

Уравнение Лапласа

Волченко Ю.М.

Содержание лекции

Задачи, приводящие к уравнению Лапласа. Краевые условия. Задача Дирихле. Решение задачи Дирихле для круга. Интеграл Пуассона. Численное решение задачи Дирихле для плоской области.

Решение уравнения Лапласа в системе *Mathematica*.

9 апреля 2016 г.

1 Задачи, приводящие к уравнению Лапласа

К этому уравнению[†] приводят исследования колебательных процессов, процессов распространения тепла и др. При этом процессы обычно протекают в *стационарном*, или в *установившемся режиме*, который характеризуется отсутствием зависимости изучаемой физической величины от времени.

Вспомним, например, нагрев стержня и уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

решение которого в виде функции $u(x, t)$ дает нам температуру стержня на расстоянии x от его левого конца в момент времени t . Можно показать, что решение $u(x, y, t)$ аналогичного ему уравнения, которое тоже называется уравнением теплопроводности,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \quad (1)$$

интерпретируется как температура плоской пластинки (расположенной в плоскости xOy) в точке (x, y) в момент времени t . Если процессы теплообмена в

[†]Уравнения Лапласа и Пуассона были введены в лекции «Потенциальность и соленоидальность». Там же было рассмотрено понятие плотности тока, уравнение непрерывности и пр., используемое в данной лекции.

пластинке закончились, т. е. $\partial u / \partial t = 0$, то из уравнения (1) получим, что температура пластинки удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad (2)$$

причем его решение будет иметь вид $u(x, y)$, т. е. не будет зависеть от времени. Отметим, что уравнение Лапласа относится к линейным уравнениям второго порядка эллиптического типа.

Еще один пример возникновения уравнения Лапласа дает поле стационарного электрического тока. Пусть в однородной среде, заполняющей некоторый объем V , проходит электрический ток, плотность которого в каждой точке дается вектором $\mathbf{I}(x, y, z)$. Предположим, что плотность тока не зависит от времени t , т. е. имеет место установившийся режим. Тогда и плотность заряда остается неизменной и из уравнения непрерывности следует, что

$$\nabla \cdot \mathbf{I} = 0.$$

На основании закона Ома в дифференциальной форме справедливо равенство

$$\mathbf{I} = \gamma \mathbf{E},$$

где γ — удельная электрическая проводимость.

Так как процесс стационарный, то из первого уравнения Максвелла следует, что $\text{rot } \mathbf{E} = \mathbf{0}$, а тогда существует потенциал поля φ такой, что

$$\mathbf{E} = \nabla \varphi.$$

Три последних равенства приводят к уравнению

$$\nabla \cdot \mathbf{I} = \nabla \cdot \gamma \mathbf{E} = \gamma \nabla \cdot \nabla \varphi = \gamma \Delta \varphi = 0,$$

которое является уравнением Лапласа для потенциала стационарного поля $\varphi(x, y, z)$:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0.$$

Поскольку процессы, которые описывает уравнения Лапласа, не протекают во времени, то нет у них во времени ни конца, ни начала. Поэтому нет и начальных условий, которые были характерны для волнового уравнения и уравнения теплопроводности. Но краевые условия остаются в силе.

2 Краевая задача

Мы рассмотрели уравнение Лапласа для плоскости и трехмерного пространства. Краевые условия в этих случаях уже нельзя свести к ограничениям на

концах отрезка, они принимают вид условий, заданных на границе дву- или трехмерной области.

Например, может потребоваться найти стационарное распределение температуры $u(x, y)$ в плоской области D , ограниченной контуром C , при условии, что $u(x, y)$ удовлетворяет уравнению Лапласа (2) и краевому условию

$$u(x, y)|_C = \psi(M), \quad M \in C, \quad (3)$$

где ψ — заданное распределение температуры на границе области. Такая задача называется **задачей Дирихле** для плоскости.

В трехмерном случае задача Дирихле заключается в решении уравнения Лапласа вида

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

относительно функции $u(x, y, z)$, определенной в некоторой трехмерной области V при условии, что на поверхности S , ограничивающей V , выполняется краевое условие

$$u(x, y, z)|_S = \psi(M), \quad M \in S,$$

где ψ — некоторая функция.

