Системы ЛДУ с постоянными коэффициентами

Волченко Ю.М.

Содержание лекции

Однородные системы линейных дифференциальных уравнений (ЛДУ) с постоянными коэффициентами. Характеристическое уравнение. Тип решения в зависимости от типа собственных значений матрицы системы. Неоднородные системы ЛДУ. Структура общего решения. Решение систем неоднородных ЛДУ с постоянными коэффициентами методом вариации произвольных постоянных.

Анимация процессов в связанных электрических контурах.
Анимация работает только в программе Acrobat Reader!

Mathematica в качестве вспомогательного средства при аналитическом решении линейных систем уравнений.

18 августа 2014 г.

1 Однородная линейная система

Такая система дифференциальных уравнений имеет вид

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t), \tag{1}$$

где $A = \{a_{ij}\}$ – числовая матрица, называемая, как вы знаете, ***матрицей системы***.

Покажем, что решением уравнения (1) при определенных условиях является вектор $\mathbf{x}(t) = \boldsymbol{\alpha} e^{pt}$, где $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)^T$ – постоянный вектор. Для этого найдем производную $\mathbf{x}'(t) = \boldsymbol{\alpha} p e^{pt}$ и подставим полученное выражение и выражение для самого вектора $\mathbf{x}(t)$ в уравнение (1):

$$\boldsymbol{\alpha} p e^{pt} = \mathbf{A}\boldsymbol{\alpha} e^{pt}.$$

Сокращая на экспоненту, приходим к равенству $\mathbf{A}\boldsymbol{\alpha} = p\boldsymbol{\alpha}$, из которого видно, что вектор $\mathbf{x}(t) = \boldsymbol{\alpha} e^{pt}$ будет решением однородной системы, если p является собственным значением, а $\boldsymbol{\alpha}$ — соответствующим ему собственным вектором матрицы $\mathbf{A}$.

Таким образом, чтобы найти решение системы (1) вида $\mathbf{x}(t) = \boldsymbol{\alpha}e^{pt}$, надо сначала составить характеристическое уравнение матрицы $\mathbf{A}$, которое называется также ***характеристическим уравнением системы*** (1),

$$|\mathbf{A} - p\mathbf{E}| = 0, \tag{2}$$

где $\mathbf{E}$ — единичная матрица, и определить из него собственные значения p_1, $\ldots$, p_n матрицы. Для каждого такого значения p_i затем следует найти соответствующий ему собственный вектор $\boldsymbol{\alpha}_i$, решая систему уравнений

$$(\mathbf{A} - p_i\mathbf{E})\,\boldsymbol{\alpha}_i = 0. \tag{3}$$

В результате получим n решений однородного уравнения вида

$$\mathbf{x}_i(t) = \boldsymbol{\alpha}_i e^{p_i t},\ i = \overline{1, n}. \tag{4}$$

Тип корней p_1, $\ldots$, p_n характеристического уравнения (2) определяет специфический вид общего решения системы (1).

1.1 Действительные различные корни

Пусть все собственные значения p_1, $\ldots$, p_n матрицы системы действительны и различны. В этом случае, как известно из линейной алгебры, соответствующие им собственные векторы $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\ldots$, $\boldsymbol{\alpha}_n$ линейно независимы. Вронскиан для решений (4)

$$W[x_1, \ldots, x_n] = |\boldsymbol{\alpha}_1 \ldots \boldsymbol{\alpha}_n|\, e^{p_1 t} \ldots e^{p_n} \neq 0,$$

так как не равен нулю определитель $|\boldsymbol{\alpha}_1 \ldots \boldsymbol{\alpha}_n|$ (в противном случае векторы $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\ldots$, $\boldsymbol{\alpha}_n$ были бы линейно зависимы).

Следовательно, решения (4) линейно независимы и общее решение однородной системы имеет вид

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{i=1}^{n} C_i \boldsymbol{\alpha}_i e^{p_i t}. \tag{5}$$

1.2 Комплексные различные корни

Пусть $p_i = a_i + jb_i$ — комплексное собственное значение матрицы системы, $a_i, b_i \in \mathbb{R}$. Ему соответствует комплексный собственный вектор $\boldsymbol{\alpha}_i = \boldsymbol{\alpha}'_i + j\boldsymbol{\alpha}''_i$, где $\boldsymbol{\alpha}'_i$, $\boldsymbol{\alpha}''_i$ — действительные векторы, и решение однородного уравнения вида

$$\mathbf{x}_i(t) = \boldsymbol{\alpha}_i e^{p_i t} = (\boldsymbol{\alpha}'_i + j\boldsymbol{\alpha}''_i)\, e^{(a_i + jb_i)t} = (\boldsymbol{\alpha}'_i + j\boldsymbol{\alpha}''_i)\, e^{a_i t}(\cos b_i t + j \sin b_i t) =$$

$$= \left(\boldsymbol{\alpha}_i' \cos b_i t - \boldsymbol{\alpha}_i'' \sin b_i t\right) e^{a_i t} + j \left(\boldsymbol{\alpha}_i' \sin b_i t + \boldsymbol{\alpha}_i'' \cos b_i t\right) e^{a_i t}.$$

Можно показать, что действительная и мнимая части последнего выражения тоже будут решениями системы (1), причем, линейно независимыми. Пусть $p_k = a_i - jb_i$. Если из совокупности решений (4) исключить комплексные решения $\mathbf{x}_i\,(t)$ и $\mathbf{x}_k\,(t)$, а вместо них ввести действительные решения

$$\mathbf{y}_i(t) = \operatorname{Re} \mathbf{x}_i\,(t) = \left(\boldsymbol{\alpha}_i' \cos b_i t - \boldsymbol{\alpha}_i'' \sin b_i t\right) e^{a_i t},$$
$$\mathbf{y}_k(t) = \operatorname{Im} \mathbf{x}_i\,(t) = \left(\boldsymbol{\alpha}_i' \sin b_i t + \boldsymbol{\alpha}_i'' \cos b_i t\right) e^{a_i t},$$

то модифицированная таким образом совокупность решений (4) останется линейно независимой.

Поступая так с каждым комплексным решением, придем к совокупности из n линейно независимых действительных решений.

1.3 Действительные кратные корни

Если действительный корень p_i характеристического уравнения имеет кратность k, то ему соответствует решение

$$\mathbf{x}_i\,(t) = \left(P_1\,(t)\, e^{p_i t}, \ldots, P_n\,(t)\, e^{p_i t}\right)^T, \tag{6}$$

где $P_1\,(t)$, …, $P_n\,(t)$ — многочлены степени не выше $k-1$ с неопределенными коэффициентами. Чтобы найти решение системы (1), соответствующее собственному числу p_i, надо подставить в эту систему вектор-функцию (6) и выразить все коэффициенты через k коэффициентов, остающихся произвольными.

1.4 Комплексные кратные корни

Пусть комплексный корень характеристического уравнения $p_i = a_i + jb_i$ имеет кратность k. В этом случае вектор-функция (6) тоже будет решением однородной системы уравнений, однако решением комплексным:

$$\mathbf{x}_i\,(t) = \left(\left(P_1'\,(t) + jP_1''\,(t)\right) e^{(a_i + jb_i)t}, \ldots, \left(P_n'\,(t) + jP_n''\,(t)\right) e^{(a_i + jb_i)t}\right)^T,$$

где $P_1'\,(t)$, $P_1''\,(t)$, …, $P_n'\,(t)$, $P_n''\,(t)$ — действительные многочлены степени не выше $k-1$. Можно показать, что действительная и мнимая части комплексного решения

$$\operatorname{Re} \mathbf{x}_i\,(t) =$$
$$= \left(\left(P_1'\,(t) \cos b_i t - P_1''\,(t) \sin b_i t\right) e^{a_i t}, \ldots, \left(P_n'\,(t) \cos b_i t - P_n''\,(t) \sin b_i t\right) e^{a_i t}\right)^T,$$

$$\operatorname{Im} \mathbf{x}_i(t) =$$
$$= \left(\left(P_1'(t) \sin b_i t + P_1''(t) \cos b_i t \right) e^{a_i t}, \ldots, \left(P_n'(t) \sin b_i t + P_n''(t) \cos b_i t \right) e^{a_i t} \right)^T$$

тоже будут решениями однородной системы. Заменяя во множестве функций (4) решение $\mathbf{x}_i(t)$ и комплексно-сопряженное ему решение $\mathbf{x}_k(t)$ функциями $\operatorname{Re} \mathbf{x}_i(t)$ и $\operatorname{Im} \mathbf{x}_i(t)$, вновь получим линейно независимую систему решений. Продолжая такую замену для всех комплексных корней характеристического уравнения, в конце концов придем к линейно независимой системе решений, среди которых не будет ни одного комплексного.

