Нормальные системы дифференциальных уравнений

Волченко Ю.М.

Содержание лекции

Нормальная система дифференциальных уравнений (ДУ). Фазовое пространство и фазовый портрет системы. Понятие решения системы ДУ. Решение системы ДУ методом исключения неизвестных. Линейные системы ДУ. Однородная и неоднородная системы. Фундаментальная система решений линейной однородной системы, структура ее общего решения. Фундаментальная матрица системы.

Анимация графиков решений и фазовых портретов систем.
Анимация работает только в программе Acrobat Reader!

Mathematica решает системы ДУ и рассчитывает электронные схемы.

21 июля 2014 г.

1 Основные понятия

Из всех систем дифференциальных уравнений мы рассмотрим только так называемые ***нормальные системы***, которые записывают в виде

$$\begin{cases} x_1' = f_1\left(t, x_1, \ldots, x_n\right), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n' = f_n\left(t, x_1, \ldots, x_n\right), \end{cases} \tag{1}$$

где t — независимая переменная; $x_1\left(t\right), \ldots, x_n\left(t\right)$ — неизвестные функции аргумента t; $f_1, \ldots, f_n$ — заданные функции (правые части системы). Число уравнений, входящих в систему, называется ее ***порядком***. Так что выписанная система — это система n-го порядка.

Если ввести векторы $\mathbf{x}^T\left(t\right) = \left(x_1\left(t\right), \ldots, x_n\left(t\right)\right)$, $\mathbf{x}'^T\left(t\right) = \left(x_1'\left(t\right), \ldots, x_n'\left(t\right)\right)$ и $\mathbf{f}^T = \left(f_1, \ldots, f_n\right)$, то систему (1) можно записать компактнее:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}\left(t, \mathbf{x}\right). \tag{2}$$

Вектор $\mathbf{x}\left(t\right)$ называется ***фазовым вектором*** системы, а его координаты — ***фазовыми координатами*** точки, описывающей ***траекторию движения*** системы. Этой точкой, очевидно, является конец радиус-вектора $\mathbf{x}\left(t\right)$.

Пространство, образованное векторами $\mathbf{x}(t)$ называется ***фазовым пространством*** (при $n = 2$ – ***фазовой плоскостью***) системы. Траектория движения системы называется также ее ***фазовым портретом***. Понятно, что фазовый вектор системы является векторной функцией скалярного аргумента t.

Если правая часть системы (2) не зависит явно от параметра t, то такая система называется ***автономной*** и записывается в виде

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}).$$

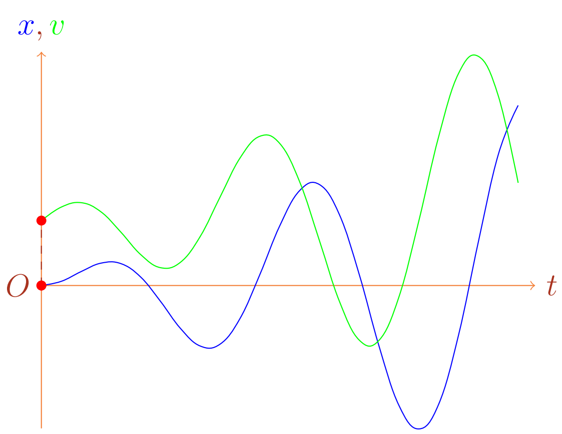
Пример 1. *Механическое движение материальной точки вдоль оси абсцисс может быть задано системой дифференциальных уравнений:*

$$\begin{cases} x' = v, \\ mv' = f, \end{cases}$$

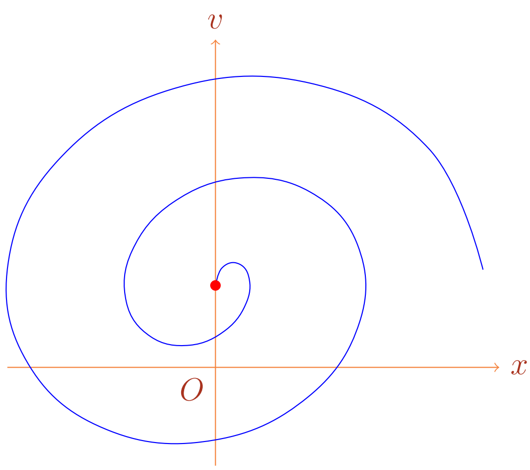
где x – положение точки на оси, v – ее скорость, m – ее масса, f – действующая на точку сила. Построить фазовый портрет системы для фазового вектора $\mathbf{x}^T(t) = (x(t), v(t))$, если $m = 1$, $f(t) = 2\cos t - t\sin t$.

Решение. Фазовым пространством заданной механической системы является плоскость переменных (x, v). Решая второе уравнение системы при начальном условии $v(0) = 5$, найдем, что $v(t) = 5 + t\cos t + \sin t$, а решая ее первое уравнение при начальном условии $x(0) = 0$, получим $x(t) = t\sin t$.

На анимационном рис. 1, а) изображены графики функций $x(t)$ и $v(t)$, а на рис. 1, б) – фазовый портрет системы. Очевидно, что фазовый портрет и графики фазовых координат – далеко не одно и то же. Анимация показывает движение фазовой точки вдоль траектории в фазовом пространстве в соответствии с изменением положения и скорости реальной физической точки. □



а)



б)

Рис. 1. Фазовый портрет движения материальной точки.

Решением системы (2) в интервале (t_0, T) называется вектор-функция

$$\mathbf{x}^T(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$$

такая, что все ее координаты определены и непрерывны в интервале (t_0, T), и после ее подстановки в систему (2) вместо неизвестной вектор-функции, эта система обращается в верное векторное тождество.

Обычно требуется решить систему (2) при ***начальных условиях***

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0. \tag{3}$$

Задачей Коши называется задача решения системы (2) при начальных условиях (3).

Теорема 1 (о существовании и единственности решения задачи Коши). *Пусть функции f_j непрерывны и ограничены в ограниченной замкнутой области $G = \{(t, x_1, \ldots, x_n)\}$, в которой ограничены все производные $\partial f_j / \partial x_i$. Тогда задача Коши имеет единственное решение на некотором отрезке $[t_0, T]$.*

Общим решением уравнения (2) называется вектор $\boldsymbol{\varphi}(t_0, C_1, \ldots, C_n)$, который является решением системы (2) при любых значениях произвольных постоянных $C_1, \ldots, C_n$, а эти постоянные всегда можно подобрать так, чтобы обеспечить выполнение любых начальных условий вида (3):

$$\boldsymbol{\varphi}(t_0, C_1, \ldots, C_n) = \mathbf{x}_0.$$

Частным решением системы (2) называется ее общее решение при конкретных значениях произвольных постоянных $C_1, \ldots, C_n$.

Важность нормальной системы дифференциальных уравнений заключается в том, что к такой системе приводится любая система дифференциальных уравнений, разрешенных относительно старшей производной неизвестной функции.

Действительно, пусть вначале имеется лишь одно дифференциальное уравнение n-го порядка

$$x^{(n)} = f\left(t, x, x', \ldots, x^{(n-1)}\right),$$

где $x(t)$ — неизвестная функция. Введем вместо нее целый ряд новых переменных

$$x_1 = x,\ x_2 = x', \ldots,\ x_n = x^{(n-1)}$$

и с их помощью получим нормальную систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} x_1' = x_2, \\ x_2' = x_3, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_{n-1}' = x_n, \\ x_n' = f(t, x_1, \dots, x_n), \end{cases}$$

которая равносильна исходному дифференциальному уравнению.

Таким же способом и систему дифференциальных уравнений разных порядков, если каждое из них разрешено относительно своей старшей производной, можно привести к нормальной системе дифференциальных уравнений.

Пример 2. *Привести к нормальной системе дифференциальных уравнений систему из двух уравнений*

$$\begin{cases} x'' = x^2 + t^2, \\ z''' = \sin z + e^z, \end{cases}$$

с неизвестными функциями $x(t)$ *и* $z(t)$.

