

Критерии устойчивости

Волченко Ю.М.

Содержание лекции

Устойчивость по линейному приближению. Положительно и отрицательно определенные функции. Функция Ляпунова. Теоремы Ляпунова об устойчивости. Теорема Четаева о неустойчивости. Критерии устойчивости Рауса-Гурвица, Льенара-Шипара, Михайлова.

Анимация кривой Михайлова.

Анимация работает только в программе Acrobat Reader!

Реализация в системе *Mathematica* критериев проверки на устойчивость.

16 октября 2014 г.

Рассмотренные на прошлой лекции методы анализа на устойчивость линейных систем оказываются пригодными и для анализа систем нелинейных. Впрочем, мы познакомимся и с тем, как исследовать на устойчивость нелинейные системы, используя специально предназначенные для этого методы. Затем мы вернемся к линейным системам, чтобы увидеть, что их устойчивость можно проанализировать, не решая характеристических уравнений и не вычисляя фундаментальных матриц.

1 Линеаризация нелинейной системы

Пусть вектор-функция $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ в уравнении нелинейной системы

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad (1)$$

дважды непрерывно дифференцируема в окрестности $U(\mathbf{a})$ положения равновесия $\mathbf{x} = \mathbf{a}$. Можно показать, что при \mathbf{x} , близких к \mathbf{a} , справедлива аппроксимация

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) \approx \mathbf{f}'(\mathbf{a})(\mathbf{x} - \mathbf{a}) = \mathbf{A}\mathbf{y},$$

где $\mathbf{A} = \mathbf{f}'(\mathbf{a}) = \left\{ \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right\}$, $\mathbf{y} = \mathbf{x} - \mathbf{a}$. В результате систему (1) можно приближенно представить в виде линейной системы, которая называется **линеаризованной** по отношению к системе (1):

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}. \quad (2)$$

Сам переход от нелинейной системы (1) к линейной системе (2) называется **линеаризацией** системы (1).

Во многих случаях исследование точки покоя $\mathbf{x} = \mathbf{a}$ системы (1) можно заменить исследованием точки покоя $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ системы (2).

Теорема 1. Пусть вектор-функция $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ системы (1) дважды непрерывно дифференцируема в некоторой окрестности положения равновесия $\mathbf{x} = \mathbf{a}$. Если действительные части всех собственных значений матрицы $\mathbf{A} = \mathbf{f}'(\mathbf{a})$ отрицательны, то положение равновесия асимптотически устойчиво.

Нестрого эту теорему можно изложить так: *если положение равновесия линеаризованной системы асимптотически устойчиво, то асимптотически устойчиво и положение равновесия нелинейной системы.*

Теорема 2. Пусть вектор-функция $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ системы (1) дважды непрерывно дифференцируема в некоторой окрестности положения равновесия $\mathbf{x} = \mathbf{a}$. Если матрица $\mathbf{A} = \mathbf{f}'(\mathbf{a})$ имеет хотя бы одно собственное значение с положительной действительной частью, то положение равновесия неустойчиво.

В Приложении¹⁾ приводится пример линеаризации модели электронной схемы, известной как осциллятор Дуффинга, и исследования ее на устойчивость.

2 Функция Ляпунова

Теперь мы перейдем к рассмотрению довольно общих методов исследования систем (в первую очередь нелинейных) на устойчивость, для чего сначала познакомимся с некоторыми новыми понятиями.

Функция $V(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$, называется **положительно определенной** в окрестности $U(\mathbf{a})$ точки \mathbf{a} , если она непрерывно дифференцируема в этой окрестности и

$$V(\mathbf{a}) = 0, \quad V(\mathbf{x}) > 0, \quad \mathbf{x} \in \overset{\circ}{U}(\mathbf{a}). \quad (3)$$

Если в (3) изменить знак неравенства на противоположный, получим определение **отрицательно определенной** функции.

Пример 1. Функция

$$V(\mathbf{x}) = x_1^2 + \dots + x_n^2$$

положительно определена в любой окрестности точки $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Положительно определенная квадратичная форма[†]

$$V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j,$$

где $\mathbf{A} = \{a_{ij}\}_n^n$ — некоторая квадратная матрица, является положительно определенной функцией в любой окрестности точки $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Лемма 1. Если \mathbf{A} — действительная симметричная матрица, то

$$\forall(\mathbf{x}) \alpha |\mathbf{x}|^2 \leq \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} \leq \beta |\mathbf{x}|^2,$$

где α, β — соответственно, наименьшее и наибольшее собственные значения матрицы \mathbf{A} .

Доказательство. Пусть \mathbf{S} — матрица ортогонального преобразования, приводящего матрицу \mathbf{A} к диагональному виду и $\mathbf{x} = \mathbf{S} \mathbf{y}$, $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)^T$. Тогда

$$\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{y}^T \mathbf{S}^T \mathbf{A} \mathbf{S} \mathbf{y} = \mathbf{y}^T \mathbf{\Lambda} \mathbf{y} = \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2,$$

где $\mathbf{\Lambda}$ — диагональная матрица, на главной диагонали которой расположены элементы $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Следовательно, $\alpha |\mathbf{y}|^2 \leq \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} \leq \beta |\mathbf{y}|^2$. Но ортогональное преобразование сохраняет длины векторов, поэтому $|\mathbf{x}| = |\mathbf{y}|$, откуда уже следует заключение теоремы. \square

Функция $V(\mathbf{x})$ называется **функцией Ляпунова**, если она положительно определена в окрестности $U(\mathbf{a})$ и для всех \mathbf{x} из этой окрестности

$$\frac{dV(\mathbf{x})}{dt} \leq 0,$$

где dV/dt — полная производная функции $V(\mathbf{x})$ с учетом зависимости (1):

$$\frac{dV(\mathbf{x})}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial t} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i(\mathbf{x}).$$

[†]Лекция «Экстремумы функции нескольких переменных».

Теорема 3 (Ляпунова об устойчивости). *Если в некоторой окрестности положения равновесия системы (1) существует функция Ляпунова $V(\mathbf{x})$, то это положение равновесия устойчиво по Ляпунову.*

Доказательство приведено в Приложении²).

Пример 2. Исследовать на устойчивость точку покоя $(0; 0)$ системы

$$\begin{cases} x' = -(x - 2y)(1 - x^2 - 3y^2), \\ y' = -(x + y)(1 - x^2 - 3y^2). \end{cases}$$

Решение. Возьмем функцию $V(\mathbf{x}) = x^2 + 2y^2$, $\mathbf{x} = (x, y)^T$. Она положительно определена и ее полная производная с учетом уравнений заданной системы при малых x и y неположительна:

$$\begin{aligned} \frac{dV(\mathbf{x})}{dt} &= \frac{\partial V}{\partial x} x' + \frac{\partial V}{\partial y} y' = 2x(2y - x)(1 - x^2 - 3y^2) - 4y(x + y)(1 - x^2 - 3y^2) = \\ &= -2(x^2 + 2y^2)(1 - x^2 - 3y^2) \leq 0. \end{aligned}$$

Следовательно, точка покоя $(0; 0)$ заданной системы устойчива по Ляпунову. \square

Более содержательный пример приведен в Приложении³).

