Уравнение теплопроводности

Волченко Ю.М.

Содержание лекции

Задача о нагреве стержня, вывод уравнения теплопроводности. Краевые условия. Метод Фурье решения уравнения теплопроводности для бесконечного стержня. Численное решение уравнения теплопроводности методом сеток.

Решение уравнения теплопроводности в системе *Mathematica*.

8 апреля 2016 г.

1 Вывод уравнения

Пусть имеется тонкий однородный стержень длины L, теплоизолированный с боков по всей длине и помещенный на отрезок $[0; L]$ оси Ox. Предположим, что на концах стержня поддерживается определенный температурный режим (концы стержня можно нагревать, охлаждать или сохранять их температуру постоянной). Понятно, что в соответствии с законами физики температура стержня в общем случае будет изменяться. Процесс изменения температуры будем описывать функцией $u\,(x,t)$, значение которой равно температуре стержня в точке $x \in [0; L]$ в момент времени t.

Возьмем участок стержня $[x, x+\Delta x]$ и составим для него уравнение теплового баланса. По закону Фурье количество теплоты ΔQ_1, протекающей слева направо через сечение стержня в точке x за промежуток времени $[t, t+\Delta t]$ пропорционально скорости изменения температуры в этой точке стержня, площади поперечного сечения S и промежутку времени Δt:

$$\Delta Q_1 = -kS\,\frac{\partial u\,(x,t)}{\partial x}\,\Delta t, \tag{1}$$

где k – коэффициент пропорциональности. Знак минус выбран потому, что величина теплового потока считается положительной, когда тепло распространяется в сторону увеличения x. Но тогда $\partial u/\partial x > 0$, а передача тепла происходит в противоположном направлении — от более нагретых мест к менее нагретым, что и отражает минус в формуле (1).

Аналогично найдем количество тепла, протекающего через сечение стержня в точке $x + \Delta x$:

$$\begin{aligned}\Delta Q_2 &= -kS\,\frac{\partial u\,(x+\Delta x,t)}{\partial x}\,\Delta t = \\ &= -kS\left[\frac{\partial u\,(x,t)}{\partial x} + \frac{\partial u\,(x+\Delta x,t)}{\partial x} - \frac{\partial u\,(x,t)}{\partial x}\right]\Delta t = \\ &= -kS\left[\frac{\partial u\,(x,t)}{\partial x} + \frac{\partial^2 u\,(x_1,t)}{\partial x^2}\,\Delta x\right]\Delta t,\end{aligned}$$

где $x_1 \in [x, x+\Delta x]$.

Количество тепла, полученное стержнем за время Δt, равно разности

$$\Delta Q = \Delta Q_1 - \Delta Q_2 = kS\,\frac{\partial^2 u\,(x_1,t)}{\partial x^2}\,\Delta x\,\Delta t. \tag{2}$$

С другой стороны, количество теплоты, которое необходимо сообщить однородному телу, чтобы повысить его температуру на Δu, пропорционально Δu, объему тела V и его плотности ρ:

$$\Delta Q = c\rho V\,\Delta u = c\rho S\,\Delta u\,\Delta x, \tag{3}$$

где c — удельная теплоемкость тела.

Поскольку количества теплоты (2) и (3) должны быть равны, получаем уравнение баланса

$$c\rho S\,\Delta u\,\Delta x = kS\,\frac{\partial^2 u\,(x_1,t)}{\partial x^2}\,\Delta x\,\Delta t.$$

Разделим обе части уравнения на S, Δt и Δx и перейдем к пределу при $\Delta t \to 0$:

$$c\rho\,\frac{\partial u}{\partial t} = k\,\frac{\partial^2 u\,(x_1,t)}{\partial x^2}.$$

Теперь перейдем к пределу при $\Delta x \to 0$:

$$c\rho\,\frac{\partial u}{\partial t} = k\,\frac{\partial^2 u\,(x,t)}{\partial x^2},$$

или

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},} \tag{4}$$

где $a^2 = \frac{k}{c\rho}$. Последнее уравнение называется ***уравнением теплопроводности*** и относится к линейным уравнениям второго порядка параболического типа.

