Производная

Волченко Ю.М.

Содержание лекции

Понятие производной функции. Геометрический, механический и электрический смысл производной. Уравнение касательной и нормали к графику функции. Дифференцируемость функции. Производная суммы, произведения и частного двух функций. Производная сложной функции. Методы дифференцирования. Таблица производных.

Анимация геометрического и механического смысла производной. Тесты на знание таблицы производных и дифференцирование сложных функций. Анимация работает только в программе Acrobat Reader!

Вычисление производных в системе *Mathematica*.

17 сентября 2012 г.

1 Определение производной

Понятие производной является одним из важнейших в математике. Появилось оно, когда человек стал серьезно изучать динамические процессы, прежде всего механическое движение, затем тепловые и электрические процессы, экономические, биологические, социальные... Главное во всех этих процессах — то, что их состояние изменяется с течением времени. А главной количественной характеристикой изменения является скорость. Производная и появилась как обобщение понятия скорости, пригодное для изучения любого динамического процесса. Так что ее важность определяется, в частности, количеством приложений, в которых ее можно использовать.

Перейдем к определению производной. Пусть действительная функция $y = f(x)$ задана в интервале $(a, b) \subset \overline{\mathbb{R}}$ и $x \in (a, b)$. Добавим к x приращение Δx такое, что $x + \Delta x \in (a, b)$ и рассмотрим разность

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x),$$

которая называется ***приращением*** функции.

Предел отношения приращения функции к приращению аргумента Δx, когда последний стремится к нулю, называется ***производной*** функции в точке x, если предел существует. Производная обозначается так:

$$\boxed{f'(x) \stackrel{\triangle}{=} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}}$$

Имеются и другие способы обозначения производной:

$$f' = y' = \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} = f'_x = y'_x.$$

Часто вместо «найти» или «вычислить» производную говорят «взять» производную. Ясно, что производная функции сама является функцией того же аргумента.

Иногда приращение аргумента может стремиться к нулю, оставаясь все время или только положительным или только отрицательным. В этом случае говорят об ***односторонней*** производной, левосторонней или правосторонней. ***Левосторонняя*** $f'_L(x)$ и ***правосторонняя*** $f'_R(x)$ производные функции $f(x)$ определяются формулами

$$f'_L(x) \stackrel{\triangle}{=} \lim_{\Delta x \to 0-0} \frac{\Delta y}{\Delta x}, \quad f'_R(x) \stackrel{\triangle}{=} \lim_{\Delta x \to 0+0} \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

если односторонние пределы существуют.

Пример 1. *Найти производную функции* $y = x^2$.

Решение. Вычислим предел, определяющий производную:

$$\left(x^2\right)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x.$$

Пример 2. *Найти производную функции* $y = \sin x$.

Решение. Используя первый замечательный предел, получаем

$$(\sin x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{2 \frac{\Delta x}{2}} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = \cos x.$$

Пример 3. *Найти производную функции* $y = \log_a x$.

Решение. Применим второй замечательный предел:

$$(\log_a x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\log_a(x+\Delta x) - \log_a x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{x} \cdot \frac{x}{\Delta x} \cdot \log_a \frac{x+\Delta x}{x} =$$

$$= \frac{1}{x} \lim_{\Delta x \to 0} \log_a \left(\frac{x+\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}} = \frac{1}{x} \lim_{\Delta x \to 0} \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}} = \frac{1}{x} \log_a e.$$

В частности, $(\ln x)' = 1/x$.

2 Геометрический смысл производной

Выберем на графике функции $y = f(x)$ две точки, $M_0(x_0, y_0)$ и M_1. Проведем через них секущую, которая образует с осью Ox некоторый угол φ (см. рис. 1).

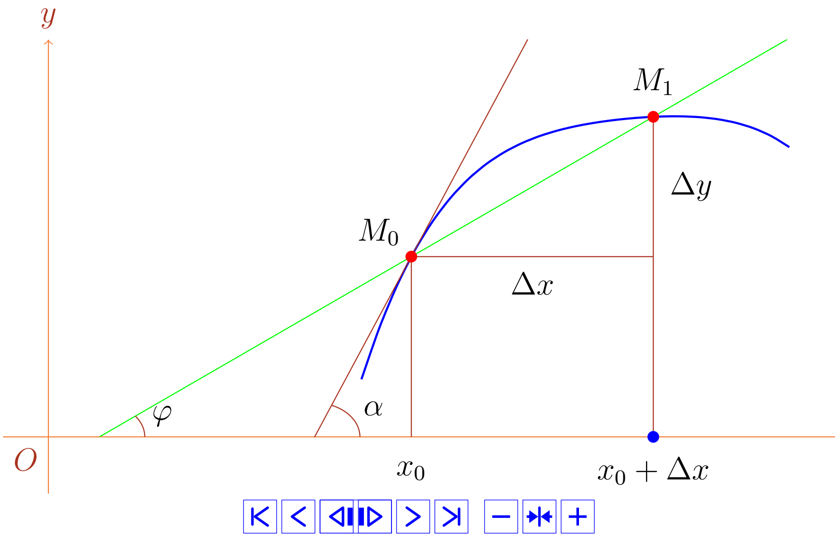


Рис. 1. Геометрический смысл производной.

Устремим точку M_1 вдоль графика кривой к точке M_0. Секущая при этом в общем случае тоже будет изменять свое положение. Предельное положение секущей (когда точка M_1 сольется с точкой M_0), если оно существует, называется ***касательной*** к графику функции в точке M_0 (или в точке x_0). Процесс превращения секущей в касательную можно видеть на анимационном рис. 1, щелкая на нем мышкой или нажимая кнопки плеера.