Замечание 1. *На практике общее решение однородного уравнения во всех четырех случаях находят так, как описано в разделе 1.3: определяют корни характеристического уравнения, составляют общее решение системы (с неопределенными коэффициентами) в соответствии с типами корней, подставляют его в систему* (1)*, приравнивают коэффициенты при одинаковых линейно независимых функциях, получают систему линейных алгебраических уравнений и решают ее относительно неизвестных коэффициентов.*

Пример 1. *Решить систему уравнений:*

$$\begin{cases} x' = x - y, \\ y' = -6x + 2y. \end{cases}$$

Решение. Матрица системы и соответствующее ей характеристическое уравнение имеют вид

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}, \qquad |\mathbf{A} - p\mathbf{E}| = \begin{vmatrix} 1-p & -1 \\ -6 & 2-p \end{vmatrix} = p^2 - 3p - 4 = 0.$$

Его корни действительны и различны: $p_1 = -1$, $p_2 = 4$, поэтому решение ищем в виде

$$x(t) = A_1 e^{-t} + A_2 e^{4t}, \quad y(t) = B_1 e^{-t} + B_2 e^{4t}.$$

Подставим эти функции в заданную систему уравнений:

$$-A_1 e^{-t} + 4A_2 e^{4t} = A_1 e^{-t} + A_2 e^{4t} - B_1 e^{-t} - B_2 e^{4t},$$
$$-B_1 e^{-t} + 4B_2 e^{4t} = -6A_1 e^{-t} - 6A_2 e^{4t} + 2B_1 e^{-t} + 2B_2 e^{4t}.$$

Приравнивая коэффициенты при линейно независимых функциях e^{-t}, e^{4t}, получаем систему уравнений относительно неизвестных коэффициентов:

$$\begin{cases} -2A_1 + B_1 = 0, \\ 6A_1 - 3B_1 = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} 3A_2 + B_2 = 0, \\ 6A_2 + 2B_2 = 0. \end{cases}$$

Первая подсистема дает $B_1 = 2A_1$, а из второй получаем $B_2 = -3A_2$. Искомое общее решение имеет вид

$$x(t) = A_1 e^{-t} + A_2 e^{4t}, \; y(t) = 2A_1 e^{-t} - 3A_2 e^{4t}.$$

Запишем его также в векторной форме (5):

$$\mathbf{x}(t) = A_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{-t} + A_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} e^{4t}.$$

Пример 2. *Найти частное решение системы*

$$\begin{cases} x' = -3x - y, \\ y' = x - y, \end{cases}$$

удовлетворяющее начальным условиям $x(0) = 1$*,* $y(0) = 1$.

Решение. Запишем матрицу системы и ее характеристическое уравнение:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} -3-p & -1 \\ 1 & -1-p \end{vmatrix} = p^2 + 4p + 4 = 0.$$

Последнее имеет двукратный корень $p_{1,2} = -2$. Поэтому общее решение системы ищем в виде

$$x(t) = (A_1 t + A_2) e^{-2t}, \quad y(t) = (B_1 t + B_2) e^{-2t}.$$

Подставляем эти функции в систему:

$$\begin{aligned} A_1 e^{-2t} - 2(A_1 t + A_2) e^{-2t} &= -3(A_1 t + A_2) e^{-2t} - (B_1 t + B_2) e^{-2t}, \\ B_1 e^{-2t} - 2(B_1 t + B_2) e^{-2t} &= (A_1 t + A_2) e^{-2t} - (B_1 t + B_2) e^{-2t}. \end{aligned}$$

Приравниваем коэффициенты при линейно независимых функциях e^{-2t} и te^{-2t}:

$$\begin{cases} A_1 + B_1 = 0, \\ -A_1 - B_1 = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} A_1 + A_2 + B_2 = 0, \\ -A_2 + B_1 - B_2 = 0. \end{cases}$$

Из первой подсистемы следует, что $B_1 = -A_1$, а из второй получаем $B_2 = -A_1 - A_2$. Следовательно, общее решение заданной системы будет таким:

$$x(t) = (A_1 t + A_2) e^{-2t}, \; y(t) = -[A_1(t+1) + A_2] e^{-2t}. \tag{7}$$

Это решение можно также записать в векторной форме:

$$\mathbf{x}(t) = A_1 \mathbf{x}_1(t) + A_2 \mathbf{x}_2(t) = A_1 \begin{pmatrix} t \\ -t-1 \end{pmatrix} e^{-2t} + A_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-2t} =$$

$$= A_1 \begin{pmatrix} te^{-2t} \\ (-t-1) e^{-2t} \end{pmatrix} + A_2 \begin{pmatrix} e^{-2t} \\ -e^{-2t} \end{pmatrix},$$

где

$$\mathbf{x}_1(t) = \begin{pmatrix} te^{-2t} \\ (-t-1) e^{-2t} \end{pmatrix}, \; \mathbf{x}_2(t) = \begin{pmatrix} e^{-2t} \\ -e^{-2t} \end{pmatrix}.$$

Нетрудно убедиться в том, что решения $\mathbf{x}_1(t)$ и $\mathbf{x}_2(t)$ линейно независимы, так как $|\mathbf{x}_1(t)\ \mathbf{x}_1(t)| = e^{-4t} \neq 0$. Чтобы найти частное решение, удовлетворяющее начальным условиям, используем последние: $x(0) = A_2 = 1$, $y(0) = -A_1 - A_2 = 1$. Таким образом, $A_1 = -2$, $A_2 = 1$. Значит, искомое частное решение имеет вид

$$x(t) = (1 - 2t) e^{-2t}, \; y(t) = (2t + 1) e^{-2t}.$$

Пример 3. *Найти общее решение системы*

$$\begin{cases} x' = -x, \\ y' = -y. \end{cases}$$

Решение. Имеем следующие матрицу системы и ее характеристическое уравнение:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} -1-p & 0 \\ 0 & -1-p \end{vmatrix} = (p+1)^2 = 0,$$

причем, как и в предыдущем примере, корень последнего $p_{1,2} = -1$ двукратен. Общее решение заданной системы ищем в виде

$$x(t) = (A_1 t + A_2)\, e^{-t},\ y(t) = (B_1 t + B_2)\, e^{-t}.$$

Подставляем эти функции в систему:

$$\begin{aligned} A_1 e^{-t} - (A_1 t + A_2)\, e^{-t} &= -(A_1 t + A_2)\, e^{-t}, \\ B_1 e^{-t} - (B_1 t + B_2)\, e^{-t} &= -(B_1 t + B_2)\, e^{-t}. \end{aligned}$$

Приравнивая коэффициенты при линейно независимых функциях e^{-t} и te^{-t}, получаем $A_1 = 0$, $B_1 = 0$. Значит, общее решение заданной системы таково:

$$x(t) = A_2 e^{-t},\ y(t) = B_2 e^{-t}. \tag{8}$$

или в векторной форме:

$$\mathbf{x}(t) = A_2 \begin{pmatrix} e^{-t} \\ 0 \end{pmatrix} + B_2 \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-t} \end{pmatrix}.$$

Замечание 2. *Отметим, что общие решения* (8) *и* (7) *качественно отличаются (зависимостью многочленов при экспонентах от t и ее отсутствием), несмотря на то, что тип корней характеристического уравнения один и тот же (единственный двукратный корень).*

Пример 4. *Найти общее решение системы дифференциальных уравнений*

$$\begin{cases} x' = 2x + y, \\ y' = x + 3y - z, \\ z' = -x + 2y + 3z. \end{cases}$$

Решение. Составим матрицу и характеристическое уравнение системы:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} 2-p & 1 & 0 \\ 1 & 3-p & -1 \\ -1 & 2 & 3-p \end{vmatrix} =$$

$$\begin{gathered} = (2-p)\left(9 - 6p + p^2\right) + 1 + 2(2-p) - (3-p) = \\ = (2-p)\left(9 - 6p + p^2\right) + 2(2-p) - (2-p) = \\ = (2-p)\left[\left(9 - 6p + p^2\right) + 1\right] = (2-p)\left(p^2 - 6p + 10\right), \end{gathered}$$

корни которого $p_1 = 2$, $p_2 = 3 - j$, $p_3 = 3 + j$ различны, но среди них имеется пара комплексно сопряженных корней. Следовательно, решение будем искать в виде

$$x(t) = A_1 e^{2t} + (A_2 \cos t + A_3 \sin t)\, e^{3t},$$

$$y(t) = B_1 e^{2t} + (B_2 \cos t + B_3 \sin t)\, e^{3t},$$
$$z(t) = C_1 e^{2t} + (C_2 \cos t + C_3 \sin t)\, e^{3t}.$$

