi = \frac{\omega L}{\sqrt{(\omega L)^2 + R^2}},$$

тогда результат можно записать компактнее:

$$i(t) = \frac{U}{\sqrt{(\omega L)^2 + R^2}} \sin(\omega t + \varphi - \psi) + \frac{C_2 U}{L} e^{-Rt/L}. \quad (10)$$

Используем начальное условие (8) для определения произвольной постоянной C_2 :

$$\begin{aligned} \frac{U}{\sqrt{(\omega L)^2 + R^2}} \sin(\omega t_0 + \varphi - \psi) + \frac{C_2 U}{L} e^{-Rt_0/L} &= i_0, \\ \frac{C_2 U}{L} &= \left[i_0 - \frac{U}{\sqrt{(\omega L)^2 + R^2}} \sin(\omega t_0 + \varphi - \psi) \right] e^{Rt_0/L}, \\ C_2 &= \frac{L}{U} \left[i_0 - \frac{U}{\sqrt{(\omega L)^2 + R^2}} \sin(\omega t_0 + \varphi - \psi) \right] e^{Rt_0/L}. \end{aligned}$$

Подставим это выражение вместо C_2 в уравнение (10):

$$\begin{aligned} i(t) &= \frac{U}{\sqrt{(\omega L)^2 + R^2}} \sin(\omega t + \varphi - \psi) + \\ &+ \left[i_0 - \frac{U}{\sqrt{(\omega L)^2 + R^2}} \sin(\omega t_0 + \varphi - \psi) \right] e^{-R(t-t_0)/L}. \end{aligned}$$

Это и есть искомое решение. Видим, что при $t \rightarrow \infty$ ток стремится к гармоническим колебаниям вида

$$i_\infty = \frac{U}{\sqrt{(\omega L)^2 + R^2}} \sin(\omega t + \varphi - \psi)$$

такой же частоты, что и входное напряжение, но с другой амплитудой и фазой.

На рис. 3 с помощью анимации показано поведение тока в контуре при изменении его параметров. Анимация состоит из пяти клипов.

2 Уравнение Бернулли

Уравнением Бернулли называется дифференциальное уравнение первого порядка вида

$$y'(x) + p(x)y = q(x)y^m, \quad m \in \mathbb{R}, \quad (11)$$

где $p(x)$, $q(x)$ — известные функции, $y(x)$ — неизвестная функция.

При $m = 0$ уравнение Бернулли становится линейным дифференциальным уравнением, а при $m = 1$ является уравнением с разделяющимися переменными. Эти случаи, как изученные ранее, мы рассматривать не будем.

Решить уравнение (11) можно, сделав такую же замену, как и при решении линейного дифференциального уравнения:

$$y(x) = u(x)v(x), \quad (12)$$

Рис. 3. Ток в RL -контуре, $u(t) = U \sin(\omega t + \varphi)$.

где $u(x)$, $v(x)$ – новые неизвестные функции. Продифференцировав равенство (12): $y' = u'v + uv'$, и подставив это выражение для y' и выражение (12) для y в формулу (11), получим новое уравнение:

$$u'v + uv' + puv = qu^m v^m, \quad m \neq 0, m \neq 1,$$

или

$$u'v + u(v' + pv) = qu^m v^m, \quad m \neq 0, m \neq 1. \quad (13)$$

Найдем какое-либо частное решение $v = \varphi(x)$ уравнения

$$v' + pv = 0$$

и подставим это решение в уравнение (13). Получим уравнение разделяющимися переменными с одной неизвестной функцией $u(x)$:

$$u' = qu^m \varphi^{m-1}, \quad m \neq 0, m \neq 1.$$

Как решается такое уравнение, было показано на предыдущей лекции. Обозначим его общее решение $v = \psi(x, C)$ и подставим обе найденные неизвестные функции в формулу (12): $y = \varphi(x)\psi(x, C)$. Эта функция и будет общим решением уравнения Бернулли (11).

Отметим, что при $t \in (0, 1)$ уравнение Бернулли имеет особое решение $y(x) \equiv 0$, так как производная правой части уравнения по y не является непрерывной по этому аргументу.