Теорема 4 (Ляпунова об асимптотической устойчивости). *Если в окрестности $U(\mathbf{a})$ точки покоя \mathbf{a} системы (1) существует такая функция Ляпунова $V(\mathbf{x})$, что $V'(\mathbf{x})$ отрицательно определена в $U(\mathbf{a})$, то положение равновесия $\mathbf{x} = \mathbf{a}$ асимптотически устойчиво.*

Доказательство см. в Приложении⁴).

Пример 3. Исследовать на устойчивость точку покоя $(0; 0)$ системы

$$\begin{cases} x' = -5y - 2x^3, \\ y' = 5x - 3y^3. \end{cases}$$

Решение. Возьмем $V(\mathbf{x}) = x^2 + y^2$, $\mathbf{x} = (x, y)^T$. Очевидно, что $V(\mathbf{x}) \geq 0$, $V(\mathbf{0}) = 0$. Производная $V'(x)$ отрицательно определена, так как

$$\frac{dV(\mathbf{x})}{dt} = 2x(-5y - 2x^3) + 2y(5x - 3y^3) = -2(2x^4 + 3y^4) \leq 0$$

и $V'(\mathbf{x}) = 0$ только при $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Следовательно, точка покоя асимптотически устойчива.

Теорема 5 (Четаева о неустойчивости). *Пусть $U(\mathbf{a})$ — окрестность точки покоя \mathbf{a} системы (1), а область G — часть этой окрестности, причем, точка \mathbf{a} принадлежит границе области G . Пусть функция $V(\mathbf{x})$ непрерывно дифференцируема в области G и для нее в этой области*

выполняются неравенства $V(\mathbf{x}) > 0$, $dV(\mathbf{x})/dt > 0$. Предположим также, что $V(\mathbf{x}) = 0$ в тех граничных точках области G , которые лежат внутри окрестности $U(\mathbf{a})$. Тогда положение равновесия $\mathbf{x} = \mathbf{a}$ неустойчиво.

Доказательство отнесено в Приложение⁵).

3 Критерии устойчивости

Вернемся к линейной однородной системе дифференциальных уравнений

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}, \quad (4)$$

отметив, что сложность исследования решений такой системы на устойчивость связана еще и с тем, что для характеристических уравнений высоких порядков в общем случае бывает довольно сложно отыскать их корни. Поэтому были разработаны специальные методы, позволяющие судить об устойчивости линейных систем, не решая их характеристических уравнений. Выводы, к которым приводят эти методы, называются критериями устойчивости.

Прежде чем перейти к их изучению, убедимся в том, что устойчивость точки покоя линейной системы (4) можно рассматривать наряду с устойчивостью точки покоя линейного однородного дифференциального уравнения n -го порядка вида

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_0y = 0. \quad (5)$$

Действительно, как было показано на лекции «Нормальные системы дифференциальных уравнений», это уравнение может быть представлено в виде линейной однородной системы дифференциальных уравнений n -го порядка. Достаточно сделать замену $x_1 = y$, $x_2 = y'$, \dots , $x_n = y^{(n-1)}$, чтобы получить такую систему:

$$\begin{cases} x_1' = x_2, \\ x_2' = x_3, \\ \dots\dots\dots \\ x_{n-1}' = x_n, \\ x_n' = -a_0x_1 - \dots - a_{n-1}x_n \end{cases}$$

с матрицей

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{pmatrix}. \quad (6)$$

В Приложении показано⁶⁾, что характеристическое уравнение матрицы (6) и характеристическое уравнение неоднородного уравнения (5) одинаковы, а, значит, имеют одни и те же корни.

Общее решение $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))^T$ системы (4) с матрицей (6) имеет вид

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{P}_1(t) e^{p_1 t} + \dots + \mathbf{P}_k(t) e^{p_k t}, \quad (7)$$

где $\mathbf{P}_i(t)$ — вектор-столбец многочленов; p_1, \dots, p_k — все разные и в общем случае комплексные корни характеристического уравнения

$$\varphi(p) = 0,$$

где $\varphi(p) = p^n + a_{n-1}p^{n-1} + a_{n-2}p^{n-2} + \dots + a_1p + a_0$ — характеристический многочлен матрицы \mathbf{A} .

Первая компонента решения (7) $x_1(t) = y(t)$ является общим решением уравнения (5), которое, таким образом, может быть записано в виде

$$y(t) = P_{m_1}(t) e^{p_1 t} + \dots + P_{m_k}(t) e^{p_k t}, \quad (8)$$

где $P_{m_i}(t)$ — первые компоненты векторов $\mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_k$, являющиеся многочленами, соответственно, степеней m_1, \dots, m_k .

Справедливо и обратное: любую однородную линейную систему n -го порядка вида (4) можно привести к одному однородному линейному уравнению n -го же порядка, которое имеет такое же характеристическое уравнение, что и исходная система⁷⁾.

При этом общее решение системы имеет вид (7), а решение упомянутого однородного уравнения n -го порядка записывается аналогично решению (8).

Так же, как для двумерной системы, нетрудно получить оценки модулей решений (7) и (8) и придти к выводу об устойчивости точек покоя соответствующих уравнений и систем в случае отрицательных действительных частей корней характеристического уравнения p_1, \dots, p_k . Нетрудно видеть также, что все перечисленные решения в этом случае стремятся к нулю при $t \rightarrow \infty$, так как для любого многочлена $P_m(t)$ при этих условиях $\lim_{t \rightarrow \infty} P_m(t) e^{p_i t} = 0$. Значит, имеет место и асимптотическая устойчивость.

В то же время, если хотя бы один корень характеристического уравнения имеет положительную действительную часть, то эти пределы равны бесконечности, и, значит, все решения неустойчивы.

Поэтому часто говорят об устойчивости самого характеристического многочлена безотносительно к тому, представляет ли он линейную однородную систему или единственное линейное однородное уравнение. Именно, будем считать, что **характеристический многочлен** уравнения (5) или системы (4)

устойчив, если все его корни имеют отрицательные действительные части. Заметим, что устойчивость характеристического многочлена означает асимптотическую устойчивость уравнения или системы, а неустойчивость — ее отсутствие. Так что просто устойчивость точки покоя не означает устойчивости характеристического многочлена.

3.1 Критерий Рауса-Гурвица

Теперь обратимся к специальным методам проверки характеристических многочленов на устойчивость, опирающиеся на свойства их коэффициентов и не требующие вычисления корней многочленов.

Теорема 6. Пусть все коэффициенты характеристического многочлена

$$\varphi(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n \quad (9)$$

действительны и $a_0 > 0$. Для того чтобы этот многочлен был устойчив, необходимо и достаточно, чтобы все главные диагональные миноры[†] матрицы Гурвица

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} a_1 & a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \dots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{array} \right)$$

были положительны.