3 Решение задачи Дирихле для круга

Пусть требуется решить уравнение Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (4)$$

при краевом условии

$$u(x, y)|_C = \psi(M), \quad M \in C,$$

где $C = \{(x, y) : x^2 + y^2 = R^2\}$.

Перейдем к полярным координатам по формулам

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad (5)$$

тогда неизвестная функция u превратится в функцию v , зависящую от ρ и φ :

$$u(x, y) = u(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) = v(\rho, \varphi),$$

а краевые условия станут такими:

$$v(\rho, \varphi)|_{\rho=R} = f(\varphi), \quad (6)$$

где $f(\varphi)$ — 2π -периодическая функция.

Покажем, что уравнение (4) приобретет вид

$$\rho^2 \frac{\partial^2 v}{\partial \rho^2} + \rho \frac{\partial v}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} = 0. \quad (7)$$

Действительно, продифференцируем равенства (5) по x и y , считая ρ и φ функциями этих переменных, используя правило дифференцирования неявных функций:

$$\begin{aligned} 1 &= \cos \varphi \frac{\partial \rho}{\partial x} - \rho \sin \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x}, & 0 &= \sin \varphi \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \cos \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \\ 0 &= \cos \varphi \frac{\partial \rho}{\partial y} - \rho \sin \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial y}, & 1 &= \sin \varphi \frac{\partial \rho}{\partial y} + \rho \cos \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial y}. \end{aligned}$$

Решая эту систему, получим

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = \cos \varphi, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{\sin \varphi}{\rho}, \quad \frac{\partial \rho}{\partial y} = \sin \varphi, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\cos \varphi}{\rho}. \quad (8)$$

Тогда, поскольку

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial \rho} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial v}{\partial \rho} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \end{aligned}$$

то

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \cos \varphi \frac{\partial v}{\partial \rho} - \frac{\sin \varphi}{\rho} \cdot \frac{\partial v}{\partial \varphi}, \quad (9)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \sin \varphi \frac{\partial v}{\partial \rho} + \frac{\cos \varphi}{\rho} \cdot \frac{\partial v}{\partial \varphi}. \quad (10)$$

Перейдем ко вторым производным, используя для их вычисления формулы (8)-(10) и правила дифференцирования сложных функций:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = -\sin \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial \rho} + \cos \varphi \frac{\partial^2 v}{\partial \rho^2} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial x} + \cos \varphi \frac{\partial^2 v}{\partial \rho \partial \varphi} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \\ &\quad - \frac{\cos \varphi}{\rho} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{\sin \varphi}{\rho^2} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial \varphi} - \\ &\quad - \frac{\sin \varphi}{\rho} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} - \frac{\sin \varphi}{\rho} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi \partial \rho} = \\ &= \frac{\sin^2 \varphi}{\rho} \cdot \frac{\partial v}{\partial \rho} + \cos^2 \varphi \frac{\partial^2 v}{\partial \rho^2} - \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{\rho} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial \rho \partial \varphi} + \\ &+ \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{\rho^2} \cdot \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{\rho^2} \cdot \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{\sin^2 \varphi}{\rho^2} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} - \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{\rho} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi \partial \rho} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \cos^2 \varphi \frac{\partial^2 v}{\partial \rho^2} - \frac{2 \sin \varphi \cos \varphi}{\rho} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial \rho \partial \varphi} + \frac{\sin^2 \varphi}{\rho^2} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} + \\
&\quad + \frac{\sin^2 \varphi}{\rho} \cdot \frac{\partial v}{\partial \rho} + \frac{2 \sin \varphi \cos \varphi}{\rho^2} \cdot \frac{\partial v}{\partial \varphi}, \\
\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) = \cos \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot \frac{\partial v}{\partial \rho} + \sin \varphi \frac{\partial^2 v}{\partial \rho^2} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial y} + \sin \varphi \frac{\partial^2 v}{\partial \rho \partial \varphi} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \\
&\quad - \frac{\sin \varphi}{\rho} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot \frac{\partial v}{\partial \varphi} - \frac{\cos \varphi}{\rho^2} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial y} \cdot \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \\
&\quad + \frac{\cos \varphi}{\rho} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} + \frac{\cos \varphi}{\rho} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi \partial \rho} = \\
&= \frac{\cos^2 \varphi}{\rho} \cdot \frac{\partial v}{\partial \rho} + \sin^2 \varphi \frac{\partial^2 v}{\partial \rho^2} + \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{\rho} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial \rho \partial \varphi} - \\
&\quad - \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{\rho^2} \cdot \frac{\partial v}{\partial \varphi} - \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{\rho^2} \cdot \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{\cos^2 \varphi}{\rho^2} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} + \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{\rho} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi \partial \rho} = \\
&= \sin^2 \varphi \frac{\partial^2 v}{\partial \rho^2} + \frac{2 \sin \varphi \cos \varphi}{\rho} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial \rho \partial \varphi} + \frac{\cos^2 \varphi}{\rho^2} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} + \\
&\quad + \frac{\cos^2 \varphi}{\rho} \cdot \frac{\partial v}{\partial \rho} - \frac{2 \sin \varphi \cos \varphi}{\rho^2} \cdot \frac{\partial v}{\partial \varphi}.
\end{aligned}$$