Пример 2. Найти общее решение уравнения Бернулли

$$y' = \frac{y}{x} + 2\sqrt{y}.$$

Решение. Сделаем замену $y(x) = u(x)v(x)$, $y' = u'v + uv'$, в результате которой заданное уравнение станет таким:

$$u'v + uv' = \frac{uv}{x} + 2\sqrt{uv},$$

или
$$u'v + u\left(v' - \frac{v}{x}\right) = 2\sqrt{uv}. \quad (14)$$

Найдем частное решение уравнения $v' - v/x = 0$. Разделяя переменные, получаем

$$\frac{dv}{v} = \frac{dx}{x}, \quad \ln|v| = \ln|x| + \ln|C|, \quad v = Cx.$$

Взяв $C = 1$, подставим функцию $v = x$ в уравнение (14). Приходим еще к одному уравнению с разделяющимися переменными:

$$u'x = 2\sqrt{ux}.$$

Упрощаем его, деля на \sqrt{x} (это возможно, так как правая часть заданного уравнения существует лишь при $x \neq 0$) и решаем, разделяя переменные:

$$u'\sqrt{x} = 2\sqrt{u}, \quad \frac{du}{dx} = 2\frac{\sqrt{u}}{\sqrt{x}}, \quad \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\frac{dx}{\sqrt{x}}, \quad \sqrt{u} = 2\sqrt{x} + C, \quad u = (2\sqrt{x} + C)^2.$$

Следовательно, общим решением заданного уравнения Бернулли будет функция

$$y = x(2\sqrt{x} + C)^2, \quad x > 0.$$

Имеется и особое решение. Его наличие объясняется тем, что частная производная по y правой части $f(x, y) = y/x + 2\sqrt{y}$ уравнения имеет вид $f'_y = 1/x + 1/\sqrt{y}$ и не является непрерывной функцией при $y = 0$. Это значит, что функция $y(x) \equiv 0$ является особым решением. Действительно, из заданного уравнения видно, что она является решением, а общее решение показывает, что она не получается из него ни при каких значениях произвольной постоянной C .

3 Уравнение Риккати

Одной из самых популярных задач теории автоматического управления является задача управления линейным объектом в условиях случайных возмущений по квадратическому критерию качества. Оптимальное управление таким

объектом выражается квадратичной формой от состояний объекта. Коэффициенты этой формы находят в результате решения матричного дифференциального уравнения, называемого матричным уравнением Риккати. Имея в виду важность этого уравнения для создания систем автоматизации, рассмотрим решение не матричного, а более простого уравнения Риккати, которое относится к изучаемым нами дифференциальным уравнениям первого порядка. Такое уравнение имеет следующий вид:

$$y' = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x), \quad (15)$$

где $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$ — известные функции, определенные и непрерывные в интервале (a, b) . При $P(x) \equiv 0$ уравнение (15) становится линейным, а при $R(x) \equiv 0$ превращается в уравнение Бернулли. Если P , Q и R — постоянные функции, уравнение (15) допускает разделение переменных. Поэтому эти варианты уравнения Риккати мы рассматривать не будем.

При переменных функциях $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$ уравнение Риккати интегрируется лишь в исключительных случаях. К изучению этих исключительных случаев мы и приступим.

1. Частный случай уравнения с разделяющимися переменными:

$$y' = \varphi(x)(ay^2 + by + c). \quad (16)$$

Здесь $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a^2 + c^2 \neq 0$. Переменные действительно разделяются:

$$\frac{dy}{ay^2 + by + c} = \varphi(x) dx.$$

2. Частный случай однородного уравнения:

$$y' = a\frac{y^2}{x^2} + b\frac{y}{x} + c,$$

где $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a^2 + c^2 \neq 0$.

Уравнение решается заменой, применяемой к решению однородных уравнений.

3. Уравнение вида

$$y' = a\frac{y^2}{x} + \frac{y}{2x} + c. \quad (17)$$

где $a, c \in \mathbb{R}$, $a^2 + c^2 \neq 0$.

Приводится к уравнению (16) с помощью замены $y = z\sqrt{x}$.