Решение. Введем новые переменные:

$$x_1 = x,\ x_2 = x',\ x_3 = z,\ x_4 = z',\ x_5 = z''.$$

Получаем требуемую нормальную систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} x_1' = x_2, \\ x_2' = x_1^2 + t^2, \\ x_3' = x_4, \\ x_4' = x_5, \\ x_5' = \sin x_3 + e^{x_3}. \end{cases}$$

2 Метод исключения неизвестных

Рассмотрим один способ решения нормальной системы дифференциальных уравнений, известный как метод исключения неизвестных. В предыдущем п. мы видели, как дифференциальное уравнение n-го порядка с помощью введения новых неизвестных превращается в нормальную систему дифференциальных уравнений такого же порядка. В процессе применения метода исключения неизвестных мы увидим, как, наоборот, нормальная система дифференциальных уравнений превращается в одно дифференциальное уравнение того же порядка, что система. Правда, второе превращение выполнимо не при любых условиях. Впоследствии мы убедимся в более глубоких связях между одним дифференциальным уравнением и порожденной им (или порождающей его) системой дифференциальных уравнений.

Продифференцируем по t первое уравнение системы (1):

$$x_1'' = \frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{\partial f_1}{\partial x_1}\, x_1' + \ldots + \frac{\partial f_1}{\partial x_n}\, x_n'.$$

Заменив в этом выражении производные $x_1', \ldots, x_n'$ их выражениями из уравнений (1), придем к равенству

$$x_1'' = F_2\left(t, x_1, \ldots, x_n\right).$$

Теперь продифференцируем это уравнение:

$$x_1''' = \frac{\partial F_2}{\partial t} + \frac{\partial F_2}{\partial x_1}\, x_1' + \ldots + \frac{\partial F_2}{\partial x_n}\, x_n',$$

и снова заменим $x_1', \ldots, x_n'$ правыми частями (1):

$$x_1''' = F_3\left(t, x_1, \ldots, x_n\right).$$

Продолжая и т. д., придем к уравнению

$$x_1^{(n)} = F_n\left(t, x_1, \ldots, x_n\right).$$

Первое из уравнений (1) и полученные уравнения запишем в виде системы

$$\begin{cases} x_1' = f_1\left(t, x_1, \ldots, x_n\right), \\ x_1'' = F_2\left(t, x_1, \ldots, x_n\right), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_1^{(n)} = F_n\left(t, x_1, \ldots, x_n\right). \end{cases} \tag{4}$$

Решая первые из $(n-1)$-го уравнения этой системы (*считая, что такая подсистема разрешима*), выразим функции $x_2, \ldots, x_n$ через t и x_1:

$$\begin{cases} x_2 = \varphi_2\left(t, x_1, x_1', \ldots, x_1^{(n-1)}\right), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = \varphi_n\left(t, x_1, x_1', \ldots, x_1^{(n-1)}\right). \end{cases} \tag{5}$$

Подставив эти выражения для переменных в последнее уравнение (4), получим дифференциальное уравнение n-го порядка

$$x_1^{(n)} = \Phi\left(t, x_1, x_1', \ldots, x_1^{(n-1)}\right).$$

Решая его уже известными нам методами, найдем

$$x_1 = \psi_1\left(t, C_1, \ldots, C_n\right).$$

Продифференцировав это равенство $(n-1)$ раз, определим производные $x_1', \ldots, x_1^{(n-1)}$ как функции $t, C_1, \ldots, C_n$. Подставляя полученные выражения в систему (5), определим остальные неизвестные функции:

$$\begin{gathered} x_2 = \psi_2\left(t, C_1, \ldots, C_n\right), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n = \psi_n\left(t, C_1, \ldots, C_n\right). \end{gathered}$$

Пример 3. *Найти общее решение системы дифференциальных уравнений*

$$\left\{\begin{array}{l} x' = 4x + 6y, \\ y' = 2x + 3y + t. \end{array}\right.$$

Решение. Продифференцируем первое уравнение системы:

$$x'' = 4x' + 6y',$$

и подставим в него вместо производной y' ее выражение из первого уравнения заданной системы:

$$x'' = 4x' + 6\left(2x + 3y + t\right) = 4x' + 12x + 18y + 6t.$$

Составим новую систему дифференциальных уравнений:

$$\left\{\begin{array}{l} x' = 4x + 6y, \\ x'' = 4x' + 12x + 18y + 6t. \end{array}\right.$$

Найдем y из первого уравнения:

$$y = \frac{1}{6}\left(x' - 4x\right). \tag{6}$$

Подставим это выражение для y во второе уравнение последней системы:

$$x'' = 4x' + 12x + 3\left(x' - 4x\right) + 6t,$$

или

$$x'' - 7x' = 6t. \tag{7}$$

Для решения этого неоднородного уравнения составим соответствующее ему характеристическое уравнение $p^2 - 7p = 0$, имеющее корнями $p_1 = 0$, $p_2 = 7$. Следовательно, общим решением соответствующего однородного уравнения будет

$$x^* = C_1 + C_2 e^{7x}.$$

Частное решение неоднородного уравнения будем искать в виде

$$\overline{x} = t\left(At + B\right) = At^2 + Bt,$$

для чего найдем производные функции $\overline{x}$:

$$\overline{x}' = 2At + B,\ \overline{x}'' = 2A.$$

Подставим выражения для этой функции и ее производных в уравнение (7) и выполним поиск неопределенных коэффициентов:

$$2A - 14At - 7B = 6t,$$

$$-14A = 6,\ 2A - 7B = 0,$$
$$A = -\frac{3}{7},\ B = -\frac{6}{49}.$$

Таким образом, общее решение неоднородного уравнения получается таким:

$$x = x^* + \overline{x} = C_1 + C_2 e^{7t} - \frac{3}{7}\,t\left(t + \frac{2}{7}\right).$$

Используя найденное решение и его производную

$$\overline{x}' = 7C_2 e^{7t} - \frac{6}{7}\left(t + \frac{1}{7}\right),$$

найдем вторую неизвестную функцию из равенства (6):

$$y = \frac{1}{6}\left\{7C_2 e^{7t} - \frac{6}{7}\left(t + \frac{1}{7}\right) - 4\left[C_1 + C_2 e^{7t} - \frac{3}{7}\,t\left(t + \frac{2}{7}\right)\right]\right\} =$$
$$= -\frac{2}{3}\,C_1 + \frac{1}{2}\,C_2 e^{7t} + \frac{1}{7}\left(2t^2 - \frac{3}{7}\,t - \frac{1}{7}\right).$$

Значит, общим решением заданной системы дифференциальных уравнений является пара функций

$$x\left(t\right) = C_1 + C_2 e^{7t} - \frac{3}{7}\,t\left(t + \frac{2}{7}\right),$$
$$y\left(t\right) = -\frac{2}{3}\,C_1 + \frac{1}{2}\,C_2 e^{7t} + \frac{1}{7}\left(2t^2 - \frac{3}{7}\,t - \frac{1}{7}\right).$$

□

Пример расчета характеристик двух индуктивно связанных электрических контуров рассмотрен в Приложении[1)].

3 Линейные системы дифференциальных уравнений

Из всего множества нормальных систем дифференциальных уравнений выделяются, как имеющие наиболее важное значение, ***линейные системы***:

$$\begin{cases} x_1' = a_{11}\left(t\right)x_1 + \ldots + a_{1n}\left(t\right)x_n + f_1(t), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n' = a_{n1}\left(t\right)x_1 + \ldots + a_{nn}\left(t\right)x_n + f_n(t), \end{cases}$$

где $a_{ij}\left(t\right)$, $f_i\left(t\right)$ — заданные функции, $x_i\left(t\right)$ — неизвестные функции.