Складывая эти выражения и умножая результат на ρ^2 , получим левую часть уравнения (7).

Покажем, что его решением является функция

$$v(\rho, \varphi) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \left(\frac{\rho}{R} \right)^{|k|} e^{jk\varphi}. \quad (11)$$

Для этого достаточно вычислить ее производные:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v}{\partial \rho} &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \frac{|k| \rho^{|k|-1}}{R^{|k|}} e^{jk\varphi}, \\
\frac{\partial^2 v}{\partial \rho^2} &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \frac{|k| (|k| - 1) \rho^{|k|-2}}{R^{|k|}} e^{jk\varphi}, \\
\frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} &= - \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k k^2 \left(\frac{\rho}{R} \right)^{|k|} e^{jk\varphi},
\end{aligned}$$

и подставить их в (7). Можно показать, что почленное дифференцирование законно и функция (11) непрерывна в круге, ограниченном C , если $f(\varphi)$ дважды непрерывно-дифференцируема.

Осталось удовлетворить граничное условие (6):

$$v(R, \varphi) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\varphi} = f(\varphi).$$

Если $f(\varphi)$ раскладывается в ряд Фурье, то c_k можно найти как коэффициенты Фурье этого разложения:

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) e^{-jk\theta} d\theta. \quad (12)$$

Подставим выражения (12) вместо c_k в (11):

$$\begin{aligned} v(\rho, \varphi) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) e^{-jk\theta} d\theta \left(\frac{\rho}{R}\right)^{|k|} e^{jk\varphi} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{\rho}{R}\right)^{|k|} e^{-jk(\theta-\varphi)} d\theta. \end{aligned} \quad (13)$$

Преобразуем ряд, используя формулу суммы геометрической прогрессии:

$$\begin{aligned} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{\rho}{R}\right)^{|k|} e^{-jk(\theta-\varphi)} &= \sum_{k=-\infty}^{-1} \left(\frac{\rho}{R}\right)^{|k|} e^{-jk(\theta-\varphi)} + \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\rho}{R}\right)^{|k|} e^{-jk(\theta-\varphi)} = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{\rho}{R} e^{j(\theta-\varphi)}\right]^k + \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{\rho}{R} e^{-j(\theta-\varphi)}\right]^k = \\ &= \frac{\frac{\rho}{R} e^{j(\theta-\varphi)}}{1 - \frac{\rho}{R} e^{j(\theta-\varphi)}} + \frac{1}{1 - \frac{\rho}{R} e^{-j(\theta-\varphi)}} = \frac{-\frac{\rho^2}{R^2} + \frac{\rho}{R} e^{j(\theta-\varphi)} + 1 - \frac{\rho}{R} e^{j(\theta-\varphi)}}{1 - \frac{\rho}{R} e^{-j(\theta-\varphi)} - \frac{\rho}{R} e^{j(\theta-\varphi)} + \frac{\rho^2}{R^2}} = \\ &= \frac{1 - \frac{\rho^2}{R^2}}{1 - 2\frac{\rho}{R} \cos(\theta - \varphi) + \frac{\rho^2}{R^2}} = \frac{R^2 - \rho^2}{R^2 - 2\rho R \cos(\theta - \varphi) + \rho^2}. \end{aligned}$$