Подставим эти функции в заданную систему уравнений:

$$\begin{aligned}
&2A_1 e^{2t} + (-A_2 \sin t + A_3 \cos t)\, e^{3t} + 3\,(A_2 \cos t + A_3 \sin t)\, e^{3t} = \\
&\qquad = 2A_1 e^{2t} + 2\,(A_2 \cos t + A_3 \sin t)\, e^{3t} + B_1 e^{2t} + (B_2 \cos t + B_3 \sin t)\, e^{3t}, \\
&2B_1 e^{2t} + (-B_2 \sin t + B_3 \cos t)\, e^{3t} + 3\,(B_2 \cos t + B_3 \sin t)\, e^{3t} = \\
&\quad = A_1 e^{2t} + (A_2 \cos t + A_3 \sin t)\, e^{3t} + 3B_1 e^{2t} + 3\,(B_2 \cos t + B_3 \sin t)\, e^{3t} - \\
&\qquad\qquad - C_1 e^{2t} - (C_2 \cos t + C_3 \sin t)\, e^{3t}, \\
&2C_1 e^{2t} + (-C_2 \sin t + C_3 \cos t)\, e^{3t} + 3\,(C_2 \cos t + C_3 \sin t)\, e^{3t} = \\
&\quad = -A_1 e^{2t} - (A_2 \cos t + A_3 \sin t)\, e^{3t} + 2B_1 e^{2t} + 2\,(B_2 \cos t + B_3 \sin t)\, e^{3t} + \\
&\qquad\qquad + 3C_1 e^{2t} + 3\,(C_2 \cos t + C_3 \sin t)\, e^{3t}
\end{aligned}$$

Приравнивая коэффициенты при линейно независимых функциях e^{2t}, $\sin t e^{3t}$, $\cos t e^{3t}$, получаем систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов:

$$\left\{\begin{aligned}
B_1 &= 0, \\
A_2 + A_3 - B_2 &= 0, \\
-A_2 + A_3 - B_3 &= 0, \\
-A_1 - B_1 + C_1 &= 0, \\
-A_2 + B_3 + C_2 &= 0,
\end{aligned}\right. \qquad
\left\{\begin{aligned}
-A_3 - B_2 + C_3 &= 0, \\
A_1 - 2B_1 - C_1 &= 0, \\
A_2 - 2B_2 + C_3 &= 0, \\
A_3 - 2B_3 - C_2 &= 0.
\end{aligned}\right.$$

Первое, четвертое и седьмое уравнения дают $B_1 = 0$, $C_1 = A_1$. Система упрощается:

$$\left\{\begin{aligned}
A_2 + A_3 - B_2 &= 0, \\
-A_2 + A_3 - B_3 &= 0, \\
-A_2 + B_3 + C_2 &= 0,
\end{aligned}\right. \qquad
\left\{\begin{aligned}
-A_3 - B_2 + C_3 &= 0, \\
A_2 - 2B_2 + C_3 &= 0, \\
A_3 - 2B_3 - C_2 &= 0.
\end{aligned}\right.$$

Выразим коэффициенты в этих равенствах через B_3 и C_2. Из третьего уравнения имеем $A_2 = B_3 + C_2$, из шестого находим $A_3 = 2B_3 + C_2$, из первого получаем $B_2 = A_2 + A_3 = 3B_3 + 2C_2$, четвертое дает $C_3 = A_3 + B_2 = 5B_3 + 3C_2$.

Значит, общее решение заданной системы имеет вид

$$\begin{aligned}
x(t) &= A_1 e^{2t} + \left[(B_3 + C_2) \cos t + (2B_3 + C_2) \sin t\right] e^{3t}, \\
y(t) &= \left[(3B_3 + 2C_2) \cos t + B_3 \sin t\right] e^{3t}, \\
z(t) &= A_1 e^{2t} + \left[C_2 \cos t + (5B_3 + 3C_2) \sin t\right] e^{3t}.
\end{aligned}$$

Запишем решение также в векторной форме:

$$\mathbf{x}(t) = A_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} + B_3 \begin{pmatrix} \cos t + 2 \sin t \\ 3 \cos t + \sin t \\ 5 \sin t \end{pmatrix} e^{3t} + C_2 \begin{pmatrix} \cos t + \sin t \\ 2 \cos t \\ \cos t + 3 \sin t \end{pmatrix} e^{3t},$$

так что ФСР здесь является система функций

$$\mathbf{x}_1(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} \\ 0 \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \ \mathbf{x}_2(t) = \begin{pmatrix} (\cos t + 2 \sin t)\, e^{3t} \\ (3 \cos t + \sin t)\, e^{3t} \\ 5 \sin t e^{3t} \end{pmatrix}, \ \mathbf{x}_3(t) = \begin{pmatrix} (\cos t + \sin t)\, e^{3t} \\ 2 \cos t e^{3t} \\ (\cos t + 3 \sin t)\, e^{3t} \end{pmatrix}.$$

Проверьте, что ее вронскиан $2e^{8t} \neq 0$. $\square$

В Приложении[1)] приводится еще один пример технического характера.

Рассмотренный теоретический материал и примеры показывают, что в общем случае комплексная форма решения однородной линейной системы с постоянными коэффициентами имеет вид

$$\mathbf{x}\,(t) = \mathbf{P}_1\,(t)\, e^{p_1 t} + \ldots + \mathbf{P}_k\,(t)\, e^{p_k t},$$

где $\mathbf{P}_i\,(t)$ — вектор-столбец многочленов; а $p_1, \ldots, p_k$ — все разные и в общем случае комплексные корни характеристического уравнения.

В Приложении показано, как с помощью системы *Mathematica* можно осуществит проверку выкладок, необходимых при проведении ручных расчетов[2)].

2 Неоднородная линейная система

Как вы помните, неоднородная линейная система дифференциальных уравнений имеет вид

$$\mathbf{x}'\,(t) = \mathbf{A}\,(t)\,\mathbf{x}\,(t) + \mathbf{f}(t), \tag{9}$$

где $\mathbf{f}(t)$ — некоторая известная вектор-функция. В этом случае однородная линейная система

$$\mathbf{x}'\,(t) = \mathbf{A}\,(t)\,\mathbf{x}\,(t) \tag{10}$$

называется ***соответствующей*** неоднородной системе (9).

Теорема 1. *Общее решение неоднородной системы* (9) *имеет вид*

$$\mathbf{x}\,(t) = \mathbf{y}\,(t) + \mathbf{z}\,(t)\,, \tag{11}$$

где $\mathbf{y}\,(t)$ *— общее решение соответствующей однородной системы* (10)*,* $\mathbf{z}\,(t)$ *— частное решение неоднородной системы* (9).

Доказательство. Пусть $\mathbf{z}\,(t)$ — некоторое частное решение неоднородной системы (9). Покажем, что функция (11) является решением системы (9). Действительно,

$$\begin{aligned}\mathbf{x}'\,(t) &= [\mathbf{y}\,(t) + \mathbf{z}\,(t)]' = \mathbf{y}'\,(t) + \mathbf{z}'\,(t) = \mathbf{A}\,(t)\,\mathbf{y}\,(t) + \mathbf{A}\,(t)\,\mathbf{z}\,(t) + \mathbf{f}(t) = \\ &= \mathbf{A}\,(t)\,[\mathbf{y}\,(t) + \mathbf{z}\,(t)] + \mathbf{f}(t) = \mathbf{A}\,(t)\,\mathbf{x}\,(t) + \mathbf{f}(t).\end{aligned}$$

Пусть $\mathbf{u}\,(t)$ — произвольное решение (11). Тогда

$$[\mathbf{u}\,(t) - \mathbf{z}\,(t)]' = \mathbf{A}\,(t)\,\mathbf{u}\,(t) + \mathbf{f}(t) - \mathbf{A}\,(t)\,\mathbf{z}\,(t) - \mathbf{f}(t) = \mathbf{A}\,(t)\,[\mathbf{u}\,(t) - \mathbf{z}\,(t)]\,.$$

Это означает, что $\mathbf{u}\,(t) - \mathbf{z}\,(t)$ — решение однородной системы (10). Но тогда оно имеет вид

$$\mathbf{u}\,(t) - \mathbf{z}\,(t) = \sum_{i=1}^{n} C_i \mathbf{x}_i\,(t)\,,$$

где $\mathbf{x}_1(t), \ldots, \mathbf{x}_n(t)$ — ФСР однородной системы. Следовательно, произвольное решение неоднородной системы записывается как

$$\mathbf{u}(t) = \sum_{i=1}^{n} C_i \mathbf{x}_i(t) + \mathbf{z}(t),$$

т. е. в форме (11). □

Если все элементы матрицы системы являются не функциями, а числами, то есть $\mathbf{A}(t) \equiv \mathbf{A} = \mathrm{const}$, то система (9) называется ***неоднородной линейной системой с постоянными коэффициентами***. Найти решение такой системы можно ***методом вариации произвольных постоянных*** (***методом Лагранжа***).