Из рис. видно, что тангенс угла наклона касательной к оси абсцисс равен

$$\operatorname{tg}\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \operatorname{tg}\varphi = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y' = f'(x).$$

Но $\operatorname{tg}\alpha$ равен угловому коэффициенту касательной, поэтому ***геометрический смысл производной*** *заключается в том, что она численно равна угловому коэффициенту касательной к графику функции в тех точках, в которых она существует.*

3 Механический смысл производной

Пусть по прямой движется точка, скорость которой может изменяться. Тогда путь $s(t)$, пройденный такой точкой, является функцией времени t, а средняя скорость $v_{\text{ср}}(t)$ движения точки на участке длиной Δs, пройденном за время

Δt, может быть записана как

$$v_{\text{ср}}(t) = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t}.$$

Чем меньше Δt, тем точнее средняя скорость выражает скорость точки в момент времени t. Поэтому ***скоростью*** $v(t)$ материальной точки в момент времени t называют предел средней скорости движения при $\Delta t \to 0$, если этот предел конечен:

$$v(t) \stackrel{\triangle}{=} \lim_{\Delta t \to 0} v_{\text{ср}}(t).$$

Но, учитывая определение средней скорости, получаем, что

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = s'(t).$$

Получили ***механический смысл производной***: *скорость прямолинейного движения материальной точки есть производная пути по времени*.

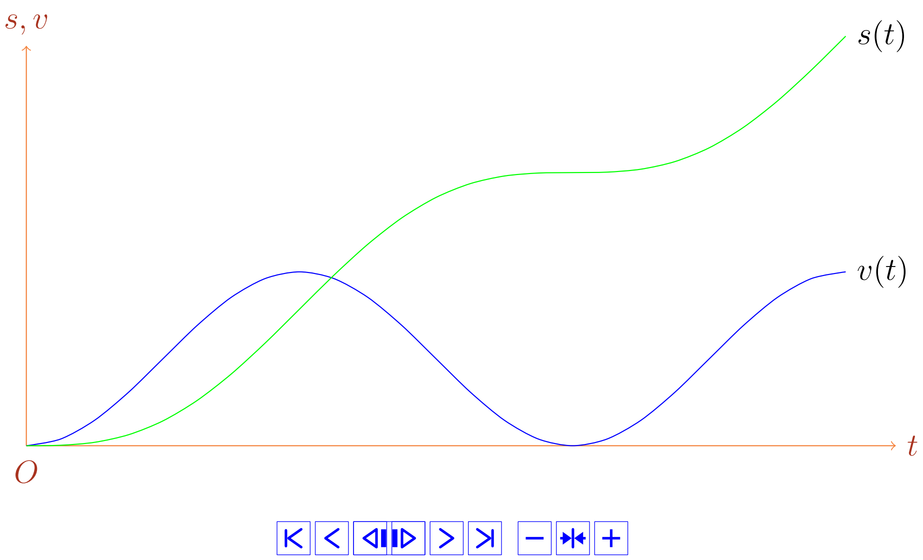


Рис. 2. Механический смысл производной.

На анимационном рис. 2 материальная точка M неравномерно движется вдоль вертикальной оси, а красные точки показывают пройденное к моменту времени t расстояние $s(t)$ и скорость $v(t)$ в этот момент времени. Для графика $s(t)$ в каждый момент времени демонстрируется угол между касательной к графику и горизонтальной прямой. Обратите внимание, что увеличение скорости сопровождается увеличением этого угла, а в момент, когда скорость равна нулю, касательная горизонтальна.

4 Электрический смысл производной

Рассмотрим проводник, в котором течет ток $i\left(t\right)$, сила которого не одинакова в различные моменты времени t. Как известно, ток вызывается изменением заряда. Пусть, в момент времени t через проводник протекал заряд $q\left(t\right)$, а через некоторое время Δt в проводнике протекал уже заряд $q\left(t+\Delta t\right)$. Средним значением тока в проводнике в промежутке времени $[t, t+\Delta t]$ называется величина

$$i_{\text{ср}}\left(t\right)=\frac{\Delta q}{\Delta t}=\frac{q\left(t+\Delta t\right)-q\left(t\right)}{\Delta t}.$$

Чем меньше длительность времени Δt, тем точнее среднее значение тока отражает значение тока в момент времени t. Поэтому ***током*** в проводнике в момент времени t называется предел средней величины тока при $\Delta t\to 0$, если этот предел конечен:

$$i\left(t\right)\stackrel{\triangle}{=}\lim_{\Delta t\to 0} i_{\text{ ср}}\left(t\right).$$

Из определения средней величины тока получаем, что

$$i\left(t\right)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta q}{\Delta t}=q'\left(t\right).$$

Последнее равенство позволяет сформулировать ***электрический смысл производной***: *ток, протекающий в проводнике, есть производная заряда по времени*. Таким образом, ток описывает скорость изменения заряда.

5 Уравнение касательной и нормали

Пусть точка $M_0\left(x_0, y_0\right)$ принадлежит графику функции $y=f\left(x\right)$. Из аналитической геометрии известно, что уравнение прямой с угловым коэффициентом k, проходящей через точку M_0, имеет вид

$$y-y_0=k\left(x-x_0\right).$$

Но для касательной угловой коэффициент равен $k=f'\left(x_0\right)$. Поэтому уравнение касательной к графику функции в точке $M_0\left(x_0, y_0\right)$ выражается формулой

$$y-y_0=f'\left(x_0\right)\left(x-x_0\right). \tag{1}$$

Нормалью к кривой в данной точке называется прямая, перпендикулярная касательной к кривой в этой же точке. Учитывая, что угловые коэффициенты перпендикулярных прямых обратны и противоположны по знаку, получаем уравнение нормали к графику функции:

$$y-y_0=-\frac{1}{f'\left(x_0\right)}\left(x-x_0\right). \tag{2}$$

Пример 4. *Найти уравнение касательной и нормали к графику функции $y = x^2$ в точке $x_0 = 1$.*

Решение. В заданной точке значение функции равно $y_0 = 1$, а ее производная, как мы выяснили раньше, равна $y' = 2x$. Следовательно, значение производной в данной точке равно 2. Уравнение касательной в соответствии с формулой (1) имеет вид

$$y - 1 = 2\,(x - 1)\,,\ y = 2x - 1.$$

По формуле (2) находим уравнение нормали:

$$y - 1 = -\frac{1}{2}\,(x - 1)\,,\ y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2},$$

см. рис. 3.