Действительно, так как $y' = z'\sqrt{x} + \frac{z}{2\sqrt{x}}$, то из уравнения (17) получим

$$\begin{aligned} z'\sqrt{x} + \frac{z}{2\sqrt{x}} &= a\frac{z^2x}{x} + \frac{z\sqrt{x}}{2x} + c, \\ z' + \frac{z}{2x} &= a\frac{z^2}{\sqrt{x}} + \frac{z}{2x} + \frac{c}{\sqrt{x}}, \\ z' &= \frac{1}{\sqrt{x}}(az^2 + c). \end{aligned}$$

Последнее уравнение имеет вид (16).

4. Уравнение вида

$$y' = Ay^2 + B\frac{y}{x} + \frac{C}{x^2},$$

где $A, B, C \in \mathbb{R}$.

Приводится к уравнению с разделяющимися переменными. Для этого делается замена $y = z/x$, $y' = z'/x - z/x^2$, в результате которой данное уравнение становится таким:

$$\frac{z'}{x} - \frac{z}{x^2} = A\frac{z^2}{x^2} + B\frac{z}{x^2} + \frac{C}{x^2}.$$

После приведения к общему знаменателю и умножения на x^2 , переменные разделяются:

$$\begin{aligned} z'x - z &= Az^2 + Bz + C, \quad z' = Az^2 + (B+1)z + C, \\ \frac{dz}{Az^2 + (B+1)z + C} &= dx. \end{aligned}$$

5. Приведение к уравнению Бернулли

Если известно какое-нибудь частное решение уравнения Риккати, то последнее можно привести к уравнению Бернулли. Действительно, пусть известно частное решение y_1 уравнения Риккати. Тогда выполнено тождество

$$y_1' \equiv P(x)y_1^2 + Q(x)y_1 + R(x). \quad (18)$$

Сделаем в уравнении (15) замену $y = y_1 + z$, где $z(x)$ — новая неизвестная функция. Уравнение Риккати примет вид:

$$y_1' + z' = P(x)y_1^2 + 2P(x)y_1z + P(x)z^2 + Q(x)y_1 + Q(x)z + R(x).$$

В силу тождества (18) полученное уравнение упрощается до уравнения Бернулли:

$$\begin{aligned} z' &= 2P(x)y_1z + P(x)z^2 + Q(x)z, \\ z' - [2P(x)y_1 + Q(x)]z &= P(x)z^2. \end{aligned}$$

Пример 3. Решить уравнение Риккати

$$y' = -y^2 + \frac{2}{x^2}. \quad (19)$$

Решение. Данное уравнение имеет частное решение $y_1 = -1/x$. Действительно, подставляя его в уравнение (19), приходим к тождеству

$$\frac{1}{x^2} = -\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^2}, \quad \frac{2}{x^2} = \frac{2}{x^2}.$$

Решение будем искать в виде $y = y_1 + z = -1/x + z$, $y' = 1/x^2 + z'$. Подставив правые части этих выражений вместо y и y' в заданное уравнение, получим уравнение относительно новой неизвестной функции:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^2} + z' &= -\frac{1}{x^2} + 2\frac{z}{x} - z^2 + \frac{2}{x^2}, \\ z' - \frac{2}{x}z &= -z^2. \end{aligned}$$

Пришли к уравнению Бернулли, для решения которого сделаем рассмотренную для него замену $z(x) = \alpha(x)\beta(x)$, $z' = \alpha'\beta + \alpha\beta'$. В результате уравнение станет таким:

$$\begin{aligned} \alpha'\beta + \alpha\beta' - \frac{2}{x}\alpha\beta &= -\alpha^2\beta^2, \\ \alpha'\beta + \alpha\left(\beta' - \frac{2}{x}\beta\right) &= -\alpha^2\beta^2. \end{aligned} \quad (20)$$

Обратим выражение в скобках в нуль, заменив β решением уравнения

$$\beta' - \frac{2}{x}\beta = 0.$$

Это – уравнение с разделяющимися переменными, решение которого имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{d\beta}{dx} &= \frac{2}{x}\beta, \quad \frac{d\beta}{\beta} = \frac{2}{x}dx, \quad \ln|\beta| = 2\ln|x| + \ln|C|, \\ \beta &= Cx^2. \end{aligned}$$