Для этого берут общее решение соответствующей однородной системы

$$\mathbf{y}(t) = \sum_{i=1}^{n} C_i \mathbf{x}_i(t),$$

где $\{\mathbf{x}_i(t)\}$ — ФСР этой системы, и, считая произвольные постоянные функциями аргумента t, ищут решение неоднородной системы в виде

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{i=1}^{n} C_i(t)\, \mathbf{x}_i(t). \tag{12}$$

Чтобы найти неизвестные функции $C_i(t)$, продифференцируем равенство (12):

$$\mathbf{x}'(t) = \sum_{i=1}^{n} C_i'(t)\, \mathbf{x}_i(t) + \sum_{i=1}^{n} C_i(t)\, \mathbf{x}_i'(t). \tag{13}$$

Подставим выражения (12) и (13) в уравнение (9):

$$\sum_{i=1}^{n} C_i'(t)\, \mathbf{x}_i(t) + \sum_{i=1}^{n} C_i(t)\, \mathbf{x}_i'(t) = \sum_{i=1}^{n} C_i(t)\, \mathbf{A}(t)\, \mathbf{x}_i(t) + \mathbf{f}(t).$$

Так как $\mathbf{x}_i'(t) = \mathbf{A}(t)\, \mathbf{x}_i(t)$, то, уничтожая вторую и третью суммы (они одинаковы), получаем систему уравнений для нахождения производных $C_i'(t)$ неизвестных функций:

$$\sum_{i=1}^{n} C_i'(t)\, \mathbf{x}_i(t) = \mathbf{f}(t). \tag{14}$$

Она всегда имеет единственное решение, так как ее определитель является вронскианом ФСР $\{\mathbf{x}_i(t)\}$. Интегрируя полученные выражения для $C_i'(t)$, находим и сами неизвестные функции $C_i(t) = \varphi_i(t) + \overline{C}_i$, где $\varphi_i(t)$ — первообразная функции $C_i'(t)$, $\overline{C}_i$ — новая произвольная постоянная.

Подставим найденные выражения для $C_i(t)$ в формулу (12):

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{i=1}^{n} \left(\varphi_i(t) + \overline{C}_i\right) \mathbf{x}_i(t) = \sum_{i=1}^{n} \overline{C}_i \mathbf{x}_i(t) + \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(t) \mathbf{x}_i(t). \qquad (15)$$

При $\overline{C}_1 = \ldots = \overline{C}_n = 0$ получаем частное решение неоднородной системы в виде

$$\mathbf{y}(t) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(t) \mathbf{x}_i(t). \qquad (16)$$

Так как первое слагаемое в правой части равенства (15) является общим решением соответствующей однородной системы, то равенство (15) в силу формул (11) и (16) является общим решением неоднородной системы.

Пример 5. *Найти общее решение системы*

$$\begin{cases} x_1' = -5x_1 + 2x_2 + e^t, \\ x_2' = x_1 - 6x_2 + e^{-2t}. \end{cases}$$

Решение. Решим соответствующую заданной системе однородную систему. Ее характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} -5-p & 2 \\ 1 & -6-p \end{vmatrix} = p^2 + 11p + 28 = 0$$

имеет корни $p_1 = -4$, $p_2 = -7$. Найдем собственный вектор $\boldsymbol{\alpha}_1 = (r_1, r_2)^T$ матрицы, отвечающий собственному значению $p_1 = -4$, для чего составим систему уравнений вида (3):

$$\begin{cases} -r_1 + 2r_2 = 0, \\ r_1 - 2r_2 = 0. \end{cases}$$

Ее единственным решением будет выражение $r_1 = 2r_2$, так что собственным вектором можно взять вектор $\boldsymbol{\alpha}_1 = (2,1)^T$. Аналогично для $p_2 = -7$ найдем собственный вектор $\boldsymbol{\alpha}_2 = (s_1, s_2)^T$:

$$\begin{cases} 2s_1 + 2s_2 = 0, \\ s_1 + s_2 = 0, \end{cases}$$

$\boldsymbol{\alpha}_2 = (1,-1)^T$. Следовательно, общее решение однородной системы будет таким:

$$\mathbf{y}(t) = C_1 \boldsymbol{\alpha}_1 e^{-4t} + C_2 \boldsymbol{\alpha}_2 e^{-7t} = C_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-4t} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-7t}.$$

В соответствии с методом вариации произвольных постоянных решение заданной неоднородной системы будем искать в виде

$$\mathbf{x}(t) = C_1(t) \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-4t} + C_2(t) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-7t}. \qquad (17)$$

Подставив эту функцию в заданную систему, придем к векторному уравнению (14):

$$C_1' \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-4t} + C_2' \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-7t} = \begin{pmatrix} e^t \\ e^{-2t} \end{pmatrix},$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2C_1' e^{-4t} + C_2' e^{-7t} = e^t, \\ C_1' e^{-4t} - C_2' e^{-7t} = e^{-2t}. \end{array} \right. \tag{18}$$

Сложив уравнения, найдем C_1':

$$3C_1' e^{-4t} = e^t + e^{-2t},\ C_1' = \frac{1}{3}\left(e^{5t} + e^{2t}\right),$$

а затем из первого уравнения системы (18) определим C_2':

$$C_2' = \left[e^t - \frac{2}{3}\left(e^{5t} + e^{2t}\right) e^{-4t}\right] e^{7t} = \frac{1}{3}\, e^{8t} - \frac{2}{3}\, e^{5t}.$$

Интегрируя полученные для C_1' и C_2' равенства, находим функции C_1 и C_2:

$$\begin{aligned} C_1(t) &= \frac{1}{15}\, e^{5t} + \frac{1}{6}\, e^{2t} + \overline{C}_1, \\ C_2(t) &= \frac{1}{24}\, e^{8t} - \frac{2}{15}\, e^{5t} + \overline{C}_2, \end{aligned}$$

где $\overline{C}_1, \overline{C}_2$ – новые произвольные постоянные. Подставим эти выражения вместо $C_1(t)$ и $C_2(t)$ в формулу (17):

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= \left(\frac{1}{15}\, e^{5t} + \frac{1}{6}\, e^{2t} + \overline{C}_1\right) \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-4t} + \left(\frac{1}{24}\, e^{8t} - \frac{2}{15}\, e^{5t} + \overline{C}_2\right) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-7t} = \\ &= \overline{C}_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-4t} + \overline{C}_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-7t} + \frac{1}{40} \begin{pmatrix} 7e^t + 8e^{-2t} \\ e^t + 12e^{-2t} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Это и есть общее решение заданной неоднородной системы.

Приложение

1) Рассмотрим электрическую схему, показанную на рис. 1. Пользуясь законами Кирхгофа, составим описывающие ее уравнения:

$$\begin{cases} L_1\dfrac{di_1}{dt}+R_1i_1+\dfrac{q_1}{C_1}+\dfrac{q}{C}=0,\\ L_2\dfrac{di_2}{dt}+R_2i_2+\dfrac{q_2}{C_2}-\dfrac{q}{C}=0,\\ i=i_1-i_2,\end{cases}$$

где буквой q обозначены заряды на соответствующих конденсаторах. Отметим, что сопротив-

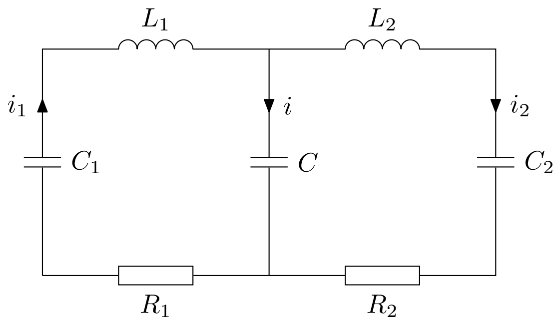

Рис. 1. Взаимодействие контуров.