6 Дифференцируемость функции

Говорят, что функция ***дифференцируема в точке***, если она имеет в этой точке конечную производную.

Функция ***дифференцируема на множестве***, если она дифференцируема в каждой точке этого множества. Если множество или его часть представляет собой отрезок $[a, b]$, то дифференцируемость на его концах означает существование и конечность соответствующей односторонней производной.

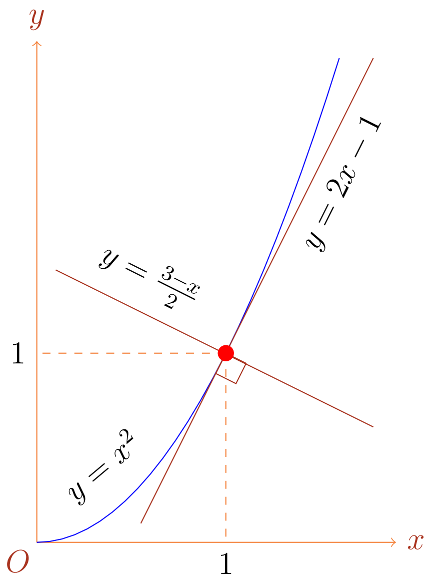


Рис. 3. К примеру 4.

Теорема 1. *Если функция дифференцируема в некоторой точке, то она непрерывна в этой точке.*

Доказательство приведено в Приложении[1)].

Следствие 1. *Если в точке x_0 функция разрывна, то в этой точке она недифференцируема.*

Замечание 1. *Непрерывность функции в некоторой точке не означает ее дифференцируемость в этой точке.*

Пример 5. *Доказать, что в точке непрерывности $x = 0$ функция $y = |x|$ недифференцируема.*

Решение. Сначала покажем, что в точке $x = 0$ функция непрерывна. Найдем пределы слева и справа в этой точке:

$$y\,(0 - 0) = \lim_{x \to 0-0} |x| = \lim_{x \to 0-0} (-x) = 0,\ \ y\,(0 + 0) = \lim_{x \to 0+0} |x| = \lim_{x \to 0+0} x = 0.$$

Таким образом,

$$y\,(0-0) = y\,(0) = y\,(0+0) = 0,$$

следовательно, функция $y = |x|$ непрерывна в точке $x = 0$. Теперь вычислим левую и правую производные в этой точке:

$$y\,(0)'_L = \lim_{\Delta x \to 0-0} \frac{|0+\Delta x| - |0|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0-0} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1,$$
$$y\,(0)'_R = \lim_{\Delta x \to 0+0} \frac{|0+\Delta x| - |0|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0+0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1.$$

Так как $y\,(0)'_L \neq y\,(0)'_R$, то производная $y\,(0)'$ не существует — функция недифференцируема в точке $x = 0$. $\square$

В связи с тем, что дифференцируемость функции равносильна наличию у нее конечной производной, вместо «взять производную» часто говорят «продифференцировать».

7 Основные теоремы о производных

Теорема 2. *Производная постоянной величины* $C \equiv \mathrm{const}$ *равна нулю:*

$$(C)' = 0$$

Доказательство. Действительно,

$$(C)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{C - C}{\Delta x} = 0.$$

Теорема 3. *Если функции* $f\,(x)$ *и* $g\,(x)$ *дифференцируемы, то производная их суммы равна сумме их производных:*

$$[f\,(x) + g\,(x)]' = f'\,(x) + g'\,(x)\,.$$

Доказательство. В самом деле,

$$[f\,(x) + g\,(x)]' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[f\,(x+\Delta x) + g\,(x+\Delta x)] - [f\,(x) + g\,(x)]}{\Delta x} =$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f\,(x+\Delta x) - f\,(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g\,(x+\Delta x) - g\,(x)}{\Delta x} = f'\,(x) + g'\,(x)\,.$$

Теорема 4. *Если функции* $f\,(x)$ *и* $g\,(x)$ *дифференцируемы, то производная их произведения равна произведению производной первой функции на вторую плюс произведение первой функции на производную второй:*

$$[f\,(x)\,g\,(x)]' = f'\,(x)\,g\,(x) + f\,(x)\,g'\,(x)\,.$$

Доказательство приведено в Приложении[2)]. Если в данной теореме положить $g(x) = C \equiv \text{const}$, получим

Следствие 2. *Постоянный множитель* $C \equiv \text{const}$ *можно выносить за знак производной:*

$$[Cf(x)]' = Cf(x).$$

Теорема 5. *Если функции* $f(x)$ *и* $g(x)$ *дифференцируемы и* $g'(x) \neq 0$*, то производная частного* f/g *вычисляется по формуле*

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)\,g(x) - f(x)\,g'(x)}{g^2(x)}.$$

Доказательство приведено в Приложении[3)].

Следствие 3. *Если функция* $f(x)$ *дифференцируема и* $f'(x) \neq 0$*, то*

$$\left[\frac{1}{f(x)}\right]' = -\frac{f'(x)}{f^2(x)}.$$

Пример 6. *Найти производную функции* $y = 2 + x^2 \sin x + \frac{\ln x}{x^2}$.