Выбирая произвольную постоянную C , равной 1, получаем частное решение $\beta = x^2$. Подставляя его в уравнение (20), получаем новое уравнение, которое и решаем:

$$\begin{aligned} \alpha'x^2 &= -\alpha^2x^4, \quad \frac{d\alpha}{\alpha^2} = -x^2dx, \quad -\frac{1}{\alpha} = -\frac{x^3}{3} - C, \\ \alpha &= \frac{3}{x^3 + C}. \end{aligned}$$

Следовательно, функция z имеет вид $z = \alpha\beta = 3x^2/(x^3 + C)$, а искомое решение выглядит так:

$$y = y_1 + z = -\frac{1}{x} + \frac{3x^2}{x^3 + C}.$$

□

В Приложении показано, как использовать систему *Mathematica* для решения изученных на лекции дифференциальных уравнений первого порядка.

Приложение

В системе *Mathematica* можно решать дифференциальные уравнения всех рассмотренных на лекции типов. Например, так в общем виде решается уравнение для тока в RL-контуре при постоянном входном напряжении:

```
DSolve[{L i'[t] + R i[t] == U, i[t0] == i0}, i[t], t]
{{i[t] -> \frac{e^{-\frac{Rt}{L}} \left( e^{\frac{Rt_0}{L}} i_0 R + e^{\frac{Rt}{L}} U - e^{\frac{Rt_0}{L}} U \right)}{R}}}}
```

и при синусоидальном:

```
DSolve[{L i'[t] + R i[t] == U Sin[\omega t + \varphi], i[0] == i0}, i[t], t]
{{i[t] -> \frac{1}{R^2 + L^2 \omega^2} e^{-\frac{Rt}{L}} \left( i_0 R^2 + i_0 L^2 \omega^2 + LU \omega \cos[\varphi] - e^{\frac{Rt}{L}} LU \omega \cos[\varphi + t\omega] - RU \sin[\varphi] + e^{\frac{Rt}{L}} RU \sin[\varphi + t\omega] \right)}}
```

Не вызывает затруднений решение уравнения Бернулли:

```
Factor[DSolve[y'[x] == y[x]/x + 2 \sqrt{y[x]}, y[x], x]]
{{y[x] -> x (2\sqrt{x} + C[1])^2}}
```

и уравнения Риккати:

```
Simplify[DSolve[y'[x] == -(y[x])^2 + \frac{2}{x^2}, y[x], x]]
{{y[x] -> \frac{2x^3 - C[1]}{x^4 + x C[1]}}}
```

Все ответы легко приводятся к ответам, полученным на лекции.

Mathematica способна решать и дифференциальные уравнения с разрывными функциями. Пусть правая часть линейного дифференциального уравнения $y' + y/2 = f(x)$, $y(0) = 0$, является разрывной функцией вида

$$f(x) = \begin{cases} (5x + 1)/10, & 0 \leq x \leq 1; \\ e^{-x}, & x > 1. \end{cases}$$

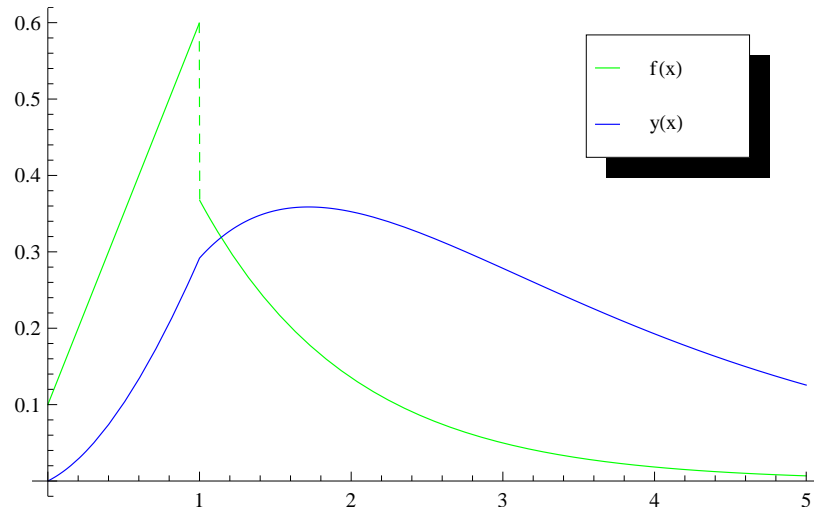
Подключим пакет `PlotLegends`:

```
<< PlotLegends
```