ления и емкости в современной электронике могут иметь и отрицательные значения.† Преобразуем первые два уравнения, взяв во внимание третье и то, что $i_1=dq_1/dt$, $i_2=dq_2/dt$:

$$\begin{cases} L_1\dfrac{d^2q_1}{dt^2}+R_1\dfrac{dq_1}{dt}+\dfrac{q_1}{C_1}+\dfrac{q_1-q_2}{C}=0,\\ L_2\dfrac{d^2q_2}{dt^2}+R_2\dfrac{dq_2}{dt}+\dfrac{q_2}{C_2}+\dfrac{q_2-q_1}{C}=0.\end{cases} \tag{П1}$$

Получили систему из двух дифференциальных уравнений второго порядка с неизвестными функциями $q_1\,(t)$ и $q_2\,(t)$. Приведем ее к нормальной форме, используя схему приведения, изложенную на предыдущей лекции‡, для чего введем новые неизвестные функции $x_1=q_1$, $x_2=q_1'$, $x_3=q_2$, $x_4=q_2'$. В результате придем к нормальной линейной однородной системе четвертого порядка с постоянными коэффициентами:

$$\begin{cases} x_1'=x_2,\\ x_2'=-\dfrac{1}{L_1}\left(\dfrac{1}{C_1}+\dfrac{1}{C}\right)x_1-\dfrac{R_1}{L_1}x_2+\dfrac{1}{L_1C}x_3,\\ x_3'=x_4,\\ x_4'=\dfrac{1}{L_2C}x_1-\dfrac{1}{L_2}\left(\dfrac{1}{C_2}+\dfrac{1}{C}\right)x_3-\dfrac{R_2}{L_2}x_4.\end{cases}$$

Упростим ее запись, использовав обозначения

$$c_i=-\frac{1}{L_i}\left(\frac{1}{C_i}+\frac{1}{C}\right),\ r_i=-\frac{R_i}{L_i},\ a_i=\frac{1}{L_iC},\ i=1,2.$$

†Nagham N. Nanna. *Stability of Kirchhoff's law Circuit.*– International Journal of Electronics and Computer Science Engineering, v. 2, N. 1, pp. 168-174.

‡Лекция «Нормальные системы дифференциальных уравнений».

Получим

$$\begin{cases} x_1' = x_2, \\ x_2' = c_1x_1 + r_1x_2 + a_1x_3, \\ x_3' = x_4, \\ x_4' = a_2x_1 + c_2x_3 + r_2x_4. \end{cases} \tag{П2}$$

Составим матрицу системы:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ c_1 & r_1 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_2 & 0 & c_2 & r_2 \end{pmatrix}$$

и запишем ее характеристическое уравнение:

$$|\mathbf{A} - p\mathbf{E}| = \begin{vmatrix} -p & 1 & 0 & 0 \\ c_1 & r_1 - p & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & -p & 1 \\ a_2 & 0 & c_2 & r_2 - p \end{vmatrix} = -p \begin{vmatrix} r_1 - p & a_1 & 0 \\ 0 & -p & 1 \\ 0 & c_2 & r_2 - p \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} c_1 & a_1 & 0 \\ 0 & -p & 1 \\ a_2 & c_2 & r_2 - p \end{vmatrix} =$$

$$= -p\,(r_1 - p)\,[-p\,(r_2 - p) - c_2] - c_1\,[-p\,(r_2 - p) - c_2] - a_1a_2 =$$

$$= p^2\,(r_1 - p)\,(r_2 - p) + pc_2\,(r_1 - p) + pc_1\,(r_2 - p) + c_1c_2 - a_1a_2,$$

$$p^4 - (r_1 + r_2)\,p^3 + (r_1r_2 - c_1 - c_2)\,p^2 + (c_1r_2 + c_2r_1)\,p + c_1c_2 - a_1a_2 = 0.$$

Случай 1

Возьмем $R_1 = 0$, $R_2 = 0$, $L_1 = 1$, $L_2 = 1$, $C_1 = -1$, $C_2 = -1$, $C = 1$; тогда $r_1 = 0$, $r_2 = 0$, $c_1 = 0$, $c_2 = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, а характеристическое уравнение примет вид

$$p^4 - 1 = 0.$$

Оно имеет четыре различных корня: $p_1 = -1$, $p_2 = 1$, $p_3 = j$, $p_4 = -j$, поэтому решением системы с неопределенными коэффициентами A_i, B_i, P_i, Q_i, $i = 1, 2, 3, 4$, будут функции

$$\begin{aligned} x_1 &= A_1e^{-t} + B_1e^t + P_1\cos t + Q_1\sin t, \\ x_2 &= A_2e^{-t} + B_2e^t + P_2\cos t + Q_2\sin t, \\ x_3 &= A_3e^{-t} + B_3e^t + P_3\cos t + Q_3\sin t, \\ x_4 &= A_4e^{-t} + B_4e^t + P_4\cos t + Q_4\sin t. \end{aligned}$$

Подставив их в систему

$$\begin{cases} x_1' = x_2, \\ x_2' = x_3, \\ x_3' = x_4, \\ x_4' = x_1, \end{cases}$$

в которую превращается система (П2) при выбранных значениях параметров схемы, получим

$$\begin{aligned} -A_1e^{-t} + B_1e^t - P_1\sin t + Q_1\cos t &= A_2e^{-t} + B_2e^t + P_2\cos t + Q_2\sin t, \\ -A_2e^{-t} + B_2e^t - P_2\sin t + Q_2\cos t &= A_3e^{-t} + B_3e^t + P_3\cos t + Q_3\sin t, \\ -A_3e^{-t} + B_3e^t - P_3\sin t + Q_3\cos t &= A_4e^{-t} + B_4e^t + P_4\cos t + Q_4\sin t, \\ -A_4e^{-t} + B_4e^t - P_4\sin t + Q_4\cos t &= A_1e^{-t} + B_1e^t + P_1\cos t + Q_1\sin t, \end{aligned}$$

откуда, в частности,

$$A_1 = -A_2 = A_3 = -A_4.$$

Следовательно, можно оставить неопределенным коэффициент A_1, коэффициенты A_2, A_3, A_4 определятся через него. Таким же образом находим, что

$$B_1 = B_2 = B_3 = B_4.$$

Оставим неопределенным коэффициент B_1. Далее получим, что

$$P_1 = -Q_2,\ P_2 = -Q_3,\ P_3 = -Q_4,\ P_4 = -Q_1,$$
$$P_2 = Q_1,\ P_3 = Q_2,\ P_4 = Q_3,\ P_1 = Q_4.$$

оставим неопределенными коэффициенты P_1 и Q_1. В результате придем к решению

$$\begin{aligned} x_1 &= A_1 e^{-t} + B_1 e^t + P_1 \cos t + Q_1 \sin t,\\ x_2 &= -A e^{-t} + B_1 e^t + Q_1 \cos t - P_1 \sin t,\\ x_3 &= A_1 e^{-t} + B_1 e^t - P_1 \cos t - Q_1 \sin t,\\ x_4 &= -A_1 e^{-t} + B_1 e^t - Q_1 \cos t + P_1 \sin t. \end{aligned} \tag{П3}$$

Понятно, что с помощью равенств (П3) произвольные постоянные A_1, B_1, P_1, Q_1 могут быть выражены через величины $q_1(0)$, $q_1'(0)$, $q_2(0)$, $q_2'(0)$, определяемые начальными условиями.

Вид равенств (П3) показывает, что при различных начальных условиях могут получаться качественно различные решения, продемонстрированные на рис. 2.

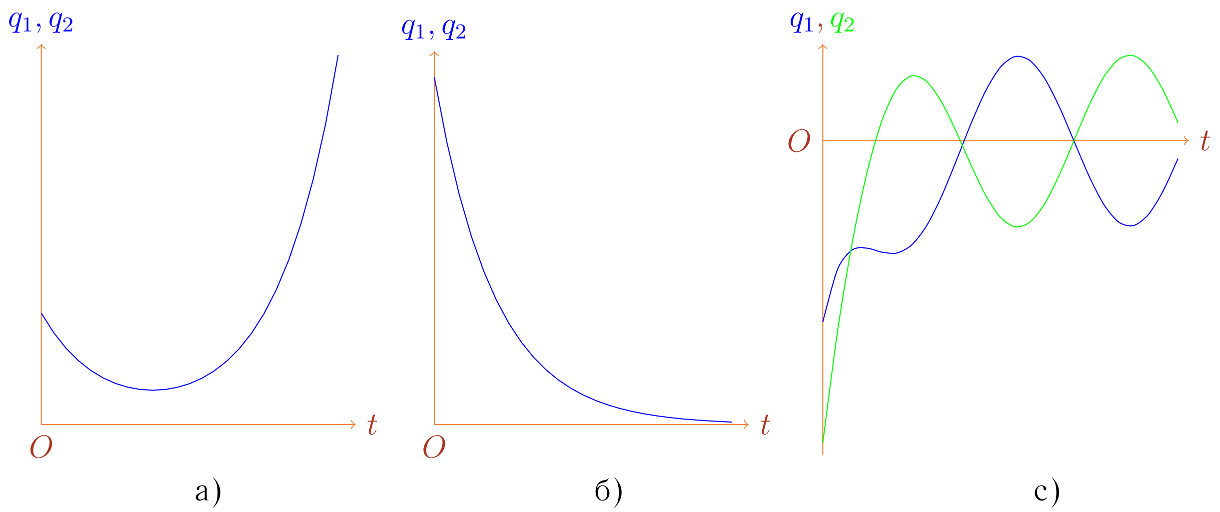

Рис. 2. а) Экспоненциальный рост, б) экспоненциальное убывание, с) незатухающие колебания.