Если ввести ***матрицу системы***

$$\mathbf{A}\left(t\right) = \begin{pmatrix} a_{11}\left(t\right) & \cdots & a_{1n}\left(t\right) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}\left(t\right) & \cdots & a_{nn}\left(t\right) \end{pmatrix},$$

вектор-столбцы неизвестных функций, их производных и свободных членов

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \cdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \ \mathbf{x}'(t) = \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ \cdots \\ x_n'(t) \end{pmatrix}, \ \mathbf{f}(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \cdots \\ f_n(t) \end{pmatrix},$$

то система примет векторно-матричный вид:

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}(t)\,\mathbf{x}(t) + \mathbf{f}(t). \tag{8}$$

Теорема 2 (о существовании и единственности решения задачи Коши). *Если функции $a_{ij}(t)$, $f_i(t)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$, то система* (8) *имеет единственное решение, удовлетворяющее условию* (3) *при $t_0 \in [a, b]$.*

Если $\mathbf{f}(t) \equiv \mathbf{0}$, то система (8) называется ***однородной***, в противном случае — ***неоднородной***.

Как в случае одного линейного дифференциального уравнения n-го порядка важную роль играло решение однородного уравнения, так и в случае линейных систем важную роль играет решение именно однородной системы. Для изложения во многом аналогичной теории нам понадобится понятие производной матрицы. Принято считать что ***производная*** матрицы $\mathbf{A} = \{a_{ij}(t)\}$, элементами которой являются функции, есть матрица, состоящая из производных, взятых от элементов матрицы:

$$\mathbf{A}' \triangleq \left\{a_{ij}'(t)\right\}.$$

Далее приводятся некоторые свойства дифференцирования матриц, первые два из которых очевидны.

СВОЙСТВА ПРОИЗВОДНЫХ ОТ МАТРИЦ

1° *Если элементы матрицы $\mathbf{C}$ — константы, то производная от такой матрицы-константы равна нулевой матрице:*

$$(\mathbf{C})' = \mathbf{0}.$$

2° *Производная суммы матриц равна сумме производных матриц-слагаемых:*

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})' = \mathbf{A}' + \mathbf{B}'.$$

3° *Производная произведения матриц вычисляется по формуле*

$$(\mathbf{AB})' = \mathbf{A}'\mathbf{B} + \mathbf{AB}'.$$

Следует из определения произведения матриц и производной произведения двух скалярных функций:

$$(\mathbf{AB})' = \left\{ \sum_k \left[a_{ik}(t)\, b_{kj}(t)\right]' \right\} = \left\{ \sum_k \left[a'_{ik}(t)\, b_{kj}(t) + a_{ik}(t)\, b'_{kj}(t)\right] \right\} = \\ = \mathbf{A}'\mathbf{B} + \mathbf{AB}',$$

где $\mathbf{B} = \{b_{kj}(t)\}$.

4° *Производная обратной матрицы вычисляется по формуле*

$$\left(\mathbf{A}^{-1}\right)' = -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}'\mathbf{A}^{-1}.$$

Действительно, так как $\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{E}$, где $\mathbf{E}$ – единичная матрица, то $\left(\mathbf{AA}^{-1}\right)' = \mathbf{A}'\mathbf{A}^{-1} + \mathbf{A}\left(\mathbf{A}^{-1}\right)' = \mathbf{0}$, откуда $\mathbf{A}\left(\mathbf{A}^{-1}\right)' = -\mathbf{A}'\mathbf{A}^{-1}$, $\left(\mathbf{A}^{-1}\right)' = -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}'\mathbf{A}^{-1}$.

Интеграл от матрицы определяется следующим образом:

$$\int_{t_0}^{t} \mathbf{A}(\tau)\, d\tau = \left\{ \int_{t_0}^{t} a_{ij}(\tau)\, d\tau \right\}.$$

Для него справедлива матричная формула Ньютона-Лейбница

$$\int_{t_0}^{t} \mathbf{F}(\tau)\, d\tau = \mathbf{\Phi}(t) - \mathbf{\Phi}(t_0),$$

где $\mathbf{\Phi}(t)$ – матрица-первообразная, обладающая свойством: $\mathbf{\Phi}'(t) = \mathbf{F}(t)$.

Теорема 3. *Если функции* $\mathbf{x}_1(t), \ldots, \mathbf{x}_n(t)$ *являются решениями однородной системы*

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}(t)\,\mathbf{x}(t), \tag{9}$$

то их линейная комбинация

$$\boxed{\mathbf{x}(t) = \sum_{j=1}^{n} C_j \mathbf{x}_j(t)} \tag{10}$$

тоже будет ее решением.

Доказательство. Продифференцируем функцию (10) и преобразуем результат, учитывая, что $\mathbf{x}'_i(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}_i(t)$:

$$\mathbf{x}'(t) = \sum_{i=1}^{n} C_i \mathbf{x}'_i(t) = \sum_{i=1}^{n} C_i \mathbf{A}(t)\mathbf{x}_i(t) = \mathbf{A}(t) \sum_{i=1}^{n} C_i \mathbf{x}_i(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t).$$

Следовательно, функция (10) является решением уравнения (9). □

Система вектор-функций $\mathbf{x}_1(t)$, …, $\mathbf{x}_m(t)$ называется ***линейно независимой*** в интервале (a,b), если в этом интервале из равенства

$$C_1\mathbf{x}_1(t) + \ldots + C_m\mathbf{x}_m(t) \equiv 0$$

следует, что $C_1 = \ldots = C_m = 0$. В противном случае она называется ***линейно зависимой***.

Пусть $\mathbf{x}_1(t) = (x_{11}(t)\ldots x_{n1}(t))^T$, …, $\mathbf{x}_n(t) = (x_{1n}(t)\ldots x_{nn}(t))^T$. ***Определителем Вронского***, или ***вронскианом***, системы вектор-функций $\mathbf{x}_1(t)$, …, $\mathbf{x}_n(t)$ называется определитель вида

$$\mathbf{W}(t) = \mathbf{W}[\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n] = \begin{vmatrix} x_{11}(t) & \ldots & x_{1n}(t) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ x_{n1}(t) & \ldots & x_{nn}(t) \end{vmatrix}.$$

Теорема 4. *Если система вектор-функций $\mathbf{x}_1(t), \ldots, \mathbf{x}_n(t)$ линейно зависима в (a,b), то вронскиан $\mathbf{W}(t) \equiv 0$ в (a,b).*

Доказательство. Для любого $t \in (a,b)$ имеем

$$C_1\mathbf{x}_1(t) + \ldots + C_n\mathbf{x}_n(t) \equiv 0,$$

причем, не все C_i равны нулю. Это означает линейную зависимость столбцов вронскиана, из чего и следует его равенство нулю.

Следствие 1. *Если хотя бы для одного $t \in (a,b)$ вронскиан $\mathbf{W}(t) \neq 0$, то система функций $\mathbf{x}_1(t), \ldots, \mathbf{x}_n(t)$ линейно независима в (a,b).*

Теорема 5. *Для того чтобы решения $\mathbf{x}_1(t), \ldots, \mathbf{x}_n(t)$ однородной системы (9) были линейно независимы в интервале (a,b), в котором непрерывны коэффициенты $a_{ij}(t)$, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\forall\,(t_0 \in (a,b))\ W[\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n] \neq 0.$$

Доказательство приведено в Приложении[2)].

Фундаментальной системой решений (ФСР) однородной системы (9) называется система из n линейно независимых ее решений.

Теорема 6. *Общее решение однородной системы (9) имеет вид (10) в интервале (a,b), в котором $\mathbf{x}_1(t), \ldots, \mathbf{x}_n(t)$ — ФСР для системы (9).*

Доказательство см. в Приложении[3)].

Теорема 7. *Если коэффициенты $a_{ij}(t)$ системы* (9) *непрерывны в интервале (a, b), то в (a, b) существует ФСР этой системы.*

Доказательство отнесено в Приложение[4)].