2 Краевые условия

Формулировка задач с участием уравнения теплопроводности обычно включает в себя требование, чтобы в нулевой момент времени было задано распределение температуры. Для задачи со стержнем это требование имеет вид

$$u(x,0) = \varphi(x), \tag{5}$$

где $\varphi(x)$ — некоторая известная функция. Это равенство называется ***начальным условием***.

Кроме того, бывают заданы режимы поддержания в течение времени требуемой температуры на концах стержня:

$$u(0,t) = \psi_1(t), \; u(l,t) = \psi_2(t). \tag{6}$$

Эти соотношения называют ***граничными***, или ***краевыми условиями***.

Граничные условия могут принимать и другую форму. Например, вместо выписанных равенств можно потребовать, чтобы через концы стержня протекал тепловой поток определенного вида:

$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = \upsilon_1(t), \; \frac{\partial u(l,t)}{\partial x} = \upsilon_2(t).$$

Если важно учесть теплообмен с окружающей средой, имеющей на левом конце стержня температуру $\theta_1(t)$, а на правом — $\theta_2(t)$, то граничные условия могут принять вид

$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = -\lambda_1 \left[u(0,t) - \theta_1(t)\right],$$
$$\frac{\partial u(l,t)}{\partial x} = -\lambda_2 \left[u(l,t) - \theta_2(t)\right],$$

где λ_1, λ_2 — константы.

Задачи решения уравнения теплопроводности с перечисленными типами краевых условий называются ***задачами Коши***.

3 Бесконечный стержень

Бесконечный стержень является моделью очень длинного стержня, так как на тепловые процессы, протекающие в таком стержне, в основном влияет начальное распределение температуры, а влияние температурных условий на его концах начинает сказываться только по истечении довольно длительного промежутка времени. В силу сказанного граничные условия отбрасывают и получают задачу решения уравнения теплопроводности (4) при начальном условии (5).

Решением такой задачи мы и займемся, положив $a = 1$ и тем самым упростив уравнение (4):

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{7}$$

К такому уравнению всегда можно придти, если в уравнении (4) произвести замену $\tau = a^2 t$.

Так же, как и для уравнения струны с закрепленными концами, для решения уравнения (7) применим метод разделения переменных (метод Фурье), в соответствии с которым решение будем искать в виде

$$u(x,t) = X(x)T(t). \tag{8}$$

Подставляя эту функцию в (7), получим

$$X(x)T'(t) = X''(x)T(t),$$

или

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}.$$

Как и в случае с волновым уравнением, это уравнение распадается на два:

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \mu, \quad \frac{X''(x)}{X(x)} = \mu, \tag{9}$$

где μ — константа.

Первое из них имеет общее решение

$$T(t) = Ce^{\mu t}.$$

Поскольку температура $u(x,t) = X(x)T(t)$ при $t \to \infty$ бесконечно возрастать не может, то следует считать, что $\mu = -\lambda < 0$, $\lambda > 0$. Тогда

$$T(t) = Ce^{-\lambda t}.$$

Второе из уравнений (9) принимает вид

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0$$

и имеет общее решение

$$X(x) = A\cos\sqrt{\lambda}\,x + B\sin\sqrt{\lambda}\,x.$$

Следовательно, частное решение уравнения (7) в соответствии с (8) становится таким:

$$u = (AC\cos\sqrt{\lambda}\,x + BC\sin\sqrt{\lambda}\,x)e^{-\lambda t},$$

или

$$u = (\alpha\cos\sqrt{\lambda}\,x + \beta\sin\sqrt{\lambda}\,x)e^{-\lambda t}, \tag{10}$$

где $\alpha = AC$, $\beta = BC$.