Пример 4. Исследовать на устойчивость точку покоя уравнения

$$y^V + y^{IV} + 7y''' + 4y'' + 10y' + 3y = 0.$$

Решение. Характеристический многочлен не станем записывать, так как матрицу Гурвица можно составить прямо по заданному дифференциальному уравнению:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 7 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 10 & 4 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 10 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{array} \right).$$

Найдем главные диагональные миноры этой матрицы:

$$D_1 = 1 > 0, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = 7 - 4 = 3 > 0,$$

[†]Заклочены в матрице в прямые углы.

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 4 & 7 & 1 \\ 3 & 10 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 10 & 4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 18 - 13 = 5 > 0,$$

$$D_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 7 & 1 & 1 \\ 3 & 10 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 3 & 10 \end{pmatrix} = 10D_3 - 3 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 4 & 7 & 1 \\ 3 & 10 & 7 \end{vmatrix} = 50 - 3 \left(\begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 10 & 7 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} \right) =$$

$$= 50 - 3(39 - 25) = 8 > 0, \quad D_5 = 3D_4 = 24 > 0.$$

Следовательно, точка покоя асимптотически устойчива.

Следствие 1. Если хотя бы один главный диагональный минор матрицы Гурвица положителен, то точка покоя неустойчива.

Замечание 1. Если $a_0 > 0$, а некоторое $a_i \leq 0$, то характеристический многочлен не является устойчивым.

3.2 Критерий Льенара-Шипара

Следующий критерий позволяет несколько уменьшить число вычисляемых миноров матрицы Гурвица. Его основой является

Теорема 7 (Льенара-Шипара). Число лежащих в правой полуплоскости комплексной плоскости корней характеристического многочлена с положительными коэффициентами равно удвоенному числу перемен знаков в ряде чисел

$$D_{n-1}, D_{n-3}, \dots, D_2 (D_1), 1.$$

Таким образом, чтобы в правой полуплоскости не было ни одного корня (тогда характеристический многочлен и будет устойчив), надо чтобы перемен знаков в указанном ряде чисел вообще не было. Поэтому справедлива

Теорема 8. Для устойчивости характеристического многочлена (9) необходимо и достаточно, чтобы все его коэффициенты были положительны и выполнялись неравенства

$$D_{n-1} > 0, D_{n-3} > 0, \dots$$

Пример 5. Исследовать на устойчивость тривиальное решение уравнения

$$y^V + 2y^{IV} + 6y''' + 10y'' + y' + y = 0.$$

Решение. Составим матрицу Гурвица

$$\left(\begin{array}{cc|cc|c} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 10 & 6 & 2 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 10 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 10 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

и найдем ее главные диагональные миноры:

$$\begin{aligned} D_2 &= \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 10 & 6 \end{vmatrix} = 12 - 10 = 2 > 0, \\ D_4 &= \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 10 & 6 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 10 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 10 & 6 & 1 \\ 1 & 1 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 10 & 6 & 2 \\ 1 & 1 & 10 \end{vmatrix} = \\ &= -2 \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 10 & 1 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 1 & 10 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 10 & 2 \\ 1 & 10 \end{vmatrix} = \\ &= -70 + 59 + 116 - 98 = 7 > 0. \end{aligned}$$

Тривиальное решение заданного уравнения асимптотически устойчиво.

3.3 Критерий Михайлова

Еще один критерий был предложен с помощью эффективного перехода из области действительного в область комплексного переменного. Заменим аргумент p характеристического многочлена (9) чисто мнимым $j\omega$, где j — мнимая единица, а ω часто называют частотой. В результате получим функцию комплексного переменного $\varphi(j\omega) = u(\omega) + jv(\omega)$, где $u(\omega)$ — действительная, а $v(\omega)$ — мнимая части этой функции. При изменении ω от $-\infty$ до ∞ конец вектора $\varphi(j\omega)$ описывает на комплексной плоскости (u, v) некоторую кривую, называемую **кривой Михайлова**, рис. 1.

Теорема 9 (Эрмита). Число лежащих в левой полуплоскости корней характеристического многочлена с действительными коэффициентами равно

$$\frac{n}{2} + \frac{\alpha}{\pi},$$

где α — угол, на который поворачивается $\varphi(j\omega)$, когда ω изменяется от 0 до ∞ .

Так как для устойчивости характеристического многочлена требуется, чтобы все его корни лежали в левой полуплоскости, то в этом случае должно выполняться

$$\frac{n}{2} + \frac{\alpha}{\pi} = n,$$

Рис. 1. Кривая Михайлова.

откуда

$$\alpha = \frac{\pi}{2} n.$$

Теперь можно сформулировать критерий устойчивости Михайлова.

Теорема 10. *Для устойчивости характеристического многочлена (9) необходимо и достаточно, чтобы вектор $\varphi(j\omega)$ при изменении ω от 0 до ∞ совершил поворот на угол $\alpha = n \frac{\pi}{2}$, а кривая $\varphi(j\omega)$ не прошла через начало координат.*

Критерию Михайлова можно придать еще одну форму, которая в некоторых отношениях может оказаться более удобной для применения. Из последней теоремы ясно, что для устойчивости характеристического многочлена необходимо и достаточно, чтобы кривая Михайлова проходила поочередно n квадрантов комплексной плоскости против часовой стрелки, все время окружая начало координат. Это значит, что кривая должна поочередно пересекать оси координат, то есть функции $u(\omega)$ и $v(\omega)$ должны поочередно обращаться в нуль. Следовательно, справедлива

Теорема 11. *Для устойчивости характеристического многочлена необходимо (а при условии, что кривая проходит против часовой стрелки — и достаточно), чтобы все корни многочленов $u(\omega)$ и $v(\omega)$, $\omega \in [0; \infty]$, были действительны и перемежались друг с другом, то есть, чтобы между любыми двумя корнями одного из этих многочленов находился корень другого многочлена.*

Для удобства вычислений выпишем отдельно действительную $u(\omega)$ и мнимую $v(\omega)$ части многочлена $\varphi(j\omega)$:

$$\begin{aligned} u(\omega) &= a_n - a_{n-2}\omega^2 + a_{n-4}\omega^4 - \dots, \\ v(\omega) &= a_{n-1}\omega - a_{n-3}\omega^3 + a_{n-5}\omega^5 - \dots \end{aligned}$$

Пример 6. Исследовать на устойчивость тривиальное решение уравнения

$$y^{IV} + 2y''' + 3y'' + 2y' + y = 0.$$

Решение. Составим характеристический многочлен:

$$\varphi(p) = p^4 + 2p^3 + 3p^2 + 2p + 1,$$

в котором сделаем подстановку $p = j\omega$; получим

$$\varphi(j\omega) = \omega^4 - 2j\omega^3 - 3\omega^2 + 2j\omega + 1.$$

Выделяем действительную и мнимую части:

$$\begin{aligned} u(\omega) &= \omega^4 - 3\omega^2 + 1, \\ v(\omega) &= -2\omega^3 + 2\omega. \end{aligned}$$