Фундаментальной матрицей системы (9) называется матрица, столбцами которой являются решения $\mathbf{x}_1(t), \ldots, \mathbf{x}_n(t)$ этой системы, образующие ФСР:

$$\mathbf{X}(t) = (\mathbf{x}_1(t) \ldots \mathbf{x}_n(t)) = \begin{pmatrix} x_{11}(t) & \ldots & x_{n1}(t) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ x_{1n}(t) & \ldots & x_{nn}(t) \end{pmatrix}$$

Фундаментальная матрица системы (9) удовлетворяет матричному уравнению:

$$\mathbf{X}' = \mathbf{A}(t)\,\mathbf{X}.$$

Действительно,

$$\mathbf{X}' = (\mathbf{x}_1' \ldots \mathbf{x}_n') = (\mathbf{A}(t)\,\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{A}(t)\,\mathbf{x}_n) = \left\{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)\,x_{jk}\right\} = \mathbf{A}(t)\mathbf{X}.$$

Очевидно, общее решение системы (9) может быть записано в виде

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{X}(t)\,\mathbf{C}, \tag{11}$$

где $\mathbf{C} = (C_1, \ldots, C_n)^T$ — вектор произвольных постоянных. Полагая в (11) $t = t_0$, получим $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{X}(t_0)\,\mathbf{C}$, откуда $\mathbf{C} = \mathbf{X}^{-1}(t_0)\,\mathbf{x}(t_0)$. Поэтому равенство (11) переписывается так:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{X}(t)\,\mathbf{X}^{-1}(t_0)\,\mathbf{x}(t_0).$$

Матрица

$$\mathbf{K}(t, t_0) = \mathbf{X}(t)\,\mathbf{X}^{-1}(t_0)$$

называется ***матрицей Коши***. С ее помощью общее решение можно представить следующим образом:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{K}(t, t_0)\,\mathbf{x}(t_0).$$

В Приложении[5)] приведен пример, показывающий, как можно записать решение однородной системы, используя матрицу Коши.

Там же[6)] рассмотрены примеры решения систем дифференциальных уравнений с помощью системы *Mathematica*.

Приложение

[1)] Рассмотрим цепь, состоящую из двух контуров, связанных между собой взаимоиндукцией, см. рис. 2. Найдем токи в обоих контурах для случая, когда в эту систему подается постоянное напряжение $u(t) \equiv U = \text{const}$. Пусть начальные условия будут нулевыми: $i_1(0) = 0$, $i_2(0) = 0$.

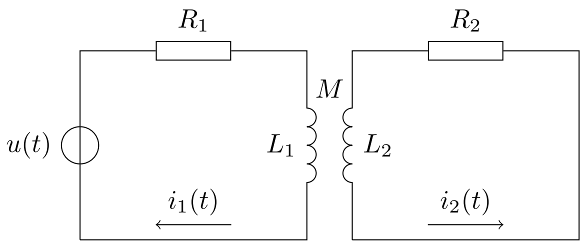


Рис. 2. Индуктивно связанные контуры.

В соответствии с правилами Кирхгофа взаимодействие таких контуров описывается следующей системой дифференциальных уравнений:

$$L_1 \frac{di_1}{dt} + R_1 i_1 + M \frac{di_2}{dt} = U, \tag{П1}$$

$$L_2 \frac{di_2}{dt} + R_2 i_2 + M \frac{di_1}{dt} = 0, \tag{П2}$$

где M — коэффициент взаимной индукции контуров. Остальные обозначения понятны из рис.

Исключим производную i_2 из второго уравнения, для чего умножим первое уравнение на L_2 и прибавим ко второму, умноженному на $-M$:

$$\left(L_1 L_2 - M^2\right) \frac{di_1}{dt} + L_2 R_1 i_1 - M R_2 i_2 = L_2 U.$$

Разделим обе части уравнения на $L_1 L_2$:

$$\left(1 - \frac{M^2}{L_1 L_2}\right) \frac{di_1}{dt} + \frac{R_1}{L_1} i_1 - \frac{M R_2}{L_1 L_2} i_2 = \frac{U}{L_1}.$$

Обозначив

$$k^2 = \frac{M^2}{L_1 L_2}, \ \alpha_1 = \frac{R_1}{2L_1}, \ \alpha_2 = \frac{R_2}{2L_2},$$

получим

$$\left(1 - k^2\right) \frac{di_1}{dt} + 2\alpha_1 i_1 - \frac{4M\alpha_1\alpha_2}{R_1} i_2 = \frac{2\alpha_1 U}{R_1}. \tag{П3}$$

Продифференцируем обе части этого уравнения, найдем выражение для $\frac{di_2}{dt}$ и подставим найденное выражение в уравнение (П1):

$$\left(1 - k^2\right) \frac{d^2 i_1}{dt^2} + 2\alpha_1 \frac{di_1}{dt} - \frac{4M\alpha_1\alpha_2}{R_1} \cdot \frac{di_2}{dt} = 0,$$

$$\frac{di_2}{dt} = \frac{\left(1 - k^2\right) R_1}{4M\alpha_1\alpha_2} \cdot \frac{d^2 i_1}{dt^2} + \frac{R_1}{2M\alpha_2} \cdot \frac{di_1}{dt},$$

$$\frac{\left(1 - k^2\right) R_1}{4\alpha_1\alpha_2} \cdot \frac{d^2 i_1}{dt^2} + \left(\frac{R_1}{2\alpha_1} + \frac{R_1}{2\alpha_2}\right) \frac{di_1}{dt} + R_1 i_1 = U.$$

Разделим обе части последнего уравнения на коэффициент при старшей производной:

$$\frac{d^2 i_1}{dt^2} + \frac{2\,(\alpha_1+\alpha_2)}{1-k^2}\cdot\frac{di_1}{dt} + \frac{4\alpha_1\alpha_2}{1-k^2}\,i_1 = \frac{4\alpha_1\alpha_2 U}{R_1\,(1-k^2)},$$

обозначим

$$\sigma = \frac{\alpha_1+\alpha_2}{1-k^2} \tag{П4}$$

и придем к линейному неоднородному дифференциальному уравнению второго порядка с постоянными коэффициентами:

$$\frac{d^2 i_1}{dt^2} + 2\sigma\frac{di_1}{dt} + \frac{4\alpha_1\alpha_2}{1-k^2}\,i_1 = \frac{4\alpha_1\alpha_2 U}{R_1\,(1-k^2)}. \tag{П5}$$

Так как дискриминант характеристического уравнения неотрицателен:

$$\beta^2 = \sigma^2 - \frac{4\alpha_1\alpha_2}{1-k^2} = \frac{(\alpha_1+\alpha_2)^2 - 4\alpha_1\alpha_2(1-k^2)}{(1-k^2)^2} = \frac{(\alpha_1-\alpha_2)^2 + 4k^2\alpha_1\alpha_2}{(1-k^2)^2} \geq 0,$$

то корни этого уравнения действительны и выражаются формулой

$$p_{1,2} = -\sigma \pm \beta.$$

Следовательно, общее решение соответствующего однородного уравнения будет таким:

$$i_1^* = \left(C_1 e^{\beta t} + C_2 e^{-\beta t}\right) e^{-\sigma t}.$$

Частное решение неоднородного уравнения (П5) будем искать в виде $\bar{i}_1 = A$. Тогда из указанного уравнения получим:

$$\cancel{\frac{4\alpha_1\alpha_2}{1-k^2}}\,A = \frac{\cancel{4\alpha_1\alpha_2}U}{R_1\cancel{(1-k^2)}},$$

откуда $A = U/R_1$ и $\bar{i}_1 = U/R_1$. Таким образом, общее решение неоднородного уравнения (П5) имеет вид

$$i_1 = i_1^* + \bar{i}_1 = \left(C_1 e^{\beta t} + C_2 e^{-\beta t}\right) e^{-\sigma t} + \frac{U}{R_1}. \tag{П6}$$

Перепишем его в терминах гиперболических функций:

$$\begin{aligned} i_1 &= \left[(C_1+C_2)\,\frac{e^{\beta t}+e^{-\beta t}}{2} + (C_1-C_2)\,\frac{e^{\beta t}-e^{-\beta t}}{2}\right] e^{-\sigma t} + \frac{U}{R_1} = \\ &= (D_1 \operatorname{ch}\beta t + D_2 \operatorname{sh}\beta t)\, e^{-\sigma t} + \frac{U}{R_1}, \end{aligned} \tag{П7}$$

где $D_1 = C_1 + C_2$, $D_2 = C_1 - C_2$.