Решение. Применим доказанные утверждения и известные нам производные:

$$\left(2 + x^2\sin x + \frac{\ln x}{x^2}\right)' = (2)' + (x^2\sin x)' + \left(\frac{\ln x}{x^2}\right)' =$$

$$= (x^2)'\sin x + x^2(\sin x)' + \frac{x^2(\ln x)' - (x^2)'\ln x}{x^4} = 2x\sin x + x^2\cos x + \frac{x - 2x\ln x}{x^4} =$$

$$= x(2\sin x + x\cos x) + \frac{1 - 2\ln x}{x^3}.$$

Теорема 6 (Производная сложной функции)**.** *Пусть функция* $y = f(u)$ *дифференцируема в точке* u*, а функция* $u = \varphi(x)$ *дифференцируема в точке* x*. Тогда сложная функция* $f(\varphi(x))$ *дифференцируема в точке* x *и ее производную можно найти по формуле*

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x,$$

или

$$f[\varphi(x)]' = f_\varphi[\varphi(x)]\,\varphi'(x).$$

Доказательство приведено в Приложении[4)]. Если функцию f назвать внешней функцией, а φ — внутренней, то заключение данной теоремы можно упрощенно сформулировать так: *производная сложной функции равна производной внешней функции по внутренней функции, умноженной на производную внутренней функции.*

Пример 7. *Найти производную функции* $y = \sin x^2$.

Решение. В данном случае $f(u) = \sin u$, $u = \varphi(x) = x^2$. По формуле производной сложной функции получаем

$$\left(\sin x^2\right)' = f'_u(u) \cdot \varphi'(x) = \cos u \cdot 2x = 2x \cos x^2.$$

8 Некоторые способы вычисления производных

8.1 Логарифмическое дифференцирование

Логарифмическим дифференцированием называется дифференцирование с предварительным логарифмированием. Применение этого способа вычисления производных рассмотрим на примере.

Пример 8. *Найти производную функции* $y = u(x)^{v(x)}$.

Решение. Сначала прологарифмируем заданную функцию:

$$\ln y = v(x) \ln u(x).$$

Теперь продифференцируем обе части этого равенства, учитывая, что $\ln y$ — сложная функция, так как y зависит от x:

$$\frac{1}{y}\, y' = v' \ln u + v\, \frac{u'}{u}.$$

Отсюда

$$y' = u^v \left(v' \ln u + v\, \frac{u'}{u}\right) = u^v v' \ln u + v u^{v-1} u'.$$

8.2 Производная неявно заданной функции

Неявные функции рассматривались на лекции «Функция II». Их дифференцирование тоже изучим на примере.

Пример 9. *Найти производную неявной функции, заданной уравнением*

$$x - y + \sin(xy) = 0. \tag{3}$$

Решение. Продифференцируем обе части уравнения:

$$1 - y' + \cos(xy)(xy)' = 0, \quad 1 - y' + \cos(xy)(y + xy') = 0.$$

Найдем из последнего уравнения производную y':

$$xy' \cos(xy) - y' = -1 - y\cos(xy),$$

$$y' = \frac{1 + y\cos(xy)}{1 - x\cos(xy)}. \tag{4}$$

$\square$

Как видим, в формулу для производной вошла и неизвестная явная функция $y(x)$. Тем не менее иногда удается найти значение производной неявной функции в некоторых точках. Например, из уравнения (3) видно, что при $x = 0$ и $y = 0$. Поэтому из формулы (4) получаем, что $y'(0) = 1$.

8.3 Производная обратной функции

Теорема 7 (Производная обратной функции)**.** *Пусть функции $f : X \to Y$ и $f^{-1} : Y \to X$ взаимно обратны и непрерывны в точках $x_0 \in X$ и $y_0 = f(x_0) \in Y$ соответственно. Если функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0 и $f(x_0) \neq 0$, то функция $f^{-1}(y)$ также дифференцируема в точке y_0, причем,*

$$\left[f^{-1}(y_0)\right]' = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Доказательство приведено в Приложении[5)].

Эту теорему, чтобы лучше запомнить, нестрого формулируют так: *производная обратной функции обратна производной данной функции.*

Пример 10. *Найти производную функции $y = \arcsin x$.*

Решение. Эта функция имеет обратную функцию $x = \sin y$, $y \in [-\pi/2, \pi/2]$. На интервале $y \in (-\pi/2, \pi/2)$ обе функции непрерывны и $x'_y = \cos y \neq 0$. По доказанной теореме

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

8.4 Производная параметрически заданной функции

Пусть функция задана параметрически:

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t),\ t \in T \subset \mathbb{R}, \end{cases}$$

причем, функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ дифференцируемы, а $\varphi(t)$ имеет обратную функцию $t = \varphi^{-1}(x)$.

Представим координатную функцию y в виде $y(x) = \psi\left[\varphi^{-1}(x)\right]$ и продифференцируем ее по x, используя правила вычисления производной сложной и обратной функций:

$$y'_x = \psi'_{\varphi^{-1}}\left[\varphi^{-1}(x)\right]' = \psi'_t(t) \cdot \frac{1}{\varphi'(t)},$$

или

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

Пример 11. *Найти производную y'_x для эллипса*

$$\begin{cases} x = x_0 + a\cos t, \\ y = y_0 + b\sin t. \end{cases}$$

Решение. Применяя формулу для производной параметрически заданной функции, получаем
$$y'_x = \frac{(y_0 + b\sin t)'}{(x_0 + a\cos t)'} = \frac{b\cos t}{-a\sin t} = -\frac{b}{a}\operatorname{ctg} t.$$
Видим, что при $t = 0$, $t = \pi$ производная y'_x равна ∞, что́ свидетельствует о вертикальном расположении касательной к графику функции в точках $(\pm a, 0)$. При $t = \pi/2$, $t = -\pi/2$ касательная горизонтальна (в точках $(0, \pm b)$), так как $y'_x = 0$.