Теперь из (13) получаем

$$v(\rho, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \frac{R^2 - \rho^2}{R^2 - 2\rho R \cos(\theta - \varphi) + \rho^2} d\theta. \quad (14)$$

Эта формула называется **интегралом Пуассона**. Можно показать, что в случае непрерывности $f(\varphi)$ функция $v(\rho, \varphi)$ действительно решает задачу Дирихле для круга, причем дает единственное решение.

Но можно ограничиться и формулой (11), определяя коэффициенты по (12).

Пример 1. Решить задачу Дирихле для круга радиуса R , если $f(\varphi) = A\delta(\varphi)$, где δ – дельта-функция, A – константа (в точке $(R; 0)$ на круг действует точечный источник тепла мощности A).

Решение. По формуле (14) получаем

$$\begin{aligned} v(\rho, \varphi) &= \frac{A}{2\pi} \cdot \frac{R^2 - \rho^2}{R^2 - 2\rho R \cos \varphi + \rho^2} = \frac{A}{2\pi} \cdot \frac{R^2 - \rho^2}{(\rho \cos \varphi - R)^2 + \rho^2 \sin^2 \varphi}, \\ u(x, y) &= \frac{A}{2\pi} \cdot \frac{R^2 - x^2 - y^2}{(x - R)^2 + y^2}. \end{aligned} \quad (15)$$

При $\rho = R$, $\varphi = 0$ функция $v(\rho, \varphi)$ не существует, поэтому точка $(R; 0)$ – особая, температура в ней задается функцией $f(\varphi) = \delta(\varphi) A$. Из (15) найдем изотермы процесса:

$$\frac{R^2 - x^2 - y^2}{(x - R)^2 + y^2} = B^{-1}, \quad B = \text{const}.$$

Очевидно, что $B \geq 0$, так как $\rho^2 = x^2 + y^2 \leq R^2$. Выполним несложные преобразования:

$$\begin{aligned} BR^2 - Bx^2 - By^2 &= x^2 - 2xR + R^2 + y^2, \\ (1 + B)x^2 + (1 + B)y^2 - 2xR &= (B - 1)R^2, \\ (1 + B) \left[x^2 - \frac{2xR}{1 + B} + \frac{R^2}{(1 + B)^2} + y^2 \right] &= (B - 1)R^2 + \frac{R^2}{1 + B}, \\ (1 + B) \left[\left(x - \frac{R}{1 + B} \right)^2 + y^2 \right] &= (B - 1)R^2 + \frac{R^2}{1 + B}, \\ \left(x - \frac{R}{1 + B} \right)^2 + y^2 &= \left(\frac{RB}{1 + B} \right)^2. \end{aligned}$$

Вот некоторые изотермы:

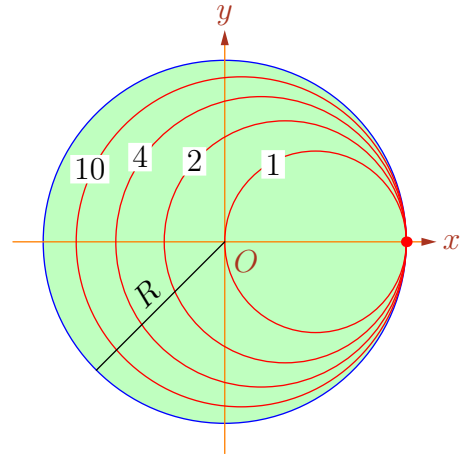
$$B = 0 : (x - R)^2 + y^2 = 0 \text{ — особая точка,}$$

$$B = 1 : \left(x - \frac{R}{2} \right)^2 + y^2 = \left(\frac{R}{2} \right)^2,$$

$$B = 2 : \left(x - \frac{R}{3} \right)^2 + y^2 = \left(\frac{2R}{3} \right)^2,$$

$$B = \infty : x^2 + y^2 = R^2; \quad t^\circ = 0.$$

Отметим, что, чем больше B , тем меньше температура $t^\circ = B^{-1}$.