Так как при различных λ могут выбираться свои α и β, то последние являются функциями первой: $\alpha = \alpha(\lambda)$, $\beta = \beta(\lambda)$. Следовательно, уравнение (10) можно переписать как

$$u_\lambda(x,t) = [\alpha(\lambda)\cos\sqrt{\lambda}\,x + \beta(\lambda)\sin\sqrt{\lambda}\,x]e^{-\lambda t}.$$

Можно показать, что и бесконечная сумма таких решений в виде интеграла по λ будет решением уравнения (7), и поэтому его общим решением является функция

$$u(x,t) = \int_0^\infty u_\lambda(x,\lambda)\,d\lambda = \int_0^\infty [\alpha(\lambda)\cos\sqrt{\lambda}\,x + \beta(\lambda)\sin\sqrt{\lambda}\,x]e^{-\lambda t}\,d\lambda.$$

Неизвестные функции $\alpha(\lambda)$ и $\beta(\lambda)$ найдем из начального условия (5):

$$u(x,0) = \int_0^\infty [\alpha(\lambda)\cos\sqrt{\lambda}\,x + \beta(\lambda)\sin\sqrt{\lambda}\,x]\,d\lambda = \varphi(x).$$

Сравнивая эту запись с интегралом Фурье[†]

$$f\,(x) = \frac{1}{\pi}\left[\int_0^\infty \cos\omega x\left(\int_{-\infty}^\infty f\,(t)\cos\omega t\,dt\right) + \sin\omega x\left(\int_{-\infty}^\infty f\,(t)\sin\omega t\,dt\right)\right]d\omega,$$

приходим к выводу, что искомые функции должны выражаться формулами

$$\alpha(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty \varphi\,(x)\cos\sqrt{\lambda}\,x\,dx, \quad \beta(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty \varphi\,(x)\sin\sqrt{\lambda}\,x\,dx.$$

Тем самым задача полностью решена.

4 Численные методы

Аналитическое решение прикладных задач в области уравнений в частных производных еще более редкое явление, чем в теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Поэтому есть смысл получить хотя бы элементарное представление о численных методах решения этого типа уравнений.

Поскольку последние будут решаться приближенно, ясно, что какие-то точные величины надо заменить приближенными. Прежде всего частные производные заменяют разделенными разностями[‡]:

$$\frac{\partial u\,(x,t)}{\partial x} \approx \frac{u\,(x+h,t) - u\,(x,t)}{h},$$

[†] Лекция «Преобразования Фурье».
[‡] Лекция «Интерполяция функций».

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \approx \frac{1}{h}\left[\frac{u(x+h,t)-u(x,t)}{h} - \frac{u(x,t)-u(x-h,t)}{h}\right] = \tag{11}$$
$$= \frac{u(x+h,t)-2u(x,t)+u(x-h,t)}{h^2},$$
$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \approx \frac{u(x,t+l)-u(x,t)}{l}, \tag{12}$$

где h — так называемый шаг вдоль оси Ox, l — шаг вдоль оси Oy (рис. 1). Далее, чтобы решить уравнение теплопроводности (4), надо выбрать граничные условия; пусть это будут условия (6).

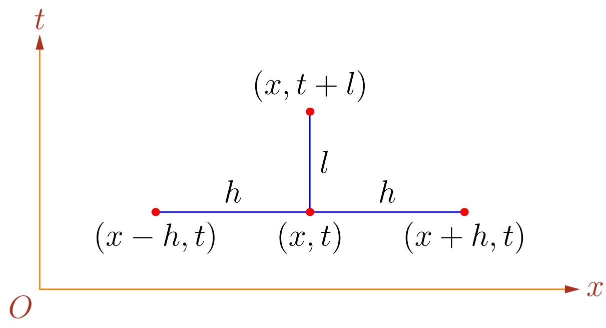


Рис. 1.

Таким образом, требуется найти функцию $u(x,t)$, заданную в прямоугольнике, ограниченном прямыми $x=0$, $x=L$, $t=0$, $t=T$, если заданы значения этой функции на трех его сторонах (рис. 2).