9 Производные основных элементарных функций

Мы уже вычислили производные функций x^2, $\sin x$, $\arcsin x$ и $\log_a x$. Производные остальных основных элементарных функций найдены в Приложении[6)].

Все полученные таким образом формулы сведем в таблицу, которую следует выучить. Для облегчения этого процесса рекомендуется на следующей странице пройти специальный тест. Там же имеется еще один тестировщик, проверяющий ваше умение брать производные сложных функций.

Таблица производных

1. $(C)' = 0$, $C = \text{const}$	12. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
2. $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$	13. $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$
3. $(a^x)' = a^x \ln a$	14. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$
4. $(e^x)' = e^x$	15. $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$
5. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x}\log_a e$	16. $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$
6. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$	17. $(\operatorname{th} x)' = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$
7. $(\sin x)' = \cos x$	18. $(\operatorname{cth} x)' = -\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$
8. $(\cos x)' = -\sin x$	19. $(\operatorname{arsh} x)' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
9. $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	20. $(\operatorname{arch} x)' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
10. $(\operatorname{ctg} x) = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$	21. $(\operatorname{arth} x)' = \dfrac{1}{1-x^2}$
11. $(\arcsin x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	22. $(\operatorname{arcth} x) = \dfrac{1}{1-x^2}$

В Приложении[7)]можно познакомиться с возможностями, которые предоставляет *Mathematica* для вычисления производных.

Что должно стоять в правой части формулы вместо знака вопроса?
Щелкнув мышкой, проверьте ответ.
Щелкните мышкой второй раз и получите новый вопрос. И т.д.

$$(\operatorname{arctg} x)' = ?$$

Тест на знание таблицы производных.

$$(\cos 2x)' = ?$$

Тест на производную сложной функции.

Приложение

[1)] Сначала докажем следующую лемму.

Лемма П1. *Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то ее приращение в этой точке можно представить в виде*

$$\Delta y = f'(x_0)\,\Delta x + \alpha \Delta x,$$

где α – бесконечно малая при $\Delta x \to 0$.

Доказательство. Поскольку функция дифференцируема в точке x_0, то в этой точке у нее существует конечная производная $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$. Остается применить одну из теорем теории пределов†, которая утверждает, что в этом случае выполняется $\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha$, или $\Delta y = f'(x_0)\,\Delta x + \alpha \Delta x$, где α – б.м. при $\Delta x \to 0$. □

Теперь перейдем к доказательству теоремы 1.

В силу леммы П1

$$\Delta y = f'(x_0)\,\Delta x + \alpha \Delta x,$$

где α – бесконечно малая при $\Delta x \to 0$. Правая часть представляет собой б.м., поэтому и левая часть б.м.: $\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$. Но $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ и, значит,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \left[f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)\right] = 0,$$

или

$$\lim_{\Delta x \to 0} f(x_0 + \Delta x) = f(x_0)\,.$$

Если обозначить $x = x_0 + \Delta x$, то получим

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)\,,$$

из чего следует непрерывность функции в точке x_0.

[2)] *Доказательство теоремы 4.*

Применим искусственный прием:

$$\begin{aligned}
\left[f(x)\,g(x)\right]' &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)\,g(x+\Delta x) - f(x)\,g(x)}{\Delta x} = \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x) - f(x+\Delta x)g(x) + f(x+\Delta x)g(x) - f(x)g(x)}{\Delta x} = \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} f(x+\Delta x) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} + g(x) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \\
&= f(x)\,g'(x) + g(x)\,f'(x)\,.
\end{aligned}$$

[3)] *Доказательство теоремы 5.* Снова применим искусственный прием:

$$\begin{aligned}
\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{f(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{f(x)+f(x+\Delta x)-f(x)}{g(x)+g(x+\Delta x)-g(x)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{\Delta x} = \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{f(x)+\Delta f}{g(x)+\Delta g} - \frac{f(x)}{g(x)}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x)\,g(x) + g(x)\,\Delta f - g(x)\,f(x) - f(x)\,\Delta g}{\Delta x\,[g(x) + \Delta g]\,g(x)} =
\end{aligned}$$

†Лекция «Предел функции»

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x)\,\Delta f - f(x)\,\Delta g}{\Delta x\left[g^2(x) + g(x)\,\Delta g\right]} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x)\,\frac{\Delta f}{\Delta x} - f(x)\,\frac{\Delta g}{\Delta x}}{g^2(x) + g(x)\,\Delta g} =$$
$$= \frac{g(x)\,f'(x) - f(x)\,g'(x)}{g^2(x)}.$$

[4] *Доказательство теоремы 6.* По условию $y'_u = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u}$, следовательно, по лемме П1 справедливо равенство

$$\Delta y = y'_u \Delta u + \beta \Delta u, \qquad (\text{П}1)$$

где β — б.м. при $\Delta u \to 0$. Кроме того, по условию $u'_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}$ и, значит, по той же лемме $\Delta u = u'_x \Delta x + \alpha \Delta x$, где α — б.м. при $\Delta x \to 0$. Подставим последнее выражение для Δu в формулу П1:

$$\Delta y = y'_u\,(u'_x \Delta x + \alpha \Delta x) + \beta(u'_x \Delta x + \alpha \Delta x),$$

или

$$\Delta y = y'_u u'_x \Delta x + y'_u \alpha \Delta x + u'_x \beta \Delta x + \alpha\beta \Delta x. \qquad (\text{П}2)$$

Очевидно, что при $\Delta x \to 0$ и $\Delta u \to 0$, так что и $\beta \to 0$ при $\Delta x \to 0$. Учитывая это, разделим равенство П2 на Δx и перейдем к пределу при $\Delta x \to 0$. В левой части равенства мы получим производную y'_x, а в правой к нулю не будет стремиться только первое слагаемое. В результате придем к требуемому: $y'_x = y'_u \cdot u'_x$.