4 Численные методы

Рассмотрим численное решение задачи Дирихле (2), (3), считая, что f непрерывна на контуре C . Как и для уравнения теплопроводности, зададим сетку $x = ih, y = kh$, где h – шаг интегрирования.

Аппроксимируем область D , ограниченную контуром C , сетчатой областью D^* , состоящей из всех квадратов, целиком лежащих в области D и тех, которые пересекает контур C . Последний аппроксимируется зубчатым контуром

C^* , изображенным на рис. 1 слева. В каждом узле, принадлежащем C^* , зададим значение f^* , равное значению f в ближайшей точке, принадлежащей C .

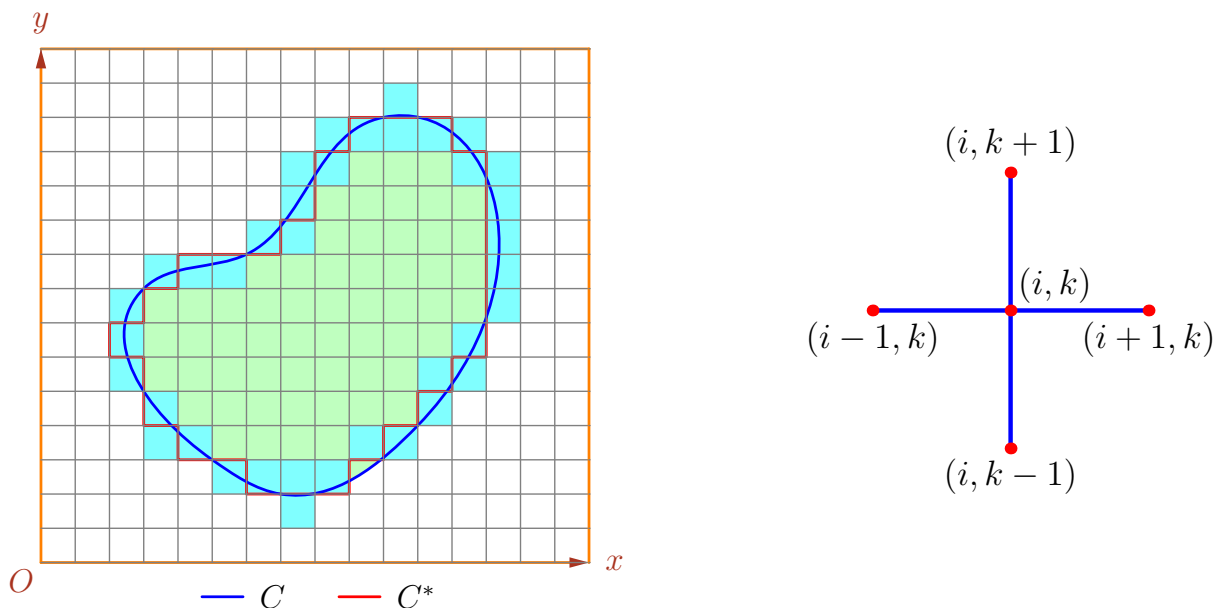


Рис. 1. Аппроксимация области и вычислительная схема.

Уравнение Лапласа заменится уравнением в конечных разностях (после сокращения на h^2):

$$u_{i+1,k} - 2u_{i,k} + u_{i-1,k} + u_{i,k-1} - 2u_{i,k} + u_{i,k+1} = 0,$$

откуда

$$u_{i,k} = \frac{1}{4} (u_{i-1,k} + u_{i+1,k} + u_{i,k-1} + u_{i,k+1}). \quad (16)$$

Вычислительная схема показана на рис 1 справа.

Относительно величин $u_{i,k}$ уравнение (16) представляет собой систему из N линейных алгебраических уравнений с N неизвестными, где N — число узлов сетки расположенных внутри D^* . Можно показать, что она имеет единственное решение. Свободные члены уравнений определяются теми $u_{i,k}$, которые принадлежат C^* и равны f^* .

