Уравнения в полных дифференциалах

Волченко Ю.М.

Содержание лекции

Дифференциальные уравнения в полных дифференциалах и их интегрирование. Интегрирующий множитель, методы его отыскания. Решение дифференциальных уравнений первого порядка методом интегрирующего множителя.

Анимация переходного процесса в электрическом контуре.
Анимация работает только в программе Acrobat Reader!

28 мая 2014 г.

На сегодняшней лекции речь пойдет об уравнении вида

$$P\,(x, y)\;dx + Q\,(x, y)\;dy = 0, \tag{1}$$

которые мы не станем разрешать относительно производной y'. Для него в специфической форме справедлива теорема о существовании и единственности решения.

Теорема 1 (о существовании и единственности решения)**.** *Пусть функции P и Q в уравнении* (1) *непрерывно дифференцируемы в области $G \subset \mathbb{R}^2$ и хотя бы одна из них не равна тождественно нулю. Тогда в этой области существует единственный интеграл уравнения* (1)*, т. е. для любой точки $(x_0, y_0) \in G$ найдется такая константа C_0, что $\Phi(x_0, y_0) = C_0$, где $\Phi(x, y) = C$ – общий интеграл уравнения* (1).

1 Понятие об уравнении в полных дифференциалах

Уравнение (1) называется ***уравнением в полных дифференциалах***, если его левая часть есть полный дифференциал некоторой функции $f(x, y)$:

$$\boxed{P(x,y)\;dx + Q(x,y)\;dy = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = df(x,y)\,.} \tag{2}$$

В этом случае оно легко интегрируется, превращаясь в общий интеграл:

$$f(x,y) = C. \tag{3}$$

Например, уравнение

$$x\,dy + y\,dx = 0$$

является уравнением в полных дифференциалах, так как его можно записать в виде

$$d(xy) = 0.$$

Решением будет общий интеграл

$$xy = C.$$

Теорема 2. *Пусть функции $P(x,y)$, $Q(x,y)$ непрерывно дифференцируемы в области G. Для того чтобы уравнение* (1) *было уравнением в полных дифференциалах, необходимо, чтобы выполнялось условие*

$$\boxed{\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x},\ (x,y)\in G.} \tag{4}$$

Если G — односвязная область, то условие (4) *является и достаточным.*

Доказательство. Необходимость. Пусть уравнение (1) является уравнением в полных дифференциалах вида (2). Тогда

$$\frac{\partial f}{\partial x} = P(x,y)\,,\ \frac{\partial f}{\partial y} = Q(x,y)\,. \tag{5}$$

Дифференцируя первое равенство по y, а второе — по x, получим

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial P}{\partial y},\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Из непрерывности смешанных производных следует их равенство, а из него — равенство (4).

Достаточность. Пусть выполняется равенство (4) и G односвязна. Покажем, что найдется функция $f(x,y)$, для которой выполнятся равенства (5). Чтобы найти f, проинтегрируем первое из равенств (5) по x:

$$f(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(x,y)\,dx + \varphi(y), \tag{6}$$

где x_0 — абсцисса произвольной тоски, принадлежащей области G, φ — произвольная функция. Подберем последнюю таким образом, чтобы выполнилось второе из равенств (5).

Для этого продифференцируем (6) по y:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\int_{x_0}^{x} P(x,y)\,dx + \varphi'(y) = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial P}{\partial y}\,dx + \varphi'(y) = Q(x,y).$$

Учитывая (4), получаем, что

$$\int_{x_0}^{x} \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx + \varphi'(y) = Q(x,y),$$

$$Q(x,y) - Q(x_0,y) + \varphi'(y) = Q(x,y),$$

откуда $\varphi'(y) = Q(x_0,y)$, а

$$\varphi(y) = \int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)\,dy,$$

где y_0 — ордината произвольной точки, принадлежащей G, а произвольная постоянная при интегрировании взята равной 0.

Из последнего равенства и равенства (6) находим искомую функцию f:

$$\boxed{f(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(x,y)\,dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)\,dy.} \qquad (7)$$

□

Формулу (7) можно использовать для получения функции f при решении дифференциальных уравнений в полных дифференциалах.