Многочлен $u(\omega)$ имеет положительные корни $\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}$, $\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}$, а многочлен $v(\omega)$ – корни 0 и 1. Расположим корни в порядке возрастания ω в таблицу

ω	0	$\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}$	1	$\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}$
u	1	0	-1	0
v	0	$3 - \sqrt{5}$	0	$-3 - \sqrt{5}$

Поведение вектора $\varphi(j\omega)$ в данном случае полностью укладывается в схему рис. 1. Кривая Михайлова, начинаясь в точке (1; 0), пересекает ось Ov в точке (0; $3 - \sqrt{5}$), затем, продолжая движение вокруг начала координат, пересекает последовательно оси Ou , в точке (-1; 0), и Ov , в точке (0; $-3 - \sqrt{5}$) и попадает в четвертый квадрант. Хотя при дальнейшем увеличении ω кривая не достигает оси Ou , полный угол поворота α все же считается равным 2π , так как

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v(\omega)}{u(\omega)} = \frac{-2\omega^3 + 2\omega}{\omega^4 - 3\omega^2 + 1} \xrightarrow{\omega \rightarrow \infty} 0.$$

Таким образом, вектор $\varphi(j\omega)$ совершил поворот на угол $\alpha = 2\pi = 4 \cdot \frac{\pi}{2}$, т.е. на четыре четвертьоборота, не проходя через начало координат. Следовательно, точка покоя заданного уравнения в силу теоремы 10 асимптотически устойчива.

Этот же вывод можно получить на основании теоремы 11, рассматривая приведенную таблицу: корни многочленов для неотрицательных значений ω действительны и перемежаются между собой. \square

В Приложении рассмотрены возможности реализации критериев устойчивости в системе *Mathematica*⁸⁾.

Приложение

1) На одной из предыдущих лекций[†] было получено уравнение Дуффинга

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \varepsilon \frac{dx}{dt} + ax + bx^3 = B \cos \omega t, \quad (\text{П1})$$

решения которого демонстрировали достаточно изощренное поведение, включая хаотические колебания. Исследуем на устойчивость упрощенный вариант этого уравнения, когда его правая часть равна нулю:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \varepsilon \frac{dx}{dt} + ax + bx^3 = 0. \quad (\text{П2})$$

Представим последнее уравнение в виде нормальной системы дифференциальных уравнений, выполнив в нем подстановки $x_1 = x$, $x_2 = x'_1 = x'$:

$$\begin{cases} x'_1 = x_2, \\ x'_2 = -ax_1 - bx_1^3 - \varepsilon x_2. \end{cases} \quad (\text{П3})$$

Найдем точки покоя этой системы, приравняв правые части уравнений нулю:

$$\begin{cases} x_2 = 0, \\ ax_1 + bx_1^3 + \varepsilon x_2 = 0. \end{cases}$$

Решением системы будут пары чисел:

$$(0; 0), \left(\sqrt{-\frac{a}{b}}; 0 \right), \left(-\sqrt{-\frac{a}{b}}; 0 \right).$$

Вторая и третья пара будут координатами точек, только если a и b имеют противоположные знаки. Таким образом, имеем три точки

$$M_0(0; 0), M_1\left(-\sqrt{-\frac{a}{b}}; 0\right), M_2\left(\sqrt{-\frac{a}{b}}; 0\right), ab < 0,$$

лежащие на оси Ox_1 , причем, последние две расположены симметрично относительно начала координат.

Линеаризуем систему (П3), заменив нелинейную функцию $g(x) = ax_1 + bx_1^3$ в окрестности абсциссы x_{1M} точки покоя ее приближением по формуле Тейлора:

$$ax_1 + bx_1^3 \approx g(x_{1M}) + g'(x_{1M})(x - x_{1M}) = (ax_{1M} + 3bx_{1M}^2) + (a + 3bx_{1M}^2)(x_1 - x_{1M}).$$

Принимая во внимание, что в точке покоя $g(x_{1M}) = 0$, получим линейную систему

$$\begin{cases} x'_1 = x_2, \\ x'_2 = -(a + 3bx_{1M}^2)(x_1 - x_{1M}) - \varepsilon x_2. \end{cases}$$

Сделаем замену $y_1 = x_1 - x_{1M}$:

$$\begin{cases} y'_1 = x_2, \\ x'_2 = -(a + 3bx_{1M}^2)y_1 - \varepsilon x_2. \end{cases} \quad (\text{П4})$$

Эту систему и исследуем на устойчивость. Выпишем ее матрицу и составим характеристическое уравнение:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -(a + 3bx_{1M}^2) & -\varepsilon \end{pmatrix},$$

[†]Лекция «Дифференциальные уравнения высших порядков», Приложение.

$$|\mathbf{A} - p\mathbf{E}| = \begin{vmatrix} -p & 1 \\ -(a + 3bx_{1M}^2) & -\varepsilon - p \end{vmatrix} = p^2 + p\varepsilon + a + 3bx_{1M}^2 = 0.$$

Корнями последнего будут числа

$$p_{1,2} = -\frac{\varepsilon}{2} \pm \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{4} - a - 3bx_{1M}^2}.$$

Для точки покоя M_0 величина $x_{1M}^2 = 0$, и корни имеют вид

$$p_{1,2} = -\frac{\varepsilon}{2} \pm \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{4} - a}, \tag{П5}$$

а для точек покоя M_1, M_2 , поскольку $x_{1M}^2 = -a/b$, получаем

$$p_{1,2} = -\frac{\varepsilon}{2} \pm \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{4} + 2a}. \tag{П6}$$

Анализируя эти выражения для различных значений входящих в них параметров, приходим к определенным выводам об устойчивости системы (П4), а, значит, и системы (П3). Результаты анализа сведены в табл. 1.

Таблица 1. Классификация точек покоя осциллятора Дуффинга.

Точки	$a < 0$		$a > 0$		
M_0	Седло		$\varepsilon < -2\sqrt{a}$	Неустойчивый узел	
			$-2\sqrt{a} < \varepsilon < 0$	Неустойчивый фокус	
			$0 < \varepsilon < 2\sqrt{a}$	Устойчивый фокус	
			$\varepsilon > 2\sqrt{a}$	Устойчивый узел	
$M_{1,2}$	\emptyset		Седла		$b < 0$
	$\varepsilon < -2\sqrt{-2a}$	Неустойчивые узлы	\emptyset		$b > 0$
	$-2\sqrt{-2a} < \varepsilon < 0$	Неустойчивые фокусы			
	$0 < \varepsilon < 2\sqrt{-2a}$	Устойчивые фокусы			
	$\varepsilon > 2\sqrt{-2a}$	Устойчивые узлы			

Пусть, например, $a < 0, b > 0, -2\sqrt{-2a} < \varepsilon < 0$. В этом случае, так как $ab < 0$, существуют все три точки покоя системы. Поскольку $\varepsilon^2/4 - a > 0$ для отрицательного a , то корни (П5) действительны и различны, а в силу того, что $\sqrt{\varepsilon^2/4 - a} > -\varepsilon/2$ для отрицательных a и ε , они имеют противоположные знаки. Следовательно, точка M_0 – седло. Подкоренное выражение в (П6) отрицательно, поэтому имеем комплексно сопряженные корни с положительной действительной частью $-\varepsilon/2$. Значит, точки покоя M_1, M_2 – неустойчивые фокусы. Аналогично проверяются остальные результаты, помещенные в клетки таблицы.