Найдем производную этой функции:

$$\begin{aligned} \frac{di_1}{dt} &= (D_1\beta \operatorname{sh}\beta t + D_2\beta \operatorname{ch}\beta t)\, e^{-\sigma t} - \sigma\,(D_1 \operatorname{ch}\beta t + D_2 \operatorname{sh}\beta t)\, e^{-\sigma t} = \\ &= \left[(D_2\beta - \sigma D_1)\operatorname{ch}\beta t + (D_1\beta - \sigma D_2)\operatorname{sh}\beta t\right] e^{-\sigma t}. \end{aligned}$$

Подставим это выражение и выражение для i_1 из (П6) в уравнение (П3):

$$\left(1-k^2\right)\left[(D_2\beta - \sigma D_1)\operatorname{ch}\beta t + (D_1\beta - \sigma D_2)\operatorname{sh}\beta t\right] e^{-\sigma t} +$$

$$
+\,2\alpha_1\left[\left(D_1\operatorname{ch}\beta t+D_2\operatorname{sh}\beta t\right)e^{-\sigma t}+\frac{U}{R_1}\right]-\frac{4M\alpha_1\alpha_2}{R_1}\,i_2=\frac{2\alpha_1 U}{R_1},
$$

$$
\begin{gathered}
i_2=\frac{R_1}{4M\alpha_1\alpha_2}\left\{\left[\left(1-k^2\right)D_2\beta-\left(1-k^2\right)\sigma D_1+2\alpha_1 D_1\right]\operatorname{ch}\beta t+\right.\\
\left.+\left[\left(1-k^2\right)D_1\beta-\left(1-k^2\right)\sigma D_2+2\alpha_1 D_2\right]\right\}e^{-\sigma t}.
\end{gathered}
$$

Применяя формулу (П4), получим

$$
\begin{gathered}
i_2=\frac{R_1}{4M\alpha_1\alpha_2}\left\{\left[\left(1-k^2\right)D_2\beta+\left(\alpha_1-\alpha_2\right)D_1\right]\operatorname{ch}\beta t+\right.\\
\left.+\left[\left(1-k^2\right)D_1\beta+\left(\alpha_1-\alpha_2\right)D_2\right]\operatorname{sh}\beta t\right\}e^{-\sigma t}
\end{gathered}
\tag{П8}
$$

Для определения произвольных постоянных D_1 и D_2 воспользуемся последним равенством, равенством (П7) и начальными условиями:

$$
i_1(0)=D_1+\frac{U}{R_1}=0,
$$

$$
i_2(0)=\frac{R_1}{4M\alpha_1\alpha_2}\left[\left(1-k^2\right)D_2\beta+\left(\alpha_1-\alpha_2\right)D_1\right]=0.
$$

Из первого полученного равенства находим

$$
D_1=-\frac{U}{R_1},
$$

а из второго находим D_2:

$$
\left(1-k^2\right)D_2\beta-\left(\alpha_1-\alpha_2\right)\frac{U}{R_1}=0,
$$

$$
D_2=\frac{\left(\alpha_1-\alpha_2\right)U}{\beta R_1\left(1-k^2\right)}.
$$

Полученные выражения для произвольных постоянных сначала подставим в формулу (П7):

$$
i_1=\left[-\frac{U}{R_1}\operatorname{ch}\beta t+\frac{\left(\alpha_1-\alpha_2\right)U}{\beta R_1\left(1-k^2\right)}\operatorname{sh}\beta t\right]e^{-\sigma t}+\frac{U}{R_1},
$$

$$
i_1=\frac{U}{R_1}\left\{1+\left[\frac{\alpha_1-\alpha_2}{\beta\left(1-k^2\right)}\operatorname{sh}\beta t-\operatorname{ch}\beta t\right]e^{-\sigma t}\right\}.
\tag{П9}
$$

Затем выполним такую же подстановку в формулу (П8) для i_2:

$$
\begin{gathered}
i_2=\frac{R_1}{4M\alpha_1\alpha_2}\left\{\left[\frac{\left(\alpha_1-\alpha_2\right)U}{R_1}-\left(\alpha_1-\alpha_2\right)\frac{U}{R_1}\right]\operatorname{ch}\beta t+\right.\\
\left.+\left[-\left(1-k^2\right)\frac{U}{R_1}\beta+\left(\alpha_1-\alpha_2\right)\frac{\left(\alpha_1-\alpha_2\right)U}{\beta R_1\left(1-k^2\right)}\right]\operatorname{sh}\beta t\right\}e^{-\sigma t},
\end{gathered}
$$

$$
i_2=\frac{U}{4M\alpha_1\alpha_2}\left[\beta\left(k^2-1\right)+\frac{\left(\alpha_1-\alpha_2\right)^2}{\beta\left(1-k^2\right)}\right]e^{-\sigma t}\operatorname{sh}\beta t.
\tag{П10}
$$

Формулы (П9) и (П10) дают решение поставленной задачи.

На анимационном рис. 3 показаны графики токов в контурах и фазовый портрет системы на фазовой плоскости (i_1, i_2). Анимация демонстрирует изменение характеристик связанных контуров в зависимости от изменения параметра k.

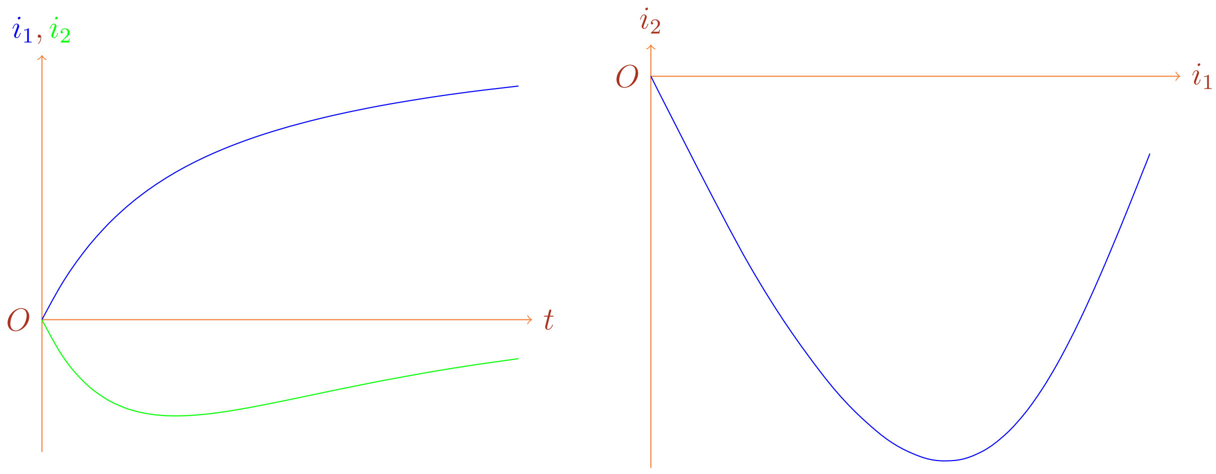


Рис. 3. Токи в контурах.

[2)] *Необходимость*. Пусть решения $\mathbf{x}_1(t), \ldots, \mathbf{x}_n(t)$ однородной системы (9) линейно независимы в интервале (a, b). Предположим противное: $W[\mathbf{x}_1(t_0), \ldots, \mathbf{x}_n(t_0)] = 0$, $t_0 \in (a, b)$. Составим систему уравнений

$$C_1 \mathbf{x}_1(t_0) + \ldots + C_n \mathbf{x}_n(t_0) = 0 \tag{П11}$$

с неизвестными $C_1, \ldots, C_n$. Ее определитель $W[\mathbf{x}_1(t_0), \ldots, \mathbf{x}_n(t_0)]$ по предположению равен нулю. Поэтому система имеет ненулевое решение $C_1 = C_1^0, \ldots, C_n = C_n^0$. Тогда в силу теоремы 3 функция $\mathbf{x}(t) = C_1^0 \mathbf{x}_1(t) + \ldots + C_n^0 \mathbf{x}_n(t)$ будет решением системы (9). Равенство (П11) приводит к тому, что это решение удовлетворяет нулевому начальному условию $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{0}$. Но однородная система всегда имеет нулевое решение, удовлетворяющее такому же начальному условию, следовательно, в силу теоремы о существовании и единственности решение $\mathbf{x}(t) = C_1^0 \mathbf{x}_1(t) + \ldots + C_n^0 \mathbf{x}_n(t) \equiv 0$, причем, не все C_i^0 равны нулю. Значит, вектор-функции $\mathbf{x}_1(t), \ldots, \mathbf{x}_n(t)$ являются линейно зависимыми, что противоречит условию теоремы.