[5] *Доказательство теоремы 7.* Пусть $\Delta x = f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)$ и $\Delta y = f(x) - f(x_0)$, где $y = f(x)$. Пусть $x \neq x_0$, тогда $\Delta x = f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0) = x - x_0 \neq 0$. Кроме того, если предположить, что $\Delta y = 0$, то получим $f(x) = f(x_0)$ и, применяя обратную функцию к обеим частям этого равенства, найдем, что $x = x_0$, что противоречит предположению. Значит, $\Delta y \neq 0$. Из непрерывности функций следует, что при $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$. Поэтому

$$\left[f^{-1}(y_0)\right]' = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

[6]

Производные основных элементарных функций

1. *Производная степенной функции:* $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$, *$\alpha \in \mathbb{R}$, при $x > 0$ или при $x = 0$, $\alpha > 1$.*

При $x = 0$ по определению производной имеем

$$(x^a)'_{x=0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(0 + \Delta x)^\alpha - 0^\alpha}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(\Delta x)^\alpha}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (\Delta x)^{\alpha - 1} = 0 = \alpha 0^{\alpha-1},\ \alpha > 1.$$

Для $x > 0$ применим логарифмическое дифференцирование:

$$y = x^a,\ \ln y = \alpha \ln x,\ \frac{y'}{y} = \frac{\alpha}{x},\ y' = x^\alpha \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}.$$

2. *Производная степенной функции:* $(x^n)' = nx^{n-1}$ *при $n \in \mathbb{Z}$, $x \neq 0$, или при $x = 0$, $n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$.*

При $x = 0$ формула уже была доказана. При $x > 0$ она тоже была доказана. Пусть теперь $x < 0$. Введем переменную $z = -x > 0$. Тогда, так как для $z > 0$ справедливо равенство $(z^n)' = nz^{n-1}$, получаем

$$(x^n)'_x = ((-z)^n)'_x = ((-z)^n)'_z\, z'_x = ((-1)^n\, z^n)'_z\, z'_x = (-1)^n\, nz^{n-1}\,(-1) =$$
$$= (-1)^{n+1}\, n\,(-x)^{n-1} = (-1)^{n+1}\,(-1)^{n-1}\, nx^{n-1} = (-1)^{2n}\, nx^{n-1} = nx^{n-1}.$$

3. *Производная показательной функции:* $(a^x)' = a^x \ln a$, $a > 0$, $a \neq 1$. *В частности,* $(e^x)' = e^x$.

   Применим логарифмическое дифференцирование:

$$y = a^x,\ \ln y = x \ln a,\ \frac{y'}{y} = \ln a,\ y' = a^x \ln a.$$

4. *Производная косинуса:* $(\cos x)' = -\sin x$.

   Действительно,

$$(\cos x)' = \left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right)' = -\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\sin x.$$

5. *Производная тангенса:* $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.

   Используем формулу производной частного:

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x\,(\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

6. *Производная котангенса:* $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$.

   Применим следствие к теореме о производной частного:

$$(\operatorname{ctg} x)' = \left(\frac{1}{\operatorname{tg} x}\right)' = -\frac{(\operatorname{tg} x)'}{\operatorname{tg}^2 x} = -\frac{1}{\cos^2 x \operatorname{tg}^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

7. *Производная арккосинуса:* $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

   Ранее было доказано, что $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Но $\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$. Дифференцируя это равенство, получаем требуемое.

8. *Производная арктангенса:* $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$.

   Известно, что $\operatorname{arctg} x = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, поэтому

$$(\operatorname{arctg} x)' = \left(\arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)' = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{1+x^2}}} \cdot \frac{\sqrt{1+x^2} - \frac{2x^2}{2\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2} =$$

$$= \sqrt{1+x^2} \cdot \frac{1}{(1+x^2)^{3/2}} = \frac{1}{1+x^2}.$$

9. *Производная арккотангенса:* $(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$.

   Сразу следует из равенства $\operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x$.

10. *Производная гиперболического синуса:* $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$.

    Воспользуемся определением гиперболического синуса и тем, что $(e^{-x})' = -e^x$:

$$(\operatorname{sh} x)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \operatorname{ch} x.$$

11. *Производная гиперболического косинуса:* $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$.

Аналогично::

$$(\operatorname{ch} x)' = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \operatorname{sh} x.$$

12. *Производная гиперболического тангенса:* $(\operatorname{th} x)' = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$.

Снова применим формулу производной частного:

$$(\operatorname{th} x)' = \left(\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}\right)' = \frac{(\operatorname{sh} x)' \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x\, (\operatorname{ch} x)'}{\operatorname{ch}^2 x} = \frac{\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch}^2 x} = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}.$$

13. *Производная гиперболический котангенса:* $(\operatorname{cth} x)' = -\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$.

Действительно,

$$(\operatorname{cth} x)' = \left(\frac{1}{\operatorname{th} x}\right)' = -\frac{(\operatorname{th} x)'}{\operatorname{th}^2 x} = -\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x \operatorname{th}^2 x} = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}.$$

14. *Производная обратного гиперболического синуса:* $(\operatorname{arsh} x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

Обозначим $y = \operatorname{arsh} x$. Тогда $x = \operatorname{sh} y$ и по теореме о производной обратной функции имеем

$$(\operatorname{arsh} x)' = \frac{1}{(\operatorname{sh} y)'} = \frac{1}{\operatorname{ch} y} = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{sh}^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

15. *Производная обратного гиперболического косинуса:* $(\operatorname{arch} x)' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$.