На анимационном рис. 3 показана перестройка решения между тремя типами поведения, представленными на рис. 2, при изменении постоянной B_1.

Случай 2

Далее пусть $R_1 = 0$, $R_2 = 0$, $L_1 = 7/530$, $L_2 = 7/520$, $C_1 = 530/1141$, $C_2 = -260/259$, $C = 10/21$ и тогда $r_1 = 0$, $r_2 = 0$, $c_1 = -322$, $c_2 = -82$, $a_1 = 159$, $a_2 = 156$.

Характеристическое уравнение будет таким:

$$p^4 + 404p^2 + 1600 = 0.$$

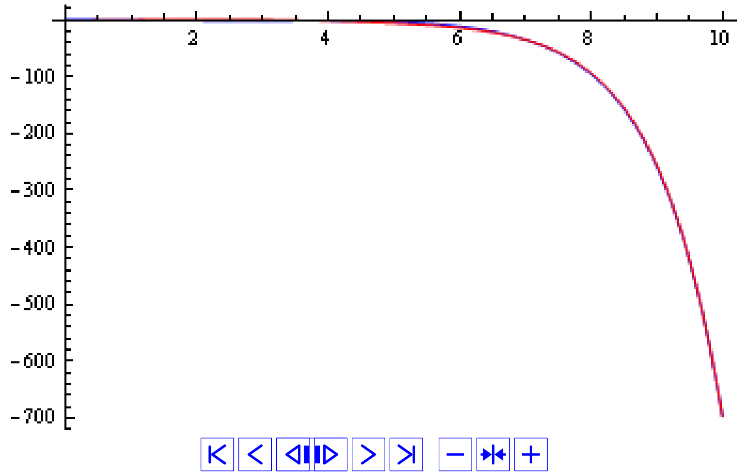

Рис. 3. Перестройка решения при изменении B_1; • $q_1(t)$, • $q_2(t)$.

Решая его как квадратное уравнение относительно p^2, найдем

$$p_{1,2}^2 = -202 \pm 198,$$

значит, характеристическое уравнение имеет четыре различных комплексных корня

$$p_{1,2} = \pm 20j,\ p_{3,4} = \pm 2j.$$

Таким образом, в данном случае решением системы с неопределенными коэффициентами A_i, B_i, P_i, Q_i, $i = 1, 2, 3, 4$, будут функции

$$\begin{aligned} x_1 &= A_1 \cos 20t + B_1 \sin 20t + P_1 \cos 2t + Q_1 \sin 2t, \\ x_2 &= A_2 \cos 20t + B_2 \sin 20t + P_2 \cos 2t + Q_2 \sin 2t, \\ x_3 &= A_3 \cos 20t + B_3 \sin 20t + P_3 \cos 2t + Q_3 \sin 2t, \\ x_4 &= A_4 \cos 20t + B_4 \sin 20t + P_4 \cos 2t + Q_4 \sin 2t. \end{aligned} \tag{П4}$$

Подставив выражения (П4) в систему

$$\begin{cases} x_1' = x_2, \\ x_2' = -322x_1 + 159x_3, \\ x_3' = x_4, \\ x_4' = 156x_1 - 82x_3, \end{cases} \tag{П5}$$

в которую превращается система (П2) при выбранных значениях параметров схемы, и приравняв коэффициенты при различных тригонометрических функциях, получим линейную алгебраическую систему уравнений

$$\begin{aligned} &20B_1 = A_2,\ -20A_1 = B_2,\ 2Q_1 = P_2,\ -2P_1 = Q_2, \\ &20B_2 = -322A_1 + 159A_3,\ -20A_2 = -322B_1 + 159B_3, \\ &2Q_2 = -322P_1 + 159P_3,\ -2P_2 = -322Q_1 + 159Q_3, \\ &20B_3 = A_4,\ -20A_3 = B_4,\ 2Q_3 = P_4,\ -2P_3 = Q_4, \\ &20B_4 = 156A_1 - 82A_3,\ -20A_4 = 156B_1 - 82B_3, \\ &2Q_4 = 156P_1 - 82P_3,\ -2P_4 = 156Q_1 - 82Q_3. \end{aligned}$$

Она решается последовательным выражением через A_1, B_1, P_1, Q_1 остальных своих коэффициентов:

$$A_2 = 20B_1,\ B_2 = -20A_1,\ P_2 = 2Q_1,\ Q_2 = -2P_1,$$
$$A_3 = -\frac{26}{53}A_1,\ B_3 = -\frac{26}{53}B_1,\ P_3 = 2P_1,\ Q_3 = 2Q_1,$$
$$A_4 = -\frac{520}{53}B_1,\ B_4 = \frac{520}{53}A_1,\ P_4 = 4Q_1,\ O_4 = 4P_1.$$

После подстановки этих выражений в функции (П4), последние становятся общим решением системы дифференциальных уравнений (П5):

$$x_1 = A_1 \cos 20t + B_1 \sin 20t + P_1 \cos 2t + Q_1 \sin 2t,$$
$$x_2 = 20B_1 \cos 20t - 20A_1 \sin 20t + 2Q_1 \cos 2t - 2P_1 \sin 2t,$$
$$x_3 = -\frac{26}{53}A_1 \cos 20t - \frac{26}{53}B_1 \sin 20t + 2P_1 \cos 2t + 2Q_1 \sin 2t,$$
$$x_4 = -\frac{520}{53}B_1 \cos 20t + \frac{520}{53}A_1 \sin 20t + 4Q_1 \cos 2t - 4P_1 \sin 2t.$$

Отметим, что это решение качественно отличается от решения (П3) отсутствием экспонент. Графики функций $q_1(t)$, $q_2(t)$ показаны на рис. 4.

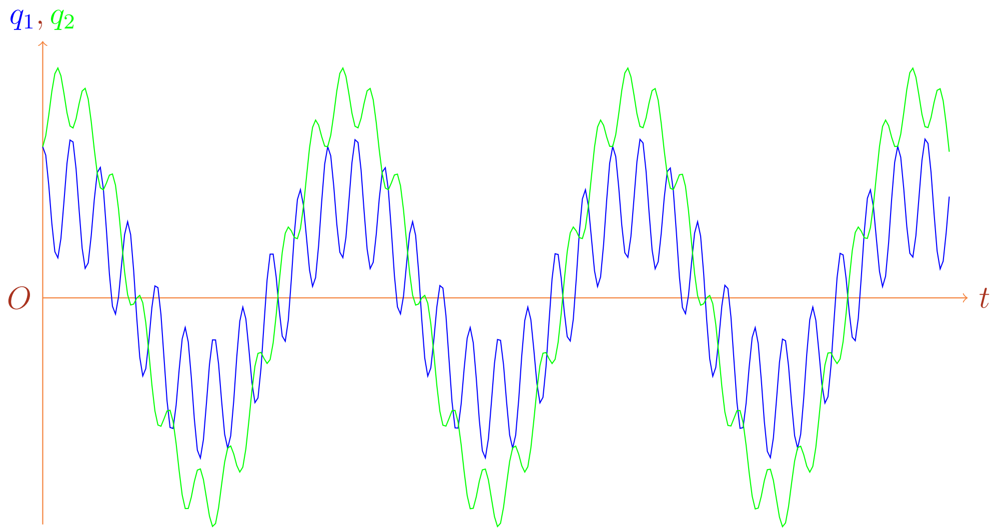

Рис. 4. Смесь незатухающих высоко- и низкочастотных колебаний.

Анимационный рис. 5 демонстрирует влияние амплитуды высокочастотных колебаний на форму графиков $q_1(t)$, $q_2(t)$.

Случай 3

Рассмотрим поведение контура при следующих значениях его параметров: $R_1 = 5832/5125$, $R_2 = 0$, $L_1 = 1296/5125$, $L_2 = 1/8$, $C_1 = 10250/15359$, $C_2 = -288/19$, $C = 2$; тогда $r_1 = -9/2$, $r_2 = 0$, $c_1 = -569/72$, $c_2 = -125/36$, $a_1 = 5125/2592$, $a_2 = 4$.