Непосредственно решая (численно) уравнение Дуффинга (П1), визуализируем особенности поведения его решений вблизи точек покоя, соответствующие некоторым клеткам таблицы. Изобразим для этих случаев и фазовые портреты решений в пространстве (x, x') .

На рис. 2 показано поведение решения в случае $a < 0, b > 0, \varepsilon < -2\sqrt{-2a}$ при $\varepsilon = -3, a = -0,5, b = 1, x_0 = 0,1, x'_0 = 0$. Точка M_0 представляет собой седло, точки M_1, M_2

являются неустойчивыми узлами. Фазовая траектория из окрестности точки покоя M_0 уходит в бесконечность.

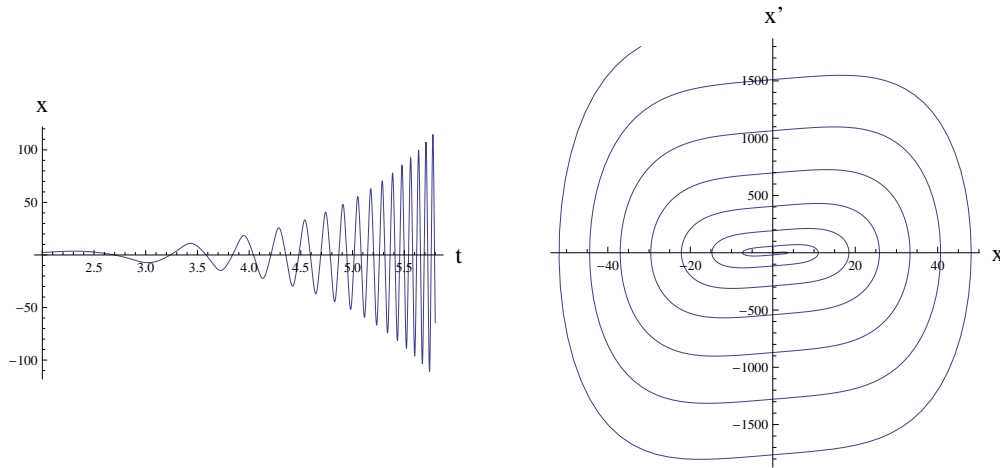


Рис. 2.

На рис. 3 представлено поведение решения в случае $a > 0, b > 0, 0 < \varepsilon < 2\sqrt{a}$, когда единственная точка покоя M_0 является устойчивым фокусом. Фазовая траектория асимптотически стремится к этой точке. Рисунку соответствуют следующие значения параметров: $\varepsilon = 0,2; a = 1; b = 1, x_0 = 0,1, x'_0 = 0$.

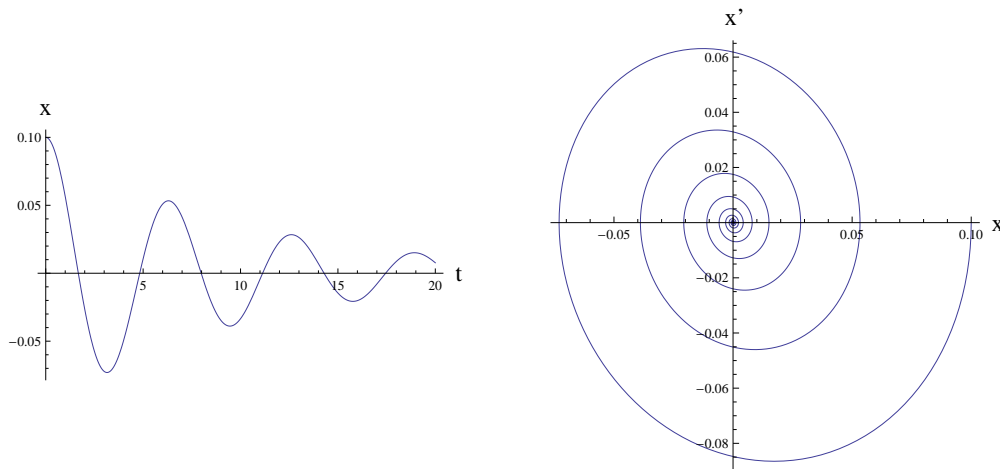


Рис. 3.

Случай $a < 0, b > 0, 0 < \varepsilon < 2\sqrt{-2a}$ показан на рис. 4. Точка M_0 является седлом, точки M_1, M_2 — устойчивыми фокусами. Фазовая траектория уходит из окрестности точки M_0 , но не в бесконечность, а, попадая в область притяжения фокуса M_2 , асимптотически устремляется к нему. Значения параметров: $\varepsilon = 0,2, a = -1, b = 0.5, x_0 = 0,1, x'_0 = 0$.

2) Не ограничивая общности, будем считать, что $\mathbf{a} = \mathbf{0}$. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и построим в n -мерном пространстве переменных x_1, \dots, x_n сферу $S_\varepsilon: x_1^2 + \dots + x_n^2 = \varepsilon$. Внутри нее построим поверхность $S_c: V(\mathbf{x}) = c = \text{const}$. Это возможно, так как функция V непрерывна и равна нулю в начале координат. (Построения для случая $n = 2$ см. на рис. 5, 1.) Теперь выберем число $\delta > 0$ настолько малым, чтобы сфера V_δ вида $x_1^2 + \dots + x_n^2 = \delta$ лежала строго внутри поверхности S_c . Пусть $\mathbf{x}(t)$ — решение системы (1), причем, $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ находится внутри сферы S_δ . Покажем, что $\mathbf{x}(t)$ не выйдет из сферы S_ε при $t \geq t_0, t \rightarrow \infty$; это и докажет

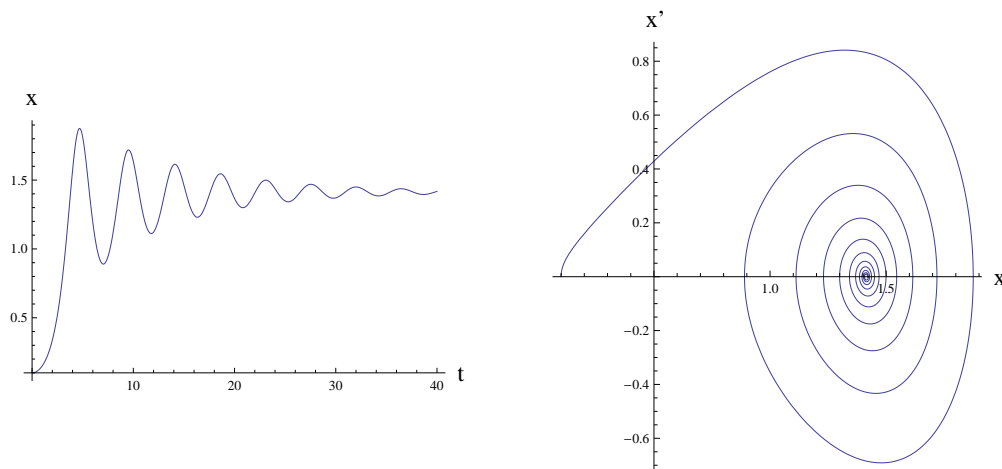


Рис. 4.