Достаточность. Пусть $W[\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n] \neq 0$ в (a, b). Применяя следствие 1, получаем, что решения $\mathbf{x}_1(t), \ldots, \mathbf{x}_n(t)$ линейно независимы в (a, b).

[3)] В силу теоремы 3 вектор-функция (10) является решением однородной системы. Покажем, что любое другое решение $\mathbf{y}(t)$, удовлетворяющее начальному условию $\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0$, можно представить в виде (10). Для этого рассмотрим систему уравнений

$$C_1 \mathbf{x}_1(t_0) + \ldots + C_n \mathbf{x}_n(t_0) = \mathbf{y}_0. \tag{П12}$$

Так как система функций $\mathbf{x}_1(t), \ldots, \mathbf{x}_n(t)$ линейно независима, то из теоремы 5 следует, что $W[\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n] \neq 0$ для всех $t \in (a, b)$. Поэтому алгебраическая система (П12) имеет единственное решение $C_1^0, \ldots, C_n^0$. Составим функцию

$$\mathbf{x}(t) = C_1^0 \mathbf{x}_1(t) + \ldots + C_n^0 \mathbf{x}_n(t),$$

которая, очевидно, будет решением однородной системы (9) и будет удовлетворять начальному условию $\mathbf{x}_0(t) = \mathbf{y}_0$. По теореме о существовании и единственности решения задачи Коши получаем, что $\mathbf{y}(t) \equiv \mathbf{x}(t)$, т. е. $\mathbf{y}(t)$ имеет вид (10).

[4)] Пусть $t_0 \in (a, b)$ и $\mathbf{x}_1(t), \ldots, \mathbf{x}_n(t)$ — решения системы (9) с начальными условиями вида

$$\mathbf{x}_1(t_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{x}_2(t_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix}, \ \ldots, \ \mathbf{x}_n(t_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{П13}$$

По теореме о существовании и единственности решения задачи Коши такая система решений существует. Вронскиан решений в точке t_0 имеет вид

$$W(t_0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0,$$

и тогда в силу следствия 1 система решений $\mathbf{x}_1(t), \ldots, \mathbf{x}_n(t)$ фундаментальна.

[5)]

Пример П1. *Записать общее решение системы*

$$\begin{cases} x' = x + 2y, \\ y' = 2x + y, \end{cases}$$

при начальных условиях $x(0) = 3$, $y(0) = 1$ *с помощью матрицы Коши.*

Решение. Как непосредственно, так и с помощью метода исключения неизвестных нетрудно проверить, что общее решение заданной системы имеет вид

$$x(t) = C_1 e^{3t} + C_2 e^{-t}, \ y(t) = C_1 e^{3t} - C_2 e^{-t}.$$

Найдем ФСР $\mathbf{x}_1(t) = (x_1(t), y_1(t))^T$, $\mathbf{x}_2(t) = (x_2(t), y_2(t))^T$ системы, задавая начальные условия вида (П13):

$$\begin{cases} x_1(0) = C_1 + C_2 = 1, \\ y_1(0) = C_1 - C_2 = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2(0) = C_1 + C_2 = 0; \\ y_2(0) = C_1 - C_2 = 1. \end{cases}$$

Решая первую пару уравнений, получаем $C_1 = C_2 = \frac{1}{2}$, а для второй пары находим $C_1 = \frac{1}{2}$, $C_2 = -\frac{1}{2}$. Таким образом получаем два решения, образующих ФСР:

$$\mathbf{x}_1 = \left(\frac{1}{2}e^{3t} + \frac{1}{2}e^{-t}, \frac{1}{2}e^{3t} - \frac{1}{2}e^{-t}\right)^T,$$
$$\mathbf{x}_2 = \left(\frac{1}{2}e^{3t} - \frac{1}{2}e^{-t}, \frac{1}{2}e^{3t} + \frac{1}{2}e^{-t}\right)^T,$$

и фундаментальную матрицу заданной системы

$$\mathbf{X}(t) = (\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}e^{3t} + \frac{1}{2}e^{-t} & \frac{1}{2}e^{3t} - \frac{1}{2}e^{-t} \\ \frac{1}{2}e^{3t} - \frac{1}{2}e^{-t} & \frac{1}{2}e^{3t} + \frac{1}{2}e^{-t} \end{pmatrix},$$

причем,

$$\mathbf{X}(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{E}, \ \mathbf{X}^{-1}(0) = \mathbf{E}.$$

Поэтому матрица Коши есть $\mathbf{K}(t,0)=\mathbf{X}(t)$, а решение заданной системы при заданных начальных условиях запишется в виде

$$\mathbf{x}(t)=\mathbf{K}(t,0)\,\mathbf{x}(0)=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}e^{3t}+\frac{1}{2}e^{-t} & \frac{1}{2}e^{3t}-\frac{1}{2}e^{-t}\\ \frac{1}{2}e^{3t}-\frac{1}{2}e^{-t} & \frac{1}{2}e^{3t}+\frac{1}{2}e^{-t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}=$$
$$=\begin{pmatrix}2e^{3t}+e^{-t}\\ 2e^{3t}-e^{-t}\end{pmatrix}.$$

[6)] Для решения систем дифференциальных уравнений *Mathematica* предоставляет уже известные вам операторы `DSolve` и `NDSolve`. Вместо одного уравнения теперь записываем несколько, взяв их в фигурные скобки; включаем в этот список и начальные условия, если они имеются. Вместо одной неизвестной функции списком указываем необходимое количество таких функций.

Решим систему дифференциальных уравнений из примера 3:

```
sol = DSolve[{x'[t] == 4x[t] + 6y[t], y'[t] == 2x[t] + 3y[t] + t},{x[t],y[t]},t]
    // FullSimplify // Expand
```

$$\Big\{\Big\{\mathtt{x[t]}\to-\frac{6}{343}-\frac{6\,\mathtt{t}}{49}-\frac{3\,\mathtt{t}^2}{7}+\frac{3\,\mathtt{C}[1]}{7}+\frac{4}{7}\mathtt{e}^{7\mathtt{t}}\,\mathtt{C}[1]-\frac{6\,\mathtt{C}[2]}{7}+\frac{6}{7}\mathtt{e}^{7\mathtt{t}}\,\mathtt{C}[2],$$
$$\mathtt{y[t]}\to-\frac{3}{343}-\frac{3\,\mathtt{t}}{49}+\frac{2\,\mathtt{t}^2}{7}-\frac{2\,\mathtt{C}[1]}{7}+\frac{2}{7}\mathtt{e}^{7\mathtt{t}}\,\mathtt{C}[1]+\frac{4\,\mathtt{C}[2]}{7}+\frac{3}{7}\mathtt{e}^{7\mathtt{t}}\,\mathtt{C}[2]\Big\}\Big\}$$

Ответ получился какой-то не такой. Но, может быть, все дело в произвольных постоянных? У нас произвольная постоянная C_1 была свободным членом, а C_2 — коэффициентом при экспоненте в выражении для $x(t)$. Попробуем приравнять свободный член в выражении для `x[t]`, предложенном системой *Mathematica*, новой произвольной постоянной `C1`, а коэффициент при экспоненте — постоянной `C2` и решить такую систему уравнений относительно `C[1]` и `C[2]`:

$$\mathtt{Solve}\Big[\Big\{-\frac{6}{343}+\frac{3\,\mathtt{C}[1]}{7}-\frac{6\,\mathtt{C}[2]}{7}==\mathtt{C1},\ \frac{4\,\mathtt{C}[1]}{7}+\frac{6\,\mathtt{C}[2]}{7}==\mathtt{C2}\Big\},\ \{\mathtt{C}[1],\mathtt{C}[2]\}\Big]$$
$$\Big\{\Big\{\mathtt{C}[1]\to\frac{1}{343}(6+343\,\mathtt{C1}+343\,\mathtt{C2}),\ \mathtt{C}[2]\to-\frac{4}{343}-\frac{2\,\mathtt{C1}}{3}+\frac{\mathtt{C2}}{2}\Big\}\Big\}$$