Обозначим $y = \operatorname{arch} x$. Тогда $x = \operatorname{ch} y$ и аналогично предыдущему

$$(\operatorname{arch} x)' = \frac{1}{(\operatorname{ch} y)'} = \frac{1}{\operatorname{sh} y} = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{ch}^2 y - 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}.$$

16. *Производная обратного гиперболического тангенса:* $(\operatorname{arth} x)' = \dfrac{1}{1-x^2}$.

Справедливо равенство $\operatorname{arth} x = \operatorname{arsh} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$. Поэтому

$$(\operatorname{arth} x)' = \left(\operatorname{arsh} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)' = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{x^2}{1-x^2}}} \cdot \frac{\sqrt{1-x^2} + \frac{2x^2}{2\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} =$$

$$= \sqrt{1-x^2} \cdot \frac{1}{(1-x^2)^{3/2}} = \frac{1}{1-x^2}.$$

17. *Производная обратного гиперболического котангенса:* $(\operatorname{arcth} x)' = \dfrac{1}{1-x^2}$.

Так как $\operatorname{arcth} x = \operatorname{arth} \frac{1}{x}$, то

$$(\operatorname{arcth} x)' = \left(\operatorname{arth} \frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{1-\frac{1}{x^2}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{1-x^2}.$$

[7] Для дифференцирования функций *Mathematica* имеет в своем распоряжении несколько операторов. Вначале познакомимся с оператором `D[f,x]`, где `f` — функция, которую требуется продифференцировать, `x` — ее аргумент.

Найдем производную функции $y = x^2$:

$D[x^2, x]$

$2\,x$

Этот оператор имеет еще одну, более наглядную форму, которую можно набрать с клавиатуры, используя клавиши `Esc` pd `Esc` `Ctrl` + _ или выщелкнуть мышкой из палитры инструментов: $\partial_{\square}\square$. В квадратик для индекса надо вписать аргумент функции, а в большой квадратик — выражение для функции, взяв его, если это необходимо, в скобки. Предыдущий пример в такой форме будет выглядеть так:

$\partial_x x^2$

$2\,x$

Mathematica умеет брать производные, используя все рассмотренные нами правила дифференцирования. Вот как она выполнит задание взять производную довольно сложной функции:

$\partial_x \mathrm{Sin}\left[e^{x^3-\mathrm{ArcCos}[x]}\right]$

$$e^{x^3-\mathrm{ArcCos}[x]}\left(3x^2+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)\mathrm{Cos}\left[e^{x^3-\mathrm{ArcCos}[x]}\right]$$

Кстати, сами правила дифференцирования можно получить, если применить оператор `D` к произвольным функциям $f(x)$ и $g(x)$:

$\partial_x (f[x] + g[x])$

$f'[x] + g'[x]$

$\partial_x (f[x]g[x])$

$g[x]f'[x] + f[x]g'[x]$

$\partial_x (f[x]/g[x])$

$$\frac{g[x]f'[x] - f[x]g'[x]}{g[x]^2}$$

Вычисление производной сложной функции в общем виде:

$\partial_x f[\varphi[x]]$

$f'[\varphi[x]]\varphi'[x]$

Mathematica владеет методом логарифмического дифференцирования:

$\partial_x u[x]^{v[x]}$

$$u[x]^{v[x]}\left(\frac{v[x]u'[x]}{u[x]} + \mathrm{Log}[u[x]]v'[x]\right)$$

умеет брать производные неявно заданных функций:

$\partial_x (x^2 y[x]^2 + \mathrm{Sin}[x] == \mathrm{Cos}[y[x]])$

$\mathrm{Solve}[\%, y'[x]]$

$\mathrm{Cos}[x] + 2\,x\,y[x]^2 + 2\,x^2 y[x]y'[x] == -\mathrm{Sin}[y[x]]y'[x]$

$$\left\{\left\{y'[x] \to \frac{-\mathrm{Cos}[x] - 2\,x\,y[x]^2}{\mathrm{Sin}[y[x]] + 2\,x^2\,y[x]}\right\}\right\}$$

и функций, заданных параметрически. Чтобы убедиться в последнем, зададим функцию

$$\begin{cases} y(t) = t^3 - t^2 + 3, \\ x(t) = 4 - t^2, \end{cases}$$

в виде

```
y[t_] := t^3 - t^2 + 3
x[t_] := 4 - t^2
```

и найдем ее производную y'_x:

```
Print["y'[x] = ",∂_t y[t]/∂_t x[t]]
```

$\mathtt{y'[x]} = -\dfrac{-2t + 3t^2}{2t}$

Если в выражение для функции входят, кроме аргумента, еще какие-нибудь буквы, оператор `D` считает их постоянными величинами:

```
∂_x(ax^2 + bx + c)
b + 2ax
```

Если какой-то из символов все же является функцией аргумента, оператору надо сообщить об этом с помощью опции `NonConstants`:

```
D[ax^2 + bx + c,x,NonConstants → b]
b + 2ax + x D[b,x,NonConstants → {b}]
```

Последняя строчка означает, что, поскольку b является функцией неизвестного вида, то ее производная остается в невычисленной форме.

Для функций, заданных пользователем, может больше подойти оператор дифференцирования `Derivative`, который в простейшем случае может обозначаться просто как $'$ (штрих).