чтобы не только решить такое уравнение, но и вывести на рисунок обозначения графиков функций:

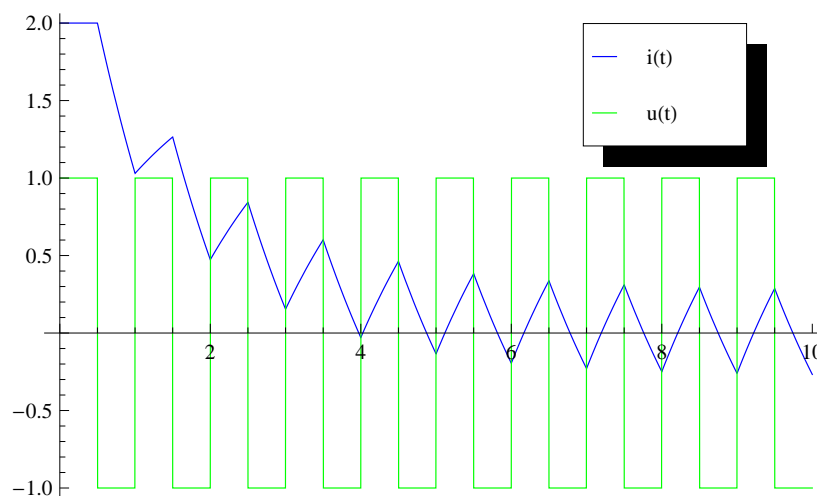
```
f[x_] := Piecewise[{{0.5 x + 0.1, 0 <= x <= 1}, {e^{-x}, x > 1}}]
Simplify[DSolve[{y'[x] + 0.5 y[x] == f[x], y[0] == 0}, y[x], x]]
Plot[{f[x], y[x] /. %}, {x, 0, 5}, Exclusions -> None, PlotRange -> All,
PlotStyle -> {Green, Blue}, PlotLegend -> {"f(x)", "y(x)"},
LegendSize -> {0.4, 0.3}, LegendPosition -> {0.4, 0.25}]
```

```
{{y[x] -> \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ -1.8 + 1.8 e^{-0.5x} + 1. x & 0 < x \le 1. \\ -2. e^{-1. x} + 1.69408 e^{-0.5x} & \text{True} \end{cases}}}
```