Подставим найденные выражения в решение, которое нам предложила *Mathematica*:

$$\mathtt{sol}\,/.\,\Big\{\mathtt{C}[1]\to\frac{1}{343}(6+343\,\mathtt{C1}+343\,\mathtt{C2}),\ \mathtt{C}[2]\to-\frac{4}{343}-\frac{2\,\mathtt{C1}}{3}+\frac{\mathtt{C2}}{2}\Big\}\,//\,\mathtt{FullSimplify}\,//\,\mathtt{Expand}$$
$$\Big\{\Big\{\mathtt{x[t]}\to\mathtt{C1}+\mathtt{C2}\,\mathtt{e}^{7\mathtt{t}}-\frac{6\,\mathtt{t}}{49}-\frac{3\,\mathtt{t}^2}{7},\ \mathtt{y[t]}\to-\frac{1}{49}-\frac{2\,\mathtt{C1}}{3}+\frac{1}{2}\mathtt{C2}\,\mathtt{e}^{7\mathtt{t}}-\frac{3\,\mathtt{t}}{49}+\frac{2\,\mathtt{t}^2}{7}\Big\}\Big\}$$

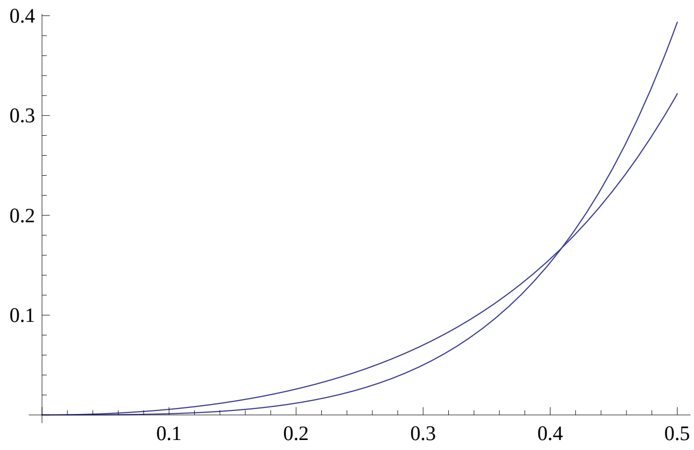
А вот это уже практически тот же ответ, что и полученный на лекции.

Решим эту же систему дифференциальных уравнений при нулевых начальных условиях и построим графики функций $x(t)$ и $y(t)$:

```
sol = DSolve[{x'[t] == 4x[t] + 6y[t], y'[t] == 2x[t] + 3y[t] + t, x[0] == 0, y[0] == 0},
    {x[t],y[t]},t] // FullSimplify
```

$$\Big\{\Big\{\mathtt{x[t]}\to\frac{3}{343}\left(-2+2\,\mathtt{e}^{7\mathtt{t}}-7\,\mathtt{t}(2+7\,\mathtt{t})\right),\ \mathtt{y[t]}\to\frac{1}{343}\left(-3+3\,\mathtt{e}^{7\mathtt{t}}+7\,\mathtt{t}(-3+14\,\mathtt{t})\right)\Big\}\Big\}$$

```
Plot[{x[t],y[t]} /. sol, {t,0,0.5}]
```

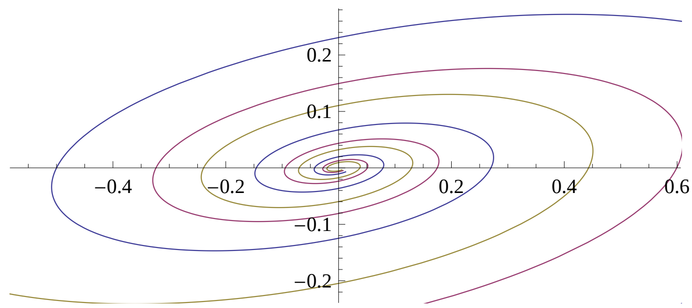


Следующий пример демонстрирует возможности визуализации фазового портрета. Пусть требуется найти решение системы

$$\begin{cases} x' = 3x - 2y, \\ y' = 15x - y \end{cases}$$

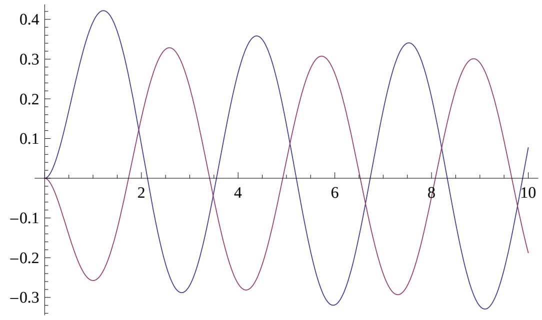
при начальных условиях $x(0) = a, y(0) = b$. Определив начальные условия как параметры, мы можем построить на одном рисунке несколько фазовых портретов, что́ увеличит наглядность изображения. Впрочем, два параметра — слишком много, поэтому сделаем их зависящими лишь от одного параметра m: $a = 1/(15+m)$, $b = 1/(13+m)$. Фазовые портреты будем строить для значений m, начиная с 0 с шагом 7:

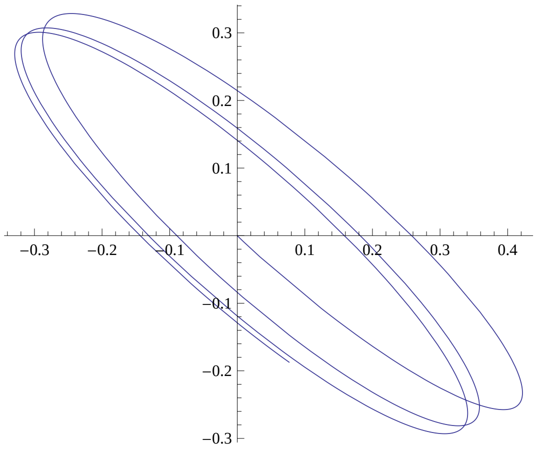
```
DSolve[{x'[t] == -x[t] + 15 y[t], y'[t] = -2 x[t] + 3 y[t], x[0] == a, y[0] = b},
    {x,y}, t];
ParametricPlot[Table[{x[t],y[t]} /. % /. {a -> 1/(15+m), b -> 1/(13+m)},
    {m,0,20,7}], {t,-2,2}, Evaluated -> True]
```



С помощью системы *Mathematica* можно решить и более сложные задачи, чем представленные на лекции. Например, выше была рассмотрена модель взаимодействия двух электрических контуров при постоянном входном напряжении. *Mathematica* легко промоделирует эти же контуры при синусоидальном входном напряжении, построив графики токов и фазовый портрет системы:

```
U = 1; R1 = 1; R2 = 1; L1 = 2; L2 = 1; M = 1; ω = 2;
sol =NDSolve[{L1 i1'[t] + R1 i1[i] +M i2'[t] == U Sin[ω[t]],
    L1 i1'[t] + R1 i1[i] +M i2'[t] == 0, i1[0] = 0, i2[0] = 0},
    {i1,i2}, {t,10}];
{Plot[Evaluate[{i1[t],i2[t]} /. sol],
    ParametricPlot[Evaluate[{i1[t],i2[t]} /. sol], {t,0,10}]}
```





Как вы заметили, был применен оператор `NDSolve`, а не `Solve`; это было сделано для того, чтобы показать, как использовать систему *Mathematica* для численного решения систем дифференциальных уравнений.