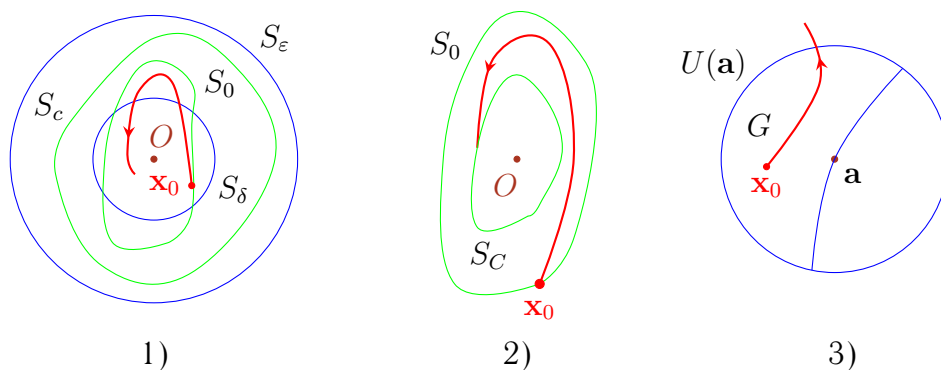


Рис. 5. \rightarrow — траектория $\mathbf{x}(t)$.

устойчивость точки покоя $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Так как по условию теоремы производная $dV/dt \leq 0$, то из тождества

$$V(\mathbf{x}) - V(\mathbf{x}_0) = \int_{t_0}^t \frac{dV}{dt} dt \tag{П7}$$

будем иметь $V(\mathbf{x}) \leq V(\mathbf{x}_0)$. Следовательно, при $t \geq t_0$ точка $\mathbf{x}(t)$ находится либо на поверхности $S_0 : V(\mathbf{x}) = V(\mathbf{x}_0)$, либо внутри нее, значит, никогда не выйдет за ее пределы, а тем более не достигнет сферы S_ϵ .

³⁾ Исследуем на устойчивость точку покоя $(0; 0)$ системы (ПЗ), равносильной уравнению Дуффинга (П2), при условии $a, b > 0$. Нетрудно видеть, что в этом случае функция

$$V(x) = \frac{x_2^2}{2} + \int_0^{x_1} (az + bz^3) dz$$

положительно определена.

Найдем ее полную производную:

$$\frac{dV(\mathbf{x})}{dt} = (ax_1 + bx_1^3)x_2 + x_2(-ax_1 - bx_1^3 - \epsilon x_2) = -\epsilon x_2^2.$$

При $\epsilon > 0$ функция $V(\mathbf{x})$ будет функцией Ляпунова, так как полная производная в этом случае неположительна. Следовательно, рассматриваемая точка покоя системы (ПЗ) при $\epsilon > 0$ устойчива.

4) Вновь, не ограничивая общности, будем считать, что $\mathbf{a} = \mathbf{0}$. Прежде всего отметим, что точка покоя $\mathbf{x} = 0$ устойчива, так как выполнены все условия теоремы Ляпунова об устойчивости. Следовательно, траектория $\mathbf{x}(t)$ не окажется вовне поверхности S_0 . Но, поскольку теперь производная dV/dt строго меньше нуля, то точка $\mathbf{x}(t)$ сразу после начала движения входит внутрь поверхности S_0 и затем остается строго внутри нее. Из того же условия $dV/dt < 0$ следует, что функция $V(\mathbf{x})$, оставаясь положительной, монотонно убывает. Это значит, что она имеет конечный предел $C \geq 0$, т. е., по-другому, $\mathbf{x}(t)$ стремится с внешней стороны к предельной поверхности $S_C : V(\mathbf{x}) = C$ (рис. 5, 2)).

Покажем, что эта поверхность на самом деле вырождается в точку — начало координат, т. е., что $C = 0$. Предположим противное: $C \neq 0$. Тогда в замкнутой области, заключенной между поверхностями S_0 и S_C производная dV/dt будет отрицательна. Обозначим через $(-l)$, $l > 0$, ее верхнюю грань в этой области, причем, $l \neq 0$, поскольку dV/dt обращается в нуль только в начале координат. Из тождества (П7), переписанного в виде

$$V(\mathbf{x}) = V(\mathbf{x}_0) + \int_{t_0}^t \frac{dV}{dt} dt,$$

учитывая, что по определению верхней грани $dV/dt \leq -l$, получим неравенство

$$V(\mathbf{x}) \leq V(\mathbf{x}_0) - \int_{t_0}^t l dt = V(\mathbf{x}_0) - l(t - t_0).$$

В силу этого неравенства при возрастании t функция V непременно станет отрицательной, что невозможно из-за ее положительной определенности. Таким образом, предположение, что $C \neq 0$, было неверным, так что на самом деле $C = 0$. Поэтому решение $\mathbf{x}(t)$ с течением времени асимптотически стремится к началу координат.

5) Пусть $\mathbf{x}(t)$ — решение системы (1) при начальном условии $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \in G$, см. рис. 5, 3). Покажем, что траектория $\mathbf{x}(t)$ при увеличении $t \geq t_0$ не может пересечь ту часть границы G , что лежит внутри $U(\mathbf{a})$. Рассмотрим функцию $w(t) = V(\mathbf{x}(t))$. Так как $w(t_0) = V(\mathbf{x}_0) > 0$ и $w'(t) = V'(\mathbf{x}(t)) > 0$ при $\mathbf{x}(t) \in G$, то $w(t) > 0$ при $\mathbf{x}(t) \in G$ и, следовательно, $\mathbf{x}(t)$ не может пересечь ту часть границы области G , на которой $V(\mathbf{x}) = 0$. Таким образом, при возрастании t траектория $\mathbf{x}(t)$ должна будет покинуть G . Так как область G содержит точки, сколь угодно близкие к точке \mathbf{a} , то это положение равновесия неустойчиво.