Пример 1. *Решить уравнение*

$$\left(3x^2 + 6xy^2\right)\,dx + (6x^2y + 4y^3)\,dy = 0.$$

Решение. В данном случае $P\,(x,y) = 3x^2 + 6xy^2$, $Q\,(x,y) = 6x^2y + 4y^3$. Очевидно, что условие (4) выполняется и поэтому по формуле (7) находим

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \int_{x_0}^{x} (3x^2 + 6xy^2)\,dx + \int_{y_0}^{y} (6x_0^2y + 4y^3)\,dy = \\ &= (x^3 + 3x^2y^2)\Big|_{x_0}^{x} + (3x_0^2y^2 + y^4)\Big|_{y_0}^{y} = \\ &= x^3 + 3x^2y^2 - x_0^3 - \cancel{3x_0^2y^2} + \cancel{3x_0^2y^2} + y^4 - 3x_0^2y_0^2 - y_0^4 = \\ &= x^3 + 3x^2y^2 + y^4 - x_0^3 - 3x_0^2y_0^2 - y_0^4. \end{aligned}$$

Но проще взять

$$f(x,y) = x^3 + 3x^2y^2 + y^4.$$

Решение получаем в виде общего интеграла (3):

$$x^3 + 3x^2y^2 + y^4 = C.$$

2 Интегрирующий множитель

Пусть уравнение (1) не является уравнением в полных дифференциалах. Тогда можно попытаться найти функцию $\mu(x, y)$ такую, что после умножения на нее обеих частей уравнения (1), получится уравнение в полных дифференциалах

$$\mu P\,dx + \mu Q\,dy = 0. \tag{8}$$

Это уравнение и уравнение (1) имеют одно и то же общее решение.

Функция μ с подобным свойством называется ***интегрирующим множителем*** и в соответствии с условием (4) должна удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu P) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu Q). \tag{9}$$

Теорема 3. *Для всякого уравнения* (1) *с непрерывно дифференцируемыми функциями P и Q существует интегрирующий множитель.*

Доказательство. Пусть уравнение (1) не является уравнением в полных дифференциалах. В силу существования и единственности решения оно имеет, по крайней мере, общий интеграл

$$u(x, y) = C. \tag{10}$$

Продифференцировав это равенство по x, получим $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = 0$. Поскольку из уравнения (1) следует, что $\frac{dy}{dx} = -\frac{P}{Q}$, то

$$\frac{\partial u}{\partial x}\Big/ P(x, y) = \frac{\partial u}{\partial y}\Big/ Q(x, y). \tag{11}$$

Обозначим $\mu(x, y)$ функцию, являющуюся одновременно левой и правой частями этого равенства. Тогда

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \mu(x, y)P(x, y), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \mu(x, y)Q(x, y). \tag{12}$$

Взяв полный дифференциал от обеих частей (10), получим $\frac{\partial u}{\partial x}\,dx + \frac{\partial u}{\partial y}\,dy = 0$. Использовав в последнем равенстве соотношения (12), придем к уравнению в полных дифференциалах (8). Это доказывает, что μ — интегрирующий множитель.

□

Доказанное утверждение кажется весьма обнадеживающим, однако интегрирующий множитель удается найти далеко не всегда. Дело в том, что решить уравнение (9) бывает не проще, чем уравнение (1).

Все же, если переписать равенство (9) в виде

$$P\,\frac{\partial\mu}{\partial y}-Q\frac{\partial\mu}{\partial x}+\mu\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)=0, \tag{13}$$

то интегрирующий множитель может быть найден, по крайней мере, в следующих двух случаях.

1. *Отношение* $\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)/Q$ *есть функция только* x.

Обозначим ее $g\,(x)$. Интегрирующий множитель тоже будем искать в виде функции, зависящей лишь от x. В этом случае $\partial\mu/\partial y=0$, и уравнение (13) принимает вид

$$Q\frac{\partial\mu}{\partial x}=\mu\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right),$$

или

$$\frac{\mu'}{\mu}=\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)\Big/Q=g(x).$$

Решением этого уравнения, как нетрудно видеть, будет функция

$$\mu\,(x)=e^{\int g(x)\,dx}. \tag{14}$$

2. *Отношение* $\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)/P$ *есть функция только* y.

Обозначая эту функцию $h\,(y)$ и проводя выкладки, аналогичные выкладкам в предыдущем случае, найдем интегрирующий множитель в виде

$$\mu\,(y)=e^{-\int h(y)\,dy}. \tag{15}$$

Во всех остальных ситуациях, чтобы найти интегрирующий множитель, остается рассчитывать на интуицию и везение.