Зададим, например, функцию $y = 5 \sin x e^{-x/2}$:

```
f[x_] := 5 Sin[x] e^(-x/2)
```

и найдем ее производную с помощью оператора `Derivative`:

```
f'[x]
```

$5\,\mathrm{e}^{-x/2}\,\mathtt{Cos[x]} - \dfrac{5}{2}\,\mathrm{e}^{-x/2}\,\mathtt{Sin[x]}$

или в более компактной форме:

```
Factor[%]
```

$\dfrac{5}{2}\,\mathrm{e}^{-x/2}(2\,\mathtt{Cos[x]} - \mathtt{Sin[x]})$

Можно найти точное значение производной в требуемой точке:

```
f'[π]
-5 e^(-π/2)
```

а можно найти приближенное:

```
f'[π]//N
```

-1.0394

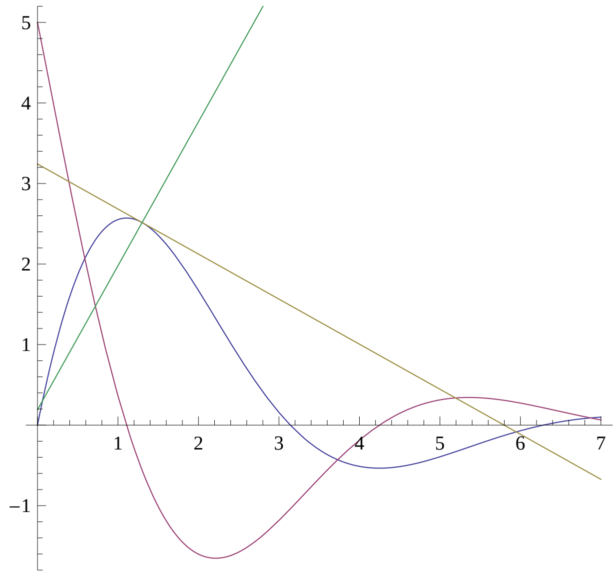
Зададим уравнения касательной и нормали к графику функции в произвольной точке x_0:

```
z[x_,x0_] := f[x0] + f'[x0](x - x0)
```

```
n[x_,x0_] := f[x0] - (x - x0)/f′[x0]
```

и построим графики заданной функции, ее производной, а также касательной и нормали в точке $x_0 = 1.3$:

```
x0 = 1.3;
Plot[{f[x],f′[x],z[x,x0],n[x,x0]},{x,0,7},
     PlotRange → {-1.8,5.2},AspectRatio → Automatic]
```



Опция `AspectRatio` применяется для задания подходящего отношения высоты рисунка к его ширине, если пользователя не устраивают пропорции, которые предлагает ему *Mathematica*. В частности, значение опции `Automatic` выражает требование, чтобы *Mathematica* определяла пропорции рисунка в соответствии с вычисляемыми координатами графика функции. Другими словами, в этом случае квадрат будет квадратом, а не прямоугольником, а окружность — окружностью, а не эллипсом.

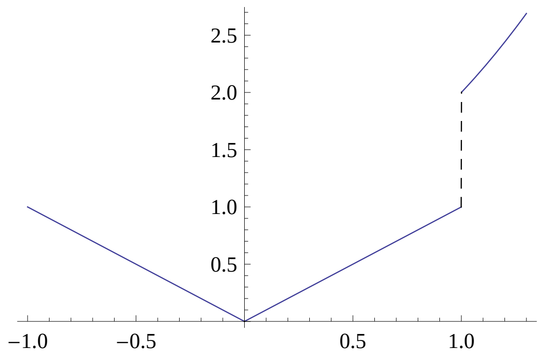
Изменяя значение x_0, можно строить касательную и нормаль для различных точек графика функции.

Mathematica способна находить производные разрывных функций. Возьмем, например, функцию

$$y = \begin{cases} -x, & x < 0; \\ x, & 0 \le x \le 1; \\ x^2 + 1, & x > 1, \end{cases}$$

и построим ее график:

```
Plot[f[x],{x,-1,1.3},ExclusionsStyle → Dashed]
```



Теперь введем ее в систему *Mathematica* с помощью оператора `Piecewise`:

```
f[x_] := Piecewise[{{-x,x < 0},{x,0 ≤ x ≤ 1},{x^2 + 1,x > 1}}]
```

Найдем производную этой функции:

```
f'[x]
```

$$\begin{cases} -1 & x < 0 \\ 1 & 0 < x < 1 \\ 2x & x > 1 \\ \text{Indeterminate} & \text{True} \end{cases}$$

Последняя строка означает, что производная не определена в точках, которые не вошли в интервалы, указанные в первых трех строках. Следовательно, функция недифференцируема в точке $x = 0$ (см. пример 5) и в точке $x = 1$ (точка разрыва функции). *Mathematica* все сделала правильно.

Напоследок познакомимся еще с одним оператором дифференцирования, `Dt[f,x]`, где `f` и `x` имеют тот же смысл, что и для оператора `D`. В отличие от последнего, оператор `Dt` считает все идентификаторы, кроме аргумента функции, тоже функциями того же аргумента. Поэтому вычисление уже рассмотренной выше производной выглядит так:

```
Dt[a x^2 + b x + c,x]
b + 2 a x + x^2 Dt[a,x] + x Dt[b,x] + Dt[c,x]
```

Если a, b и c являются постоянными, это следует указать с помощью опции `Constants`:

```
Dt[a x^2 + b x + c,x,Constants → {a,b,c}]
b + 2 a x
```

Литература

[1] Бугров Я.С., Никольский С.М. *Высшая математика. Дифференциальное и интегральное исчисление.* – М.: Наука, 1984, – с. 123-145.

[2] Письменный Д.Т. *Конспект лекций по высшей математике.* – М.: Рольф, 2000. Ч. 1. – с. 137–157.