6) Характеристическое уравнение уравнения (5) имеет вид

$$p^n + a_{n-1}p^{n-1} + a_{n-2}p^{n-2} + \dots + a_1p + a_0 = 0.$$

Покажем, что такой же вид имеет и характеристическое уравнение матрицы \mathbf{A} . Запишем это уравнение с помощью определителя $|\mathbf{A} - p\mathbf{E}|$:

$$\begin{vmatrix} -p & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -p & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -p & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-2} & -a_{n-1} - p \end{vmatrix} = 0.$$

Обозначив этот определитель D_n , разложим его по элементам последнего столбца:

$$D_n = -(a_{n-1} + p)P_{n-1} - S_{n-1}, \quad (\text{П8})$$

где

$$P_{n-1} = \begin{vmatrix} -p & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -p & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -p & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -p \end{vmatrix}, \quad S_{n-1} = \begin{vmatrix} -p & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -p & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -p & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & -a_{n-3} & -a_{n-2} \end{vmatrix}.$$

Нетрудно видеть, что

$$P_{n-1} = (-1)^{n-1} p^{n-1}. \quad (\text{П9})$$

Определитель же S_{n-1} разложим по элементам последнего столбца и придем к равенству

$$S_{n-1} = -a_{n-2} P_{n-2} - S_{n-2},$$

или, используя соотношение (П9),

$$S_{n-1} = -S_{n-2} + a_{n-2} (-1)^{n-1} p^{n-2}. \quad (\text{П10})$$

Докажем методом математической индукции, что

$$S_n = (-1)^n \sum_{i=0}^{n-1} a_i p^i. \quad (\text{П11})$$

Для $n = 2$ эта формула справедлива, так как

$$S_2 = \begin{vmatrix} -p & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{vmatrix} = (-1)^2 (pa_1 + a_0).$$

Предположим, что доказываемая формула справедлива при некотором $n \geq 2$ и докажем ее справедливость для $n + 1$. Действительно, используя предположение индукции (П11) и формулы (П9) и (П10), получим

$$S_{n+1} = -S_n + a_n (-1)^{n+1} p^n = (-1)^{n+1} \sum_{i=0}^{n-1} a_i p^i + a_n (-1)^{n+1} p^n = (-1)^{n+1} \sum_{i=0}^n a_i p^i,$$

что и требовалось доказать.

В соответствии с равенством (П8) теперь левую часть характеристического уравнения можно представить в виде

$$\begin{aligned} D_n &= -(a_{n-1} + p) P_{n-1} - S_{n-1} = -(a_{n-1} + p) (-1)^{n-1} p^{n-1} - (-1)^{n-1} \sum_{i=0}^{n-2} a_i p^i = \\ &= (-1)^n \left(p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \sum_{i=0}^{n-2} a_i p^i \right) = (-1)^n (p^n + a_{n-1} p^{n-1} + a_{n-2} p^{n-2} + \dots + a_1 p + a_0). \end{aligned}$$

Приравняв последнее выражение нулю, получим, что характеристическое уравнение матрицы (6) и характеристическое уравнение неоднородного уравнения (5) одинаковы, а, значит, имеют одни и те же корни.

Сначала зададим в виде списка коэффициенты характеристического многочлена:

```
coef = {1, -2, 4, 4, 2};
```

Для проверки правильности задания многочлена используем функцию, которая формирует многочлен на основе списка coef:

$$\varphi[p, \text{coef}] := \left(n = \text{Length}[\text{coef}] - 1; \sum_{i=0}^n \text{coef}[[i+1]] p^{n-i} \right);$$

Применим ее к заданным нами коэффициентам:

```
φ[p, coef]
p4 - 2p3 + 4 p2 + 4p + 2
```

Обязательно найдутся желающие задавать характеристический многочлен непосредственно, но тогда, чтобы обратиться к программе, придется сначала получить его коэффициенты:

```
f = p3 + 3p + 4
coef = Reverse[CoefficientList[f, p]]
{1, 0, 3, 4}
```

Оператор `CoefficientList[poly, var]` по многочлену `poly` переменной `var` составляет список коэффициентов многочлена, а оператор `Reverse` обращает порядок элементов в списке (*Mathematica* предпочитает перечисление коэффициентов многочлена, начиная со свободного члена).

Вот текст программы, реализующей критерий Лъенара-Шипара:

```
kritShip[coef_] :=
Block[{n = Length[coef] - 1, H = ConstantArray[0, {n, n}], coe, mins = {}, per},
(* Получение характеристического многочлена и проверка его коэффициентов
на положительность *)
Print[φ[p, coef]]; z = True;
Do[If[coef[[i]] ≤ 0, z = False; coe = coef[[i]], {i, 1, Length[coef]}];
If[!z, Print["Характеристический многочлен неустойчив: ai = ", coe, "."];
Return[]],
Print["Коэффициенты характеристического многочлена положительны."]];
(* Формирование матрицы Гурвица *)
Do[
For[j = m + 1, j < n + 1, j = j + 2, k = (j + 1 - m) / 2 - 1;
For[i = 1, 2i < n + 2 + m && i + k < n + 1, i++, H[[i+k, j]] = coef[[2i-m]]]
],
Print[H // MatrixForm];
For[i = n - 1, i > 0, i = i - 2, mins = Append[mins, Det[H[[1;;i, 1;;i]]]]];
(* Подсчет удвоенного числа перемен знаков в ряде чисел
Dn-1, Dn-3, ..., D2(D1), 1 *)
mins = Append[mins, 1];
Print["Di = ", mins]; per = 2  $\sum_{i=1}^{\text{Length}[mins]-1} (1 - \text{UnitStep}[mins[[i]] mins[[i+1]])$ ];
```

```
If [per == 0, Print["Характеристический многочлен устойчив."],
    Print["Число корней в правой полуплоскости: ", per, "."]]
];
```

Все операторы программы объединены в один большой оператор `Block[vars,opers]`, где `vars` — локальные переменные, а `opers` — операторы, выполняемые в блоке. Локальные переменные вне блока смысла не имеют, так что они не могут конфликтовать с переменными (глобальными), определенными вне блока. Следует обратить внимание, что некоторым локальным переменным сразу же присваиваются некоторые значения.

В начале работы блока на дисплей выводится характеристический многочлен, а затем коэффициенты многочлена проверяются на положительность. Если хотя бы один коэффициент неотрицателен, переменной `z` присваивается значение `False` и выводится соответствующее сообщение об этом. В противном случае сообщается о положительности всех коэффициентов многочлена.

Далее строится матрица Гурвица, которая вначале представляет собой нулевую матрицу, формируемую оператором `ConstantArray`. Используются три вложенных друг в друга цикла. Внутренние циклы организуют операторы `For[start,test,incr,body]`, где `body` — тело цикла, `start` — назначение переменной цикла начального значения, `incr` — оператор увеличения переменной цикла, `test` — условие, при выполнении которого цикл продолжает выполняться. Это условие удобно использовать для прекращения выполнения цикла и выхода из него еще до достижения переменной цикла максимального значения.