Пример 2. *Решить уравнение*

$$\left(y+xy^2\right)\,dx-x\,dy=0.$$

Решение. Для $P\,(x,y)=y+xy^2$ и $Q\,(x,y)=-x$ условие (4) не выполняется:

$$\frac{\partial P}{\partial y}=1+2xy\not\equiv-1=\frac{\partial Q}{\partial x},$$

следовательно, заданное уравнение не является уравнением в полных дифференциалах. Найдем интегрирующий множитель, для чего вычислим отношение

$$\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)\Big/P=\frac{1+2xy+1}{y+xy^2}=\frac{2\,\cancel{(1+xy)}}{y\,\cancel{(1+xy)}}=\frac{2}{y}=h\,(y)\,.$$

Таким образом, в качестве интегрирующего множителя можно взять функцию (15):

$$\mu\,(y)=\exp\left(-\int\frac{2dy}{y}\right)=e^{-2\ln y}=\frac{1}{y^2}.$$

Умножим на этот множитель обе части заданного уравнения:

$$\left(\frac{1}{y}+x\right)dx-\frac{x}{y^2}\,dy=0.$$

По формуле (7) при $x_0=0$, $y_0=1$ найдем функцию, полный дифференциал которой равен левой части полученного уравнения:

$$f(x,y)=\int_0^x\left(\frac{1}{y}+x\right)dx-\int_1^y\frac{0}{y^2}\,dy=\frac{x}{y}+\frac{x^2}{2}. \qquad (16)$$

Значит, общим интегралом заданного уравнения будет

$$\frac{x}{y}+\frac{x^2}{2}=C.$$

3 Новый взгляд на ДУ первого порядка

Метод интегрирующего множителя, хотя и бывает трудноприменимым, для дифференциальных уравнений, изученных нами на предыдущих лекциях, является универсальным методом решения. Убедимся в этом.

3.1 Уравнение с разделяющимися переменными

Дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными мы записывали в виде уравнения с дифференциалами:

$$p(x)q(y)\,dx+r(x)s(y)\,dy=0.$$

Чтобы разделить переменные в таком уравнении, обе его части надо умножить на множитель

$$\mu(x)=\frac{1}{r(x)q(y)},$$

после чего уравнение примет вид

$$\frac{p(x)}{r(x)}\,dx+\frac{s(y)}{q(y)}\,dy=0. \qquad (17)$$

Так как

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{p(x)}{r(x)}\right]=0=\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{s(y)}{q(y)}\right],$$

то выполнено условие (4), следовательно, уравнение (17) есть уравнение в полных дифференциалах, а функция $\mu(x)$ является для него интегрирующим множителем. Согласно формулам (3) и (7) общий интеграл рассматриваемого уравнения имеет вид

$$\int_{x_0}^x\frac{p(x)}{r(x)}\,dx+\int_{y_0}^y\frac{s(y)}{q(y)}\,dy=C.$$

3.2 Однородное уравнение

Запишем однородное уравнение в виде

$$a(x,y)\,dx + b(x,y)\,dy = 0, \tag{18}$$

где $a(x,y)$, $b(x,y)$ — однородные функции одного порядка n.

Сделаем в этом уравнении замену $y = xu(x)$, $dy = u\,dx + x\,du$. Получим

$$a(x, xu)\,dx + b(x, xu)(u\,dx + x\,du) = 0,$$

или

$$x^n a(1,u)\,dx + ux^n b(1,u)\,dx + x^{n+1} b(1,u)\,du = 0.$$

Соберем вместе члены при дифференциалах:

$$x^n\left[a(1,u) + ub(1,u)\right]dx + x^{n+1} b(1,u)\,du = 0.$$

Это — уравнение с разделяющимися переменными. В соответствии с предыдущим п. оно имеет интегрирующий множитель

$$\mu(x,y) = \frac{1}{x^{n+1}\left[a(1,u) + ub(1,u)\right]}.$$

Возвращаясь к переменной y, найдем интегрирующий множитель для однородного уравнения в виде

$$\mu(x,y) = \frac{1}{xa(x,y) + yb(x,y)}, \tag{19}$$

если $xa + yb \neq 0$. Если же $xa + yb = 0$, то однородное уравнение приводится[1)] к уравнению с разделяющимися переменными $y\,dx - x\,dy = 0$.