Пусть $u_{i,k}$ — решение этой системы и пусть $u(x, y)$ — точное решение задачи Дирихле. Справедливо соотношение, которое служит оценкой погрешности вычислений:

$$|u(x, y) - u_{i,k}| < Ah^2,$$

где $A = \text{const}$. Мы видим, что уменьшение шага интегрирования h увеличивает точность вычислений.

Пример 2. Решить задачу Дирихле для круга (рис. 2), если $f = 16$ лишь в точке $(2; 0)$, а в остальных точках $f = 0$.

Решение. Построим весьма примитивную сетчатую область для заданного круга только для того, чтобы составить элементарное представление о применении данного численного метода. Далее составим систему уравнений вида (16), индексируя функцию u значениями ее аргументов в узлах сетки:

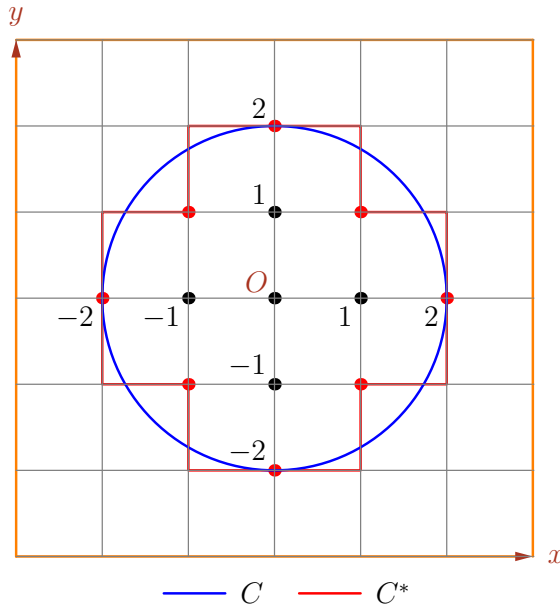


Рис. 2.

$$\begin{aligned} u_{0,1} &= \frac{1}{4} u_{0,0}, & u_{-1,0} &= \frac{1}{4} u_{0,0}, \\ u_{0,-1} &= \frac{1}{4} u_{0,0}, & u_{1,0} &= \frac{1}{4} u_{0,0} + 4, \\ u_{0,0} &= \frac{1}{4} (u_{-1,0} + u_{1,0} + u_{0,1} + u_{0,-1}). \end{aligned}$$

Для ее решения достаточно подставить в последнее уравнение все предыдущие выражения и найти $u_{0,0}$:

$$u_{0,0} = \frac{1}{4} u_{0,0} + 1, \quad u_{0,0} = \frac{4}{3}.$$

Тогда, очевидно,

$$\begin{aligned} u_{-1,0} &= u_{0,1} = u_{0,-1} = \frac{1}{3}, \\ u_{1,0} &= 4\frac{1}{3}. \end{aligned}$$

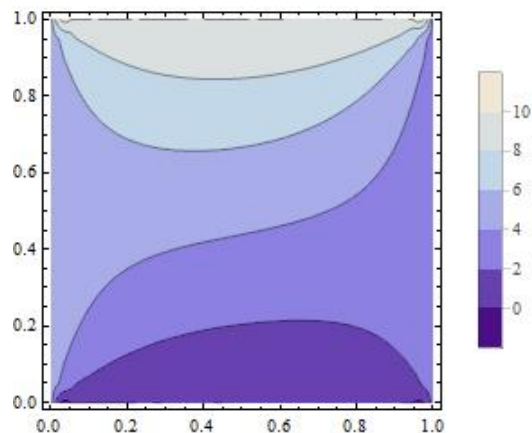
□

Решение уравнения Лапласа средствами системы *Mathematica* см. в Приложении¹⁾.