Параллельный RLC-контур

Для расчета электрических схем *Mathematica 9* предлагает следующую последовательность действий, которую мы сначала рассмотрим на примере параллельного RLC-контура, изображенного на рис. 4. Запишем связи между токами и напряжениями на компонентах схемы:

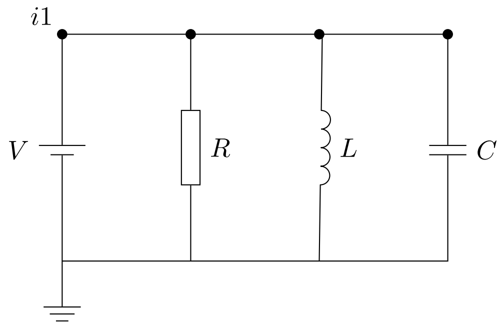


Рис. 4. Параллельный RLC-контур.

```
components = {r iR[t] == vR[t], l iL'[t] == vL[t], iC[t] == c vC'[t]};
```

Здесь `r,l,c` — величины сопротивления, индуктивности и емкости, соответственно; `vR[t]`, `vL[t]`,`vC[t]` — напряжения на этих элементах. Еще одни зависимости нам дадут законы Кирхгофа:

```
connections = {iC[t] + iR[t] + iL[t] == i1[t], v[t] == vR[t], vR[t] == vL[t],
    vL[t] == vC[t]};
```

т. е. ток `i1[t]` в контуре равен сумме токов в компонентах схемы, а напряжение на них совпадает с напряжением `v[t]`.

Далее зададим величину упомянутого тока:

```
i1[t_] := 1;
```

список нулевых начальных условий:

```
ic = {v[0] == vR[0] == vL[0] == vC[0] == iR[0] == iL[0] == iC[0] == 0};
```

список конкретных значений параметров контура:

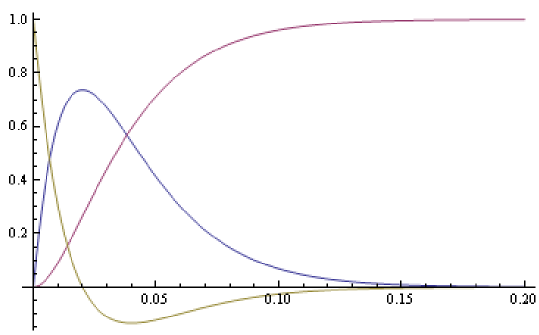
```
params = {r → 10 , c → 10^-3 , l → 0.4};
```

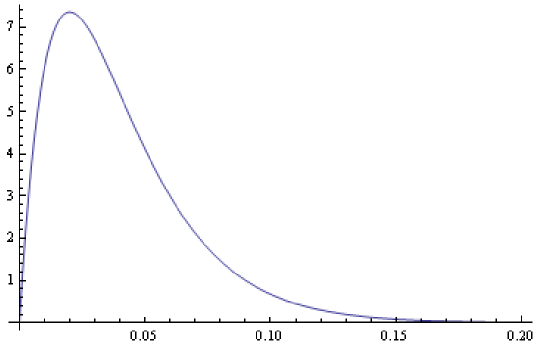
решим систему дифференциальных уравнений (опция AccuracyGoal указывает число цифр, задающих точность промежуточных результатов):

```
sol = NDSolve[components, connections, iL[0] == 0, v[0] == 0 /. params,
    {iR,iL,iC,v}, {t,0,0.2}, AccuracyGoal -> 7];
```

и построим графики токов и напряжения v[t]:

```
{Plot[Evaluate[{iR[t],iL[t],iC[t]} /. sol], {t,0,0.2}],
    Plot[v[t] /. sol, {t, 0, 0.2}]}
```





Модель транзисторного усилителя

В принципе сложность электронных схем, которые можно рассчитать в системе *Mathematica*, может быть достаточно высокой. Подвергнем, например, расчету схему транзисторного усиления, изображенную на рис. 5.

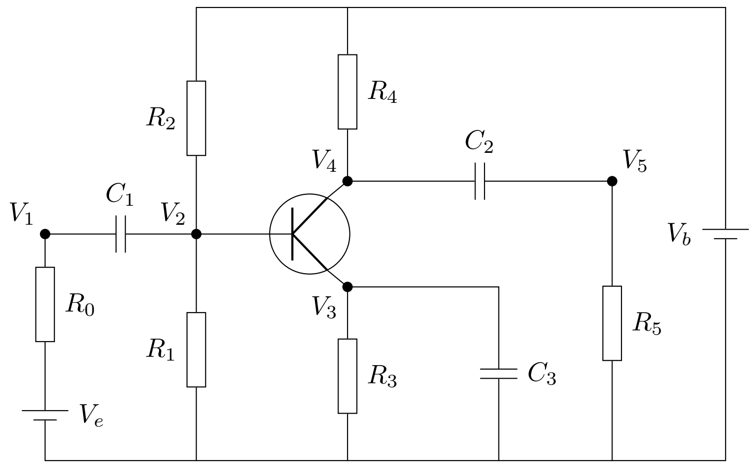


Рис. 5. Контур транзисторного усиления.

Пусть на ее вход подается синусоидальное напряжение:

```
ve[t_] := (4/10) Sin[200 π t];
```

а параметры имеют следующие значения:

```
params = {vb → 6, r0 → 1000, r1 → 9000, r2 → 9000, r3 → 9000, r4 → 9000, r5 → 9000,
```

```
α → 99/100, β → 10^-6, c1 → 10^-6, c2 → 2 × 10^-6, c3 → 3 × 10^-6};
```

Транзистор преобразует напряжения по нелинейному закону:

```
v23[t_] = β (Exp[(v2[t] − v3[t])/.026] − 1);
```

Используя законы Ома и правила Кирхгофа, запишем равенства для выделенных в схеме узлов и начальные условия:

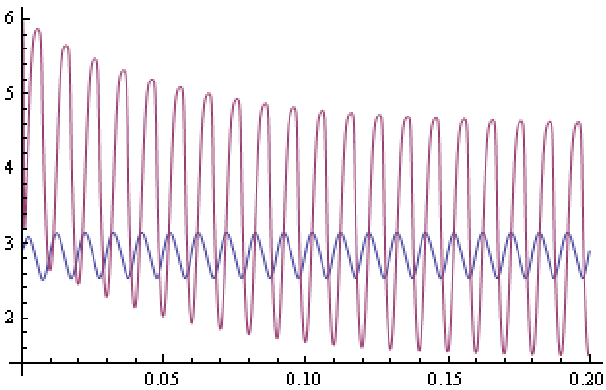
```
node1 = c1 (v2′[t] − v1′[t]) == v1[t]/r0 − ve[t]/r0;
node2 = c1 (v1′[t] − v2′[t]) == (1 − α) v23[t] + v2 [t]/r1 + v2[t]/r2 − vb/r2;
node3 = c2 v3′[t] == v23[t] − v3[t]/r3;
node4 = c3 (v4′[t] − v5′[t]) == vb/r4 − v4[t]/r4 − α v23[t];
node5 = c3 (v4′[t] − v5′[t]) == v5[t]/r5;
ics = {v1[0] == 0, v2[0] == vb/2, v3[0] == vb/2, v4[0] == vb, v5[0] == 0};
```

Промоделируем работу контура:

```
sol = NDSolve[{node1, node2, node3, node4, node5, ics} /. params,
    {v1,v2,v3,v4,v5}, {t,0,0.2},
    Method → {"EquationSimplification" → "Residual"}, MaxSteps → 100000];
```

и визуально сравним результат усиления напряжения v3 до напряжения v4:

```
Plot[Evaluate[{v3[t], v4[t]} /. sol], {t,0,0.2}, PlotRange → All]
```



В операторе `NDSolve` была задействована опция `Method`, которая использует форму представления дифференциального уравнения $F(x, x', t) = 0$.

Литература

[1] Бугров Я.С., Никольский С.М. *Высшая математика. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного.* – М.: Наука, 1985. – с. 91-99, 107-109.

[2] Письменный Д.Т. *Конспект лекций по высшей математике.* – М.: Рольф, 2000. Ч. 2. – с. 47–51.

[3] Федорюк М.В. *Обыкновенные дифференциальные уравнения.* – М.: Наука, 1985. – с. 162–163, 177-184.