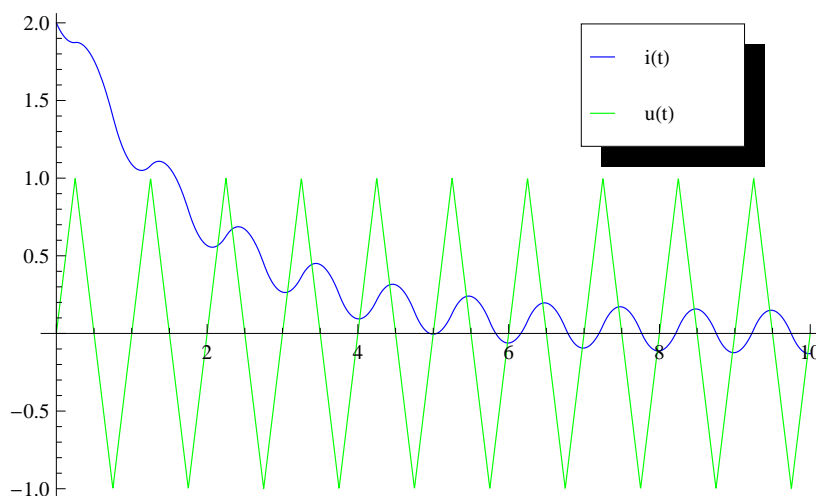


В арсенале системы *Mathematica* есть несколько функций, полезных для специалистов в области электро- и радиотехники, автоматики и других родственных областей техники. Этими функциями можно задать так называемый «телеграфный сигнал», «треугольные» или «пилообразные» токи и напряжения. Правда, аналитически дифференциальные уравнения с такими функциями *Mathematica* не решает, но численное решение можно получить. Эти функции называются `SquareWave[x]`, `TriangleWave[x]` и `SawtoothWave[x]`. Вот решения для тока в RL-контуре, когда на его вход подаются напряжения в виде перечисленных функций:

```
R = 0.5; L = 0.9; i0 = 2;
NDSolve[{Li'[t] + Ri[t] == SquareWave[t], i[0] == i0}, i[t], {t, 0, 10}];
Plot[Evaluate[{i[t] /. sol, SquareWave[t]}], {t, 0, 10}, Exclusions -> None,
PlotStyle -> {Blue, Green}, PlotLegend -> {"i(t)", "u(t)"},
LegendSize -> {0.4, 0.3}, LegendPosition -> {0.4, 0.25}]
```



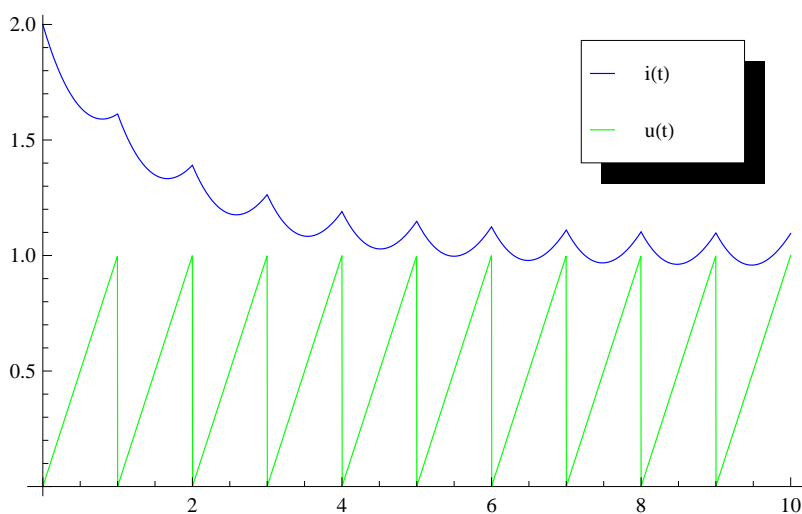
```
R = 0.5; L = 0.9; i0 = 2;
NDSolve[{Li'[t] + Ri[t] == TriangleWave[t], i[0] == i0}, i[t], {t, 0, 10}];
Plot[Evaluate[{i[t] /. sol, TriangleWave[t]}], {t, 0, 10}, Exclusions -> None,
PlotStyle -> {Blue, Green}, PlotLegend -> {"i(t)", "u(t)"},
LegendSize -> {0.4, 0.3}, LegendPosition -> {0.4, 0.25}]
```



```

R = 0.5; L = 0.9; i0 = 2;
NDSolve[{Li'[t] + Ri[t] == SawtoothWave[t], i[0] == i0}, i[t], {t, 0, 10}];
Plot[Evaluate[{i[t] /. sol, SawtoothWave[t]}], {t, 0, 10}, Exclusions -> None,
PlotStyle -> {Blue, Green}, PlotLegend -> {"i(t)", "u(t)"},
LegendSize -> {0.4, 0.3}, LegendPosition -> {0.4, 0.25}]

```



Литература

- [1] Бугров Я.С., Никольский С.М. *Высшая математика. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного.* — М.: Наука, 1985, — с. 29–32.
- [2] Письменный Д.Т. *Конспект лекций по высшей математике.* — М.: Рольф, 2000. Ч. 2. — с. 18–21.
- [3] Федорюк М.В. *Обыкновенные дифференциальные уравнения.* — М.: Наука, 1985, — с. 21–23, 30, 31.