Внешний цикл `Do` при `m = 0` заполняет нечетные столбцы матрицы, а при `m = 1` — четные. Вложенный в `Do` оператор `For` перебирает через один столбцы матрицы `H`. Самый внутренний цикл (`For`) заполняет столбцы коэффициентами характеристического многочлена, проверяя не закончились ли уже эти коэффициенты и не закончились ли элементы столбца. По заполнении матрица Гурвица выводится на монитор.

Следующий оператор помещает в список `mins` главные миноры матрицы Гурвица, а затем в конец списка заносится единица. Конструкция `H[[1;;i,1;;i]]` означает получение главного минора D_i . Подсчет удвоенного числа переменных знаков в полученном списке и вывод результата происходит внутри оператора `Print`.

Если характеристический многочлен устойчив, об этом выводится сообщение, в противном случае пользователь информируется о том, сколько корней характеристического многочлена находится в правой полуплоскости комплексной плоскости.

Выполним эту программу с введенными нами коэффициентами

```
kritShip[coef]
```

```
2 + 4p + 4p2 - 2p3 + p4
```

Характеристический многочлен неустойчив: $a_1 = -2$.

Запустим программу с другими коэффициентами:

```
coef = {1,2,4,4,2};
```

```
kritShip[coef]
```

```
2 + 4p + 4p2 + 2p3 + p4
```

Коэффициенты характеристического многочлена положительны.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$D_i = \{8, 2, 1\}$$

Характеристический многочлен устойчив.

Предположим, что мы хотим проверить тот же самый многочлен на устойчивость по критерию Михайлова. Для этого выведем на дисплей этот многочлен и многочлен, получаемый из него заменой аргумента на $I\omega$:

```
Print["φ(p) = ", φ[p, coef]]
Print["φ(Iω) = ", ComplexExpand[φ[Iω], coef]]
φ(p) = 2 + 4p + 4p2 + 2p3 + p4
φ(Iω) = 2 - 4ω2 + ω4 + I(4ω - 2ω3)
```

Выделим действительную и мнимую части функции $\varphi(I\omega)$:

```
u = Refine[Re[ComplexExpand[φ[Iω, coef]]], ω ∈ Reals];
v = Refine[Im[ComplexExpand[φ[Iω, coef]]], ω ∈ Reals];
Print["u(ω) = ", u]
Print["v(ω) = ", v]
u(ω) = 2 - 4 ω2 + ω4
v(ω) = 4ω - 2ω3
```

Найдем корни многочленов $u(\omega)$ и $v(\omega)$ и оставим из них лишь неотрицательные:

```
Solve[u == 0, ω];
uuSol = ω /. %; uSol = Select[uuSol, # ∈ Reals && # ≥ 0 &];
Print["Корни u(ω): ", uSol, " ≈ ", N[uSol]]
Solve[v == 0, ω];
vvSol = ω /. %; vSol = Select[vvSol, # ∈ Reals && # ≥ 0 &];
Print["Корни v(ω): ", vSol, " ≈ ", N[vSol]]
Корни u(ω): {√(2 - √2), √(2 + √2)} ≈ {0.765367, 1.84776}
Корни v(ω): {0, √2} ≈ {0, 1.41421}
```

Выбор корней с требуемыми свойствами осуществляет оператор `Select[list, crit]`, отбирающий по критерию `crit` элементы из списка `list`. Запись вида `# ∈ Reals && # ≥ 0 &` означает использование так называемой анонимной функции. Аргументом функции является символ `#`, а заканчивается тело функции символом `&`. Данная функция проверяет каждый элемент списка (это и есть `#`) на предмет принадлежности множеству действительных чисел и неотрицательность. Отобранные корни функции $u(\omega)$ помещаются в список `uSol`, а функции $v(\omega)$ — в список `vSol`.

Далее объединим эти списки в список `uvSol` и отсортируем корни по возрастанию с помощью оператора `Sort`:

```
uvSol = Sort[Join[uSol, vSol], Less];
```

Построим такую же таблицу корней, как в последнем примере лекции:

```
ForTable[i_, k_] := If[k == 0, If[i == 1, "ω", If[i == 2, "u(ω)", "v(ω)"]],
  If[i == 1, uvSol[[k]], If[i == 2, u /. ω → uvSol[[k]] // Simplify,
    v /. ω → uvSol[[k]] // Simplify]]]
FrameBox[GridBox[Table[ForTable[i, k], {i, 1, 3}, {k, 0, Length[uvSol]}],
```

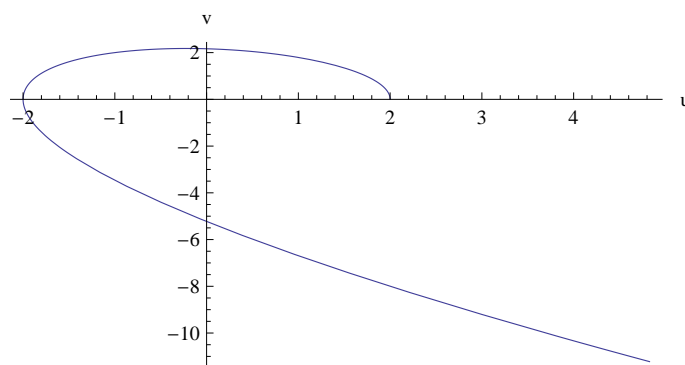
```
RowLines → True, ColumnLines → True]] // DisplayForm
```

ω	0	$\sqrt{2 - \sqrt{2}}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2 + \sqrt{2}}$
$u(\omega)$	2	0	-2	0
$v(\omega)$	0	$2\sqrt{4 - 2\sqrt{2}}$	0	$-2\sqrt{4 + 2\sqrt{2}}$

Оператор `GridBox` создает двумерную таблицу, `FrameBox` снабжает таблицу окаймляющей рамкой, опции `RowLines` и `ColumnLines`, установленные в `True`, разлинейвают таблицу, а оператор `DisplayForm` правильно отображает ее на мониторе.

Построим кривую Михайлова:

```
ParametricPlot[{u, v}, {ω, 0, Max[uvSol] + 0.3}, AspectRatio → 1/2,
  AxesOrigin → {0, 0}, AxesLabel → {"u", "v"}]
```



Опция `AxesOrigin` задает привычное для нас начало координат, так как *Mathematica* может при выводе графика использовать другую точку отсчета, которая ей по каким-либо причинам покажется более подходящей.

Анализ поведения кривой Михайлова и выведенной на дисплей таблицы еще раз подтверждает устойчивость заданного характеристического многочлена.

Литература

- [1] Бугров Я.С., Никольский С.М. *Высшая математика. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного.* — М.: Наука, 1985, — с. 123–125, 109–113.
- [2] Федорюк М.В. *Обыкновенные дифференциальные уравнения.* — М.: Наука, 1985, — с. 278–283, 288–295.