Умножая на множитель (19) однородное уравнение (18), получим

$$\frac{a(x,y)}{xa(x,y) + yb(x,y)}\,dx + \frac{b(x,y)}{xa(x,y) + yb(x,y)}\,dy = 0.$$

Таким образом, общий интеграл однородного уравнения выразится формулой

$$\int_{x_0}^{x} \frac{a(x,y)}{xa(x,y) + yb(x,y)}\,dx + \int_{y_0}^{y} \frac{b(x_0,y)}{x_0 a(x_0,y) + yb(x_0,y)}\,dy = C.$$

3.3 Линейное уравнение

Линейное уравнение

$$y' + p(x)y = q(x)$$

перепишем с помощью дифференциалов:

$$\left[p(x)y - q(x)\right]dx + dy = 0.$$

В принятых обозначениях в данном случае $P(x) = p(x)y - q(x)$, $Q(x) = 1$, так что отношение

$$\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)/Q = p(x)$$

зависит только от x. Интегрирующий множитель дается формулой (14):

$$\mu\left(x\right) = e^{\int p(x)\,dx}. \tag{20}$$

Пример 3. *Определить ток i_L в цепи, изображенной на рис. 1, при условии, что подаваемое в цепь напряжение равно $u(t) = U_0 e^{-\alpha t}$, а $i_L\left(0\right) = 0$.*

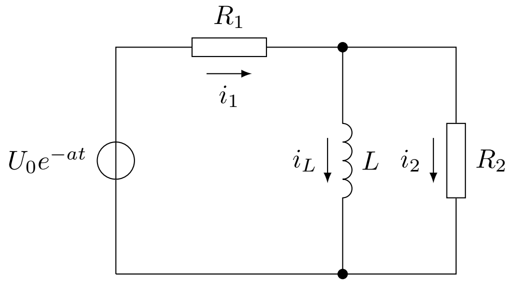

Рис. 1. Электрическая цепь.

Решение. По первому закону Кирхгофа

$$i_1 = i_L + i_2, \tag{21}$$

по второму же для контура, содержащего резистор R_1 и индуктивность L, имеем

$$i_1 R_1 + L\,\frac{di_L}{dt} = U_0 e^{-\alpha t},$$

а для контура, содержащего резистор R_2 и индуктивность получаем

$$i_2 R_2 = L\,\frac{di_L}{dt}.$$

Токи i_1 и i_2 выражаются через ток i_L:

$$i_1 = \frac{U_0}{R_1}\,e^{-\alpha t} - \frac{L}{R_1}\cdot\frac{di_L}{dt},\ i_2 = \frac{L}{R_2}\cdot\frac{di_L}{dt}.$$

Подставляя эти выражения в уравнение (21), придем к линейному дифференциальному уравнению

$$L\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)\frac{di_L}{dt} + i_L = \frac{U_0}{R_1}\,e^{-\alpha t},$$

или

$$\frac{di_L}{dt} + ri_L = \frac{rU_0}{R_1}\,e^{-\alpha t},$$

где $r = \frac{R_1 R_2}{L(R_1+R_2)}$. Перепишем уравнение с помощью дифференциалов:

$$\left(ri_L - \frac{rU_0}{R_1}\,e^{-\alpha t}\right)dt + di_L = 0,$$

и умножим обе его части на интегрирующий множитель (20)

$$\mu(x) = e^{\int r\,dt} = e^{rt};$$

получим

$$e^{rt}\left(ri_L - \frac{rU_0}{R_1}\,e^{-\alpha t}\right)dt + e^{rt}di_L = 0.$$

Решим это уравнение в полных дифференциалах, применив формулы (3) и (7):

$$\int_0^t e^{rt}\left(ri_L - \frac{rU_0}{R_1}\,e^{-\alpha t}\right)dt + \int_0^{i_L} e^0 di_L = C,$$

$$ri_L\int_0^t e^{rt}dt - \frac{rU_0}{R_1}\int_0^t e^{-(\alpha-r)t}dt + \int_0^{i_L} di_L = C,$$

$$i_L e^{rt}\Big|_0^t + \frac{rU_0}{R_1(\alpha-r)}\; e^{-(\alpha-r)t}\Big|_0^t + i_L\Big|_0^{i_L} = C,$$