Приложение

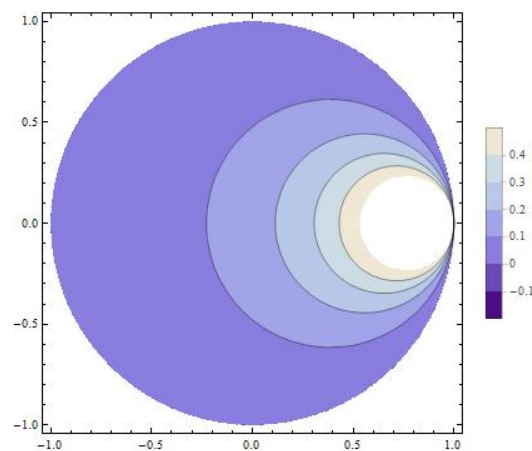
1) Решение уравнения Лапласа ничем принципиально не отличается от решения уравнений в частных производных уже рассмотренных типов. В качестве первого примера «закончим» нагрев пластинки, начатый на предыдущей лекции. Действительно, при прекращении нагрева, то есть при переходе процесса в установившийся режим, двумерное уравнение теплопроводности превращается в двумерное же уравнение Лапласа и тогда можно получить следующую картинку окончательного распределения температуры:

```
usol = NDSolveValue[{∂x,xu[x,y] + ∂y,yu[x,y] == 0, u[0,y] == 5, u[1,y] == 3,
  u[x,0] == 0, u[x,1] == 10}, u, {x,0,1}, {y,0,1}];
ContourPlot[usol[x,y], {x,0,1}, {y,0,1}, PlotLegends → Automatic,
  PlotTheme → "Classic"]
```



Можно визуализировать решение лекционного примера, в котором использовался интеграл Пуассона, при этом численные методы нам не понадобятся, поскольку мы воспользуемся решением, полученным на лекции:

```
ContourPlot[1/(2π) * (1 - x² - y²) / ((x - 1)² + y²), {x,-1,1}, {y,-1,1},
  RegionFunction → Function[{x,y,z}, x² + y² ≤ 1], PlotLegends → Automatic,
  PlotTheme → "Classic"]
```



Решим с помощью интеграла Пуассона какую-нибудь более интересную задачу. Пусть, например, температура на границе круга задается функцией $f(\varphi) = \sin 2\varphi$. Сначала зададим приближенное вычисление функции (14):

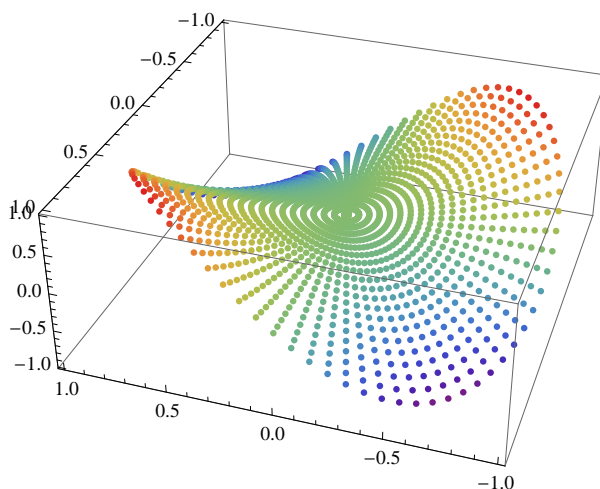
```
v[r_,fi_] := NIntegrate[ $\frac{1}{2\pi} \text{Sin}[2 t] \frac{1 - r^2}{1 - 2 r \text{Cos}[t - fi] + r^2}$ , {t, - $\pi$ ,  $\pi$ },  
MaxRecursion -> 20]
```

Далее составим таблицу ее значений:

```
tbl = Table[{x = r Cos[fi], y = r Sin[fi], v[r, fi]}, {fi, 0, 2 $\pi$ (1 - 1/80), 2 $\pi$ /80},  
{r, 0.01, 0.99, 0.049}];
```

Построив эти точки в пространстве, получим наглядное представление о распределении температуры в пластинке в виде поверхности, более высокие точки которой, еще и окрашенные в теплые тона, отвечают более высоким температурам, а ниже расположенные ее области, окрашенные в холодные тона, — более низким температурам. Используем для этого специальную графическую функцию `ListPointPlot3D`, предназначенную для построения массива точек:

```
ListPointPlot3D[tbl, ColorFunction -> "Rainbow"]
```



Литература

- [1] Бугров Я.С., Никольский С.М. *Высшая математика. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного*. — М.: Наука, 1985, — с. 329–332.
- [2] Араманович И.Г., Левин В.И. *Уравнения математической физики*. — М.: Наука, 1969. — с. 226–230, 258–264.