Запишем характеристическое уравнение для этого случая:

$$p^4 + \frac{9}{2}p^3 + \frac{91}{8}p^2 + \frac{125}{8}p + \frac{625}{32} = 0,$$

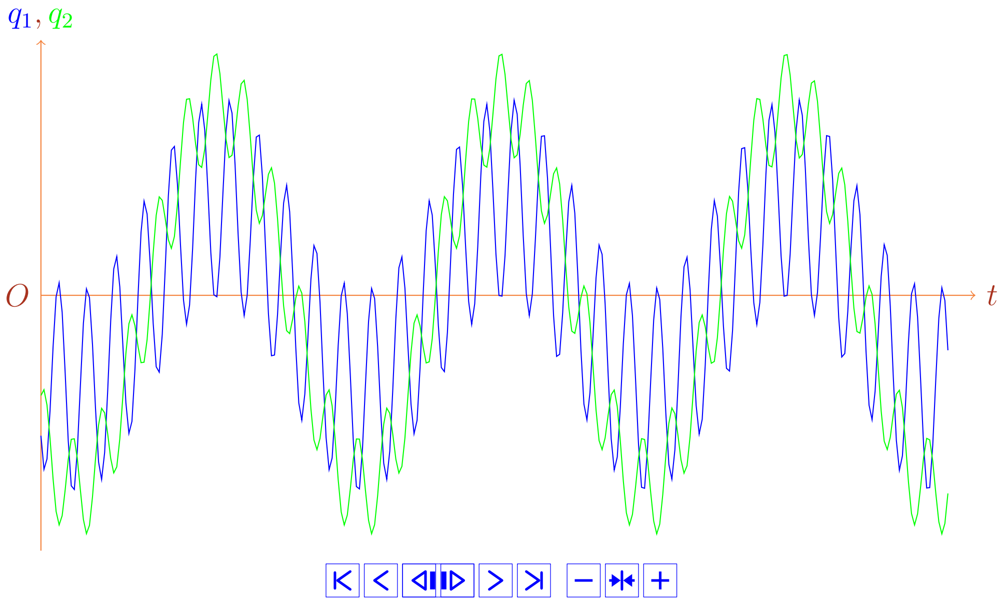

Рис. 5. Влияние коэффициента $A_1 = B_1$.

или
$$32p^4 + 144p^3 + 364p^2 + 500p + 625 = 0.$$
Преобразуем его:
$$4 \cdot 8p^4 + (4 \cdot 4 + 8 \cdot 16)p^3 + (8 \cdot 25 + 4 \cdot 16 + 25 \cdot 4)p^2 + (4 \cdot 25 + 25 \cdot 16)p + 25 \cdot 25 = 0,$$
$$(8p^2 + 4p + 25)(4p^2 + 16p + 25) = 0.$$
Решая квадратные уравнения, получим четыре простых комплексных корня: $p_1 = -\frac{1}{4} + \frac{7}{4}\,j$, $p_2 = -\frac{1}{4} - \frac{7}{4}\,j$, $p_3 = -2 + \frac{3}{2}\,j$, $p_4 = -2 - \frac{3}{2}\,j$. Следовательно, решение надо искать в виде
$$\begin{aligned}
x_1 &= \left(A_1 \cos\frac{7t}{4} + B_1 \sin\frac{7t}{4}\right) e^{-t/4} + \left(P_1 \cos\frac{3t}{2} + Q_1 \sin\frac{3t}{2}\right) e^{-2t},\\
x_2 &= \left(A_2 \cos\frac{7t}{4} + B_2 \sin\frac{7t}{4}\right) e^{-t/4} + \left(P_2 \cos\frac{3t}{2} + Q_2 \sin\frac{3t}{2}\right) e^{-2t},\\
x_3 &= \left(A_3 \cos\frac{7t}{4} + B_3 \sin\frac{7t}{4}\right) e^{-t/4} + \left(P_3 \cos\frac{3t}{2} + Q_3 \sin\frac{3t}{2}\right) e^{-2t},\\
x_4 &= \left(A_4 \cos\frac{7t}{4} + B_4 \sin\frac{7t}{4}\right) e^{-t/4} + \left(P_4 \cos\frac{3t}{2} + Q_4 \sin\frac{3t}{2}\right) e^{-2t}.
\end{aligned} \tag{П6}$$
Снова подставляем выписанные функции в систему (П2), принимающую в данном случае вид
$$\begin{cases}
x_1' = x_2,\\
x_2' = -\dfrac{569}{72}\,x_1 - \dfrac{9}{2}\,x_2 + \dfrac{5125}{2592}x_3,\\
x_3' = x_4,\\
x_4' = 4x_1 - \dfrac{125}{36}\,x_3,
\end{cases} \tag{П7}$$
чтобы получить алгебраическую систему для отыскания неопределенных коэффициентов:
$$-\frac{1}{4}\,A_1 - A_2 + \frac{7}{4}\,B_1 = 0,\ -\frac{7}{4}\,A_1 - \frac{1}{4}\,B_1 - B_2 = 0,$$

$$\frac{569}{72}A_1+\frac{17}{4}A_2-\frac{5125}{2592}A_3+\frac{7}{4}B_2=0,\ -\frac{7}{4}A_2+\frac{569}{72}B_1+\frac{17}{4}B_2-\frac{5125}{2592}B_3=0,$$
$$-\frac{1}{4}A_3-A_4+\frac{7}{4}B_3=0,\ -\frac{7}{4}A_3-\frac{1}{4}B_3-B_4=0,$$
$$-\frac{7}{4}A_4-4B_1+\frac{125}{36}B_3-\frac{1}{4}B4=0,\ -4A_1+\frac{125}{36}A_3-\frac{1}{4}A_4+\frac{7}{4}B_4=0,$$
$$-2P_1-P_2+\frac{3}{2}Q_1=0,\ -\frac{3}{2}P_1-2Q_1-Q_2=0,$$
$$\frac{569}{72}P_1+\frac{5}{2}P_2-\frac{5125}{2592}P_3+\frac{3}{2}Q_2=0,\ -\frac{3}{2}P_2+\frac{569}{72}Q_1+\frac{5}{2}Q_2-\frac{5125}{2592}Q_3=0,$$
$$-2P_3-P_4+\frac{3}{2}Q_3=0,\ -\frac{3}{2}P_4-4Q_1+\frac{125}{36}Q_3-2Q_4=0,$$
$$-\frac{3}{2}P_3-2Q_3-Q_4=0,\ -4P_1+\frac{125}{36}P_3-2P_4+\frac{3}{2}Q_4=0.$$

Несложный подсчет показывает, что

$$A_2=-\frac{1}{4}A_1+\frac{7}{4}B_1,\ B_2=-\frac{7}{4}A_1-\frac{1}{4}B_1,\ P_2=-2P_1+\frac{3}{2}Q_1,\ Q_2=-\frac{3}{2}P_1-2Q_1,$$
$$A_3=\frac{9792A_1+18144B_1}{5125},\ B_3=\frac{-18144A_1+9792B_1}{5125},\ P_3=\frac{1692P_1+1944Q_1}{5125},$$
$$Q_3=\frac{-1944P_1+1692Q_1}{5125},\ A_4=\frac{-1368A_1+504B_1}{205},\ B_4=\frac{-504A_1-1368B_1}{205},$$
$$P_4=\frac{-252P_1-54Q_1}{205},\ Q_4=\frac{54P_1-252Q_1}{205}.$$

Если подставить полученные выражения в функции (П6), последние составят общее решение системы дифференциальных уравнений (П7). Мы, однако, не станем этим заниматься, лишь отметим, что указанное решение имеет ту особенность, что в него входят произведения тригонометрических функций на экспоненты, которых не было в предыдущих двух случаях. Графики функций q_1 и q_2 показаны на рис. 6.

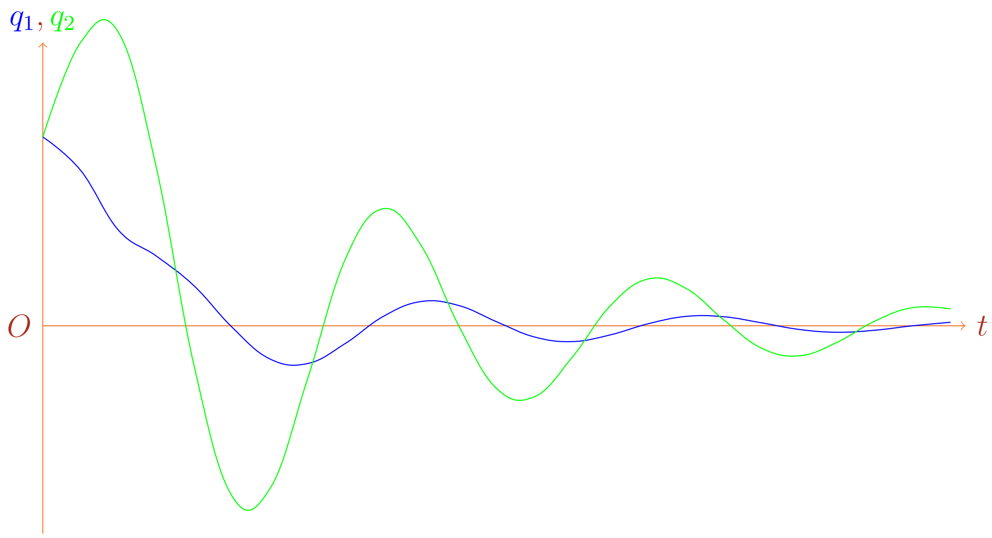

Рис. 6. Затухающие колебания

[2)]Проведем решение примера 4 в полуавтоматическом режиме, стараясь максимально использовать систему *Mathematica*. Но, чтобы составить характеристическое уравнение матрицы, сначала научимся задавать последнюю. Шаблон матрицы можно выщелкнуть из панели инструментов, а можно дважды нажать комбинацию клавиш `Ctrl` `Enter`, а затем дважды — комбинацию клавиш `Ctrl` `,`. Получится следующий шаблон матрицы, квадратики которого надо заполнить ее элементами:

$$\begin{matrix} \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \end{matrix}$$