$$i_L e^{rt} - \cancel{i_L} + \frac{rU_0}{R_1(\alpha-r)}\left[e^{-(\alpha-r)t}-1\right] + \cancel{i_L} = C,$$

$$i_L e^{rt} + \frac{rU_0}{R_1(\alpha-r)}\left[e^{-(\alpha-r)t}-1\right] = C$$

Константу C определим из последнего уравнения, используя условие $i_L(0) = 0$: $C = 0$. Остается найти искомый ток:

$$i_L e^{rt} + \frac{rU_0}{R_1(\alpha-r)}\left[e^{-(\alpha-r)t}-1\right] = 0.$$

$$i_L = \frac{rU_0}{R_1(\alpha-r)}e^{-rt}\left[1-e^{-(\alpha-r)t}\right],$$

$$i_L = \frac{rU_0}{R_1(\alpha-r)}\left[e^{-rt}-e^{-\alpha t}\right].$$

На анимационном рис. 2 показано, как изменяется ток i_L в зависимости от изменения параметра r при фиксированных значениях остальных параметров.

3.4 Уравнение Бернулли

Умножим уравнение Бернулли

$$y' + p(x)y = q(x)y^m$$

на $(1-m)\,y^{-m}$:

$$(1-m)\,y'y^{-m} + (1-m)\,py^{1-m} = (1-m)\,q,$$

и сделаем в нем замену $u(x) = y^{1-m}$, $u' = (1-m)\,y^{-m}y'$. Получим линейное уравнение

$$u' + (1-m)\,pu = (1-m)\,q,$$

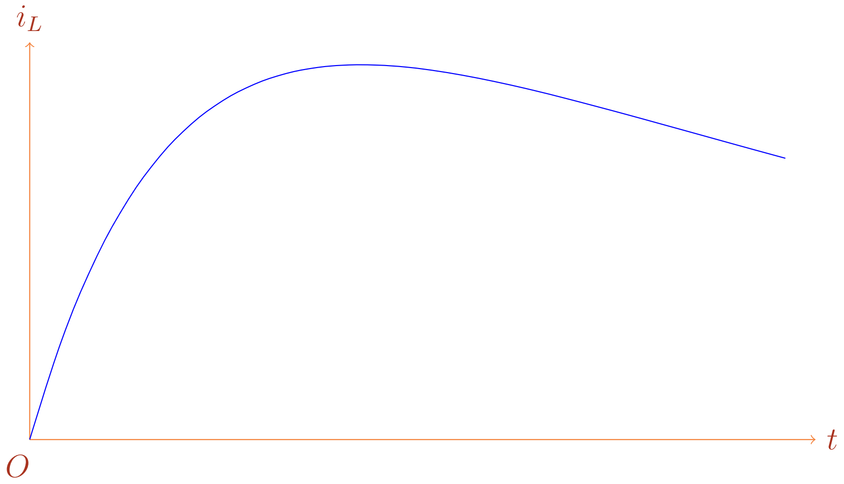

Рис. 2. Ток i_L в цепи.

которое можно переписать в виде

$$[(1-m)\,pu-(1-m)\,q]\,dx+du=0 \tag{22}$$

и которое имеет интегрирующий множитель (см. (20))

$$\mu\,(x)=e^{(1-m)\int p(x)\,dx}.$$

Умножим на этот множитель обе части уравнения (22), вернемся к переменной y и разделим на $1-m$:

$$e^{(1-m)\int p(x)\,dx}\left(py^{1-m}-q\right)dx+e^{(1-m)\int p(x)\,dx}y^{-m}dy=0.$$

Нетрудно видеть, что получено уравнение в полных дифференциалах.

Приложение

[1)] Действительно, из уравнения (18) и условия $xa + yb = 0$ получаем

$$
\begin{gathered}
a\,dx + b\,dy = 0, \\
ay\,dx + by\,dy = 0, \\
ay\,dx - ax\,dy = 0, \\
ydx - xdy = 0.
\end{gathered}
$$

Литература

[1] Бугров Я.С., Никольский С.М. *Высшая математика. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного.* – М.: Наука, 1985. – с. 220-222.

[2] Письменный Д.Т. *Конспект лекций по высшей математике.* – М.: Рольф, 2000. Ч. 2. – с. 21–25.

[3] Федорюк М.В. *Обыкновенные дифференциальные уравнения.* – М.: Наука, 1985. – с. 23–30.