Применяя к матрице оператор `Det`, вычисляющий определитель, получим левую часть характеристического уравнения матрицы (характеристический многочлен):

$$\text{det = Det}\left[\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} - \text{p}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right]$$

$$20 - 22\,\text{p} + 8\,\text{p}^2 - p^3$$

Найдем корни характеристического уравнения:

```
Solve[det == 0]
```

$$\{\{\text{p} \to 2\}, \{\text{p} \to 3 - \text{I}\}, \{\text{p} \to 3 + \text{I}\}\}$$

Как предлагалось на лекции, будем искать общее решение в виде

```
x = A1 e^(2t) + (A2 Cos[t] + A3 Sin[t]) e^(3t);
y = B1 e^(2t) + (B2 Cos[t] + B3 Sin[t]) e^(3t);
z = C1 e^(2t) + (C2 Cos[t] + C3 Sin[t]) e^(3t);
```

Подставим эти выражения в заданную систему дифференциальных уравнений:

$$\text{eqn} = \{\partial_t \text{x} - 2\,\text{x} - \text{y} == 0,\ \partial_t \text{y} - \text{x} - 3\,\text{y} + \text{z} == 0,\ \partial_t \text{z} + \text{x} - 2\,\text{y} - 3\,\text{z} == 0\} \text{ // Expand}$$

$$\begin{aligned}\big\{&-\text{B1e}^{2t} + \text{A2 e}^{3t}\,\text{Cos[t]} + \text{A3 e}^{3t}\,\text{Cos[t]} - \text{B2 e}^{3t}\,\text{Cos[t]} - \text{A2 e}^{3t}\,\text{Sin[t]} + \\ &\text{A3 e}^{3t}\,\text{Sin[t]} - \text{B3 e}^{3t}\,\text{Sin[t]} == 0, \\ &-\text{A1 e}^{2t} - \text{B1 e}^{2t} + \text{C1 e}^{2t} - \text{A2 e}^{3t}\,\text{Cos[t]} + \text{B3 e}^{3t}\,\text{Cos[t]} + \text{C2 e}^{3t}\,\text{Cos[t]} - \\ &\text{A3 e}^{3t}\,\text{Sin[t]} - \text{B2 e}^{3t}\,\text{Sin[t]} + \text{C3 e}^{3t}\,\text{Sin[t]} == 0, \\ &\text{A1 e}^{2t} - 2\text{B1 e}^{2t} - \text{C1 e}^{2t} + \text{A2 e}^{3t}\,\text{Cos[t]} - 2\text{B2 e}^{3t}\text{Cos[t]} + \text{C3 e}^{3t}\,\text{Cos[t]} + \\ &\text{A3 e}^{3t}\,\text{Sin[t]} - 2\text{B3 e}^{3t}\,\text{Sin[t]} - \text{C2 e}^{3t}\,\text{Sin[t]} == 0\big\}\end{aligned}$$

Чтобы приравнять коэффициенты при одинаковых линейно-независимых функциях e^{2t}, $e^{3t}\cos t$, $e^{3t}\sin t$, будем по очереди одну из них заменять единицей, а остальные нулями:

$$\begin{aligned}\text{eqnP} = \text{Union}\big[&\text{eqn /. }\{e^{2t} \to 1,\ \text{Cos[t]e}^{3t} \to 0,\ \text{Sin[t]e}^{3t} \to 0\}, \\ &\text{eqn /. }\{e^{2t} \to 0,\ \text{Cos[t]e}^{3t} \to 1,\ \text{Sin[t]e}^{3t} \to 0\}, \\ &\text{eqn /. }\{e^{2t} \to 0,\ \text{Cos[t]e}^{3t} \to 0,\ \text{Sin[t]e}^{3t} \to 1\}\end{aligned}$$

```
{-B1 == 0, A2 + A3 - B2 == 0, -A2 + A3 - B3 == 0, A1 - 2 B1 - C1 == 0, -A1 - B1 + C1 == 0,
  A3 - 2 B3 - C2 == 0, -A2 + B3 + C2 == 0, A2 - 2 B2 + C3 == 0, -A3 - B2 + C3 == 0}
```

Выразим A_2, A_3, B_1, B_2, C_1, C_3 через остальные коэффициенты:

```
sol = Solve[eqnP, {B1, B2, A2, A3, C3, C1}]
{{B1 → 0, B2 → 3 B3 + 2 C2, A2 → B3 + C2, A3 → 2 B3 + C2, C3 → 5 B3 + 3 C2, C1 → A1}}
```

Запишем общее решение заданной системы уравнений:

```
xx = x /. sol[[1]]; yy = y /. sol[[1]]; zz = z /. sol[[1]];
```

```
Print["x(t) =", xx]; Print["y(t) =", yy]; Print["z(t) =", zz];
```

$x(t) = A1\,e^{2t} + e^{3t}\,((B3 + C2)\,Cos[t] + (2\,B3 + C2)\,Sin[t])$

$y(t) = e^{3t}\,((3\,B3 + 2\,C2)\,Cos[t] + B3\,Sin[t])$

$z(t) = A1\,e^{2t} + e^{3t}\,(C2\,Cos[t] + (5\,B3 + 3\,C2)\,Sin[t])$

Если имеются начальные условия $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$, $z(0) = z_0$, то произвольные постоянные можно выразить через x_0, y_0, z_0:

```
solv = Solve[{(xx /. t -> 0) == x0, (yy /. t -> 0) == y0, (zz /. t -> 0) == z0}, {A1,B3,C2}]
```

$\left\{\left\{A1 \to 1/2\,(3\,x0 - y0 - z0),\ B3 \to x0 - z0,\ C2 \to -((3\,x0)/2) + y0/2 + (3\,z0)/2\right\}\right\}$

и получить общее решение в виде

```
Print["x(t) =", xx /. solv[[1]] // FullSimplify]
Print["y(t) =", yy /. solv[[1]] // FullSimplify]
Print["z(t) =", zz /. solv[[1]] // FullSimplify]
```

$x(t) = \frac{1}{2}\,e^{2t}\left(3\,x0 - y0 - z0 + e^{t}\,((-x0 + y0 + z0)\,Cos[t] + (x0 + y0 - z0)\,Sin[t])\right)$

$y(t) = e^{3t}\,(y0\,Cos[t] + (x0 - z0)\,Sin[t])$

$z(t) = \frac{1}{2}\,e^{2t}\left((3\,x0 - y0 - z0 + e^{t}\,((-3\,x0 + y0 + 3z0)\,Cos[t] + (x0 + 3\,y0 - z0)\,Sin[t])\right)$

Для конкретных числовых начальных условий можно получить частное решение системы:

```
Print["x(t) =", xx /. solv[[1]] /. {x0 -> 1, y0 -> -1, z0 -> -2}]
Print["y(t) =", yy /. solv[[1]] /. {x0 -> 1, y0 -> -1, z0 -> -2}]
Print["z(t) =", zz /. solv[[1]] /. {x0 -> 1, y0 -> -1, z0 -> -2}]
```

$x(t) = 3e^{2t} + e^{3t}\,(-2\,Cos[t] + Sin[t])$

$y(t) = e^{3t}\,(-\,Cos[t] + 3\,Sin[t])$

$x(t) = 3e^{2t} - 5\,e^{3t}\,Cos[t]$

Литература

[1] Бугров Я.С., Никольский С.М. *Высшая математика. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного.* – М.: Наука, 1985, – с. 100-106, 109-113.

[2] Письменный Д.Т. *Конспект лекций по высшей математике.* – М.: Рольф, 2000. Ч. 1. – с. 51–56.

[3] Федорюк М.В. *Обыкновенные дифференциальные уравнения.* – М.: Наука, 1985, – с. 59–67, 71-78.