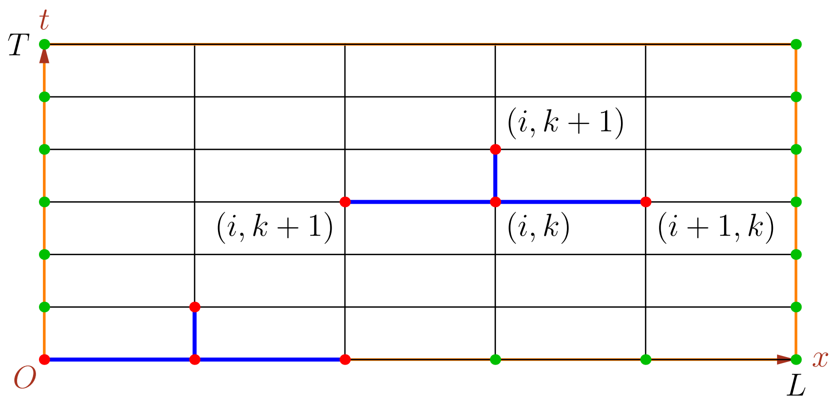


Рис. 2.

Покроем нашу область сеткой, образованной прямыми

$$x = ih,\ \ i = 0, 1, 2, \ldots;$$
$$y = kl,\ \ k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Введем обозначения $u(ih, kl) = u_{i,k}$; тогда формулы (11), (12) примут вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{u_{i+1,k} - 2u_{i,k} + u_{i-1,k}}{h^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial t} \approx \frac{u_{i,k+1} - u_{i,k}}{l},$$

а уравнение (4) станет (приближенно) таким:

$$\frac{u_{i,k+1} - u_{i,k}}{l} = a^2 \frac{u_{i+1,k} - 2u_{i,k} + u_{i-1,k}}{h^2}.$$

Найдем из него $u_{i,k+1}$:

$$u_{i,k+1} = \left(1 - \frac{2a^2 l}{h^2}\right) u_{i,k} + \frac{a^2 l}{h^2}\left(u_{i+1,k} + u_{i-1,k}\right). \tag{13}$$

Видно, что значение функции $u(x,t)$ в узле $(i, k+1)$ (верхнего ряда) определяется ее значениями в трех узлах нижнего ряда (рис. 2).

Чтобы процесс вычислений сходился, необходимо выполнение неравенства

$$l \le \frac{h^2}{2a^2}.$$

Вычислительную схему (13) можно упростить, если выбрать

$$l = \frac{h^2}{2a^2}, \tag{14}$$

тогда

$$u_{i,k+1} = \frac{1}{2}\left(u_{i+1,k} + u_{i-1,k}\right). \tag{15}$$

Этой формуле соответствует рис. 3.

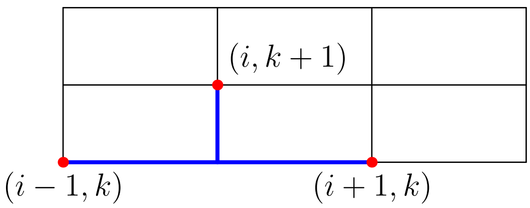


Рис. 3.

После того, как получены значения решения $u(x,t)$ в узлах сетки, в точках между узлами его значения можно вычислять с помощью плоскости, проходящей через три узла (интерполяция двумерной функции по трем точкам).

Полученное таким образом решение обозначим $u_h(x,t)$. Можно показать, что

$$\lim_{h\to 0} u_h(x,t) = u(x,t),$$
$$|u_h(x,t) - u(x,t)| < Mh^2, \ M = \text{const}.$$

Пример 1. *Левый конец стержня длины* $L = 7$ *поддерживается при температуре* 16°*, а правый — при температуре* 0°*. В момент времени* $t = 0$ *распределение температуры было нулевым. Произвести численный расчет распределения температуры в последующие моменты времени при условии, что в уравнении теплопроводности* (4) *параметр* $a = 1$.

Решение. Возмем $h = 7/6$, $l = 49/72$. Тогда при заданном значении $a = 1$ выполнится условие (14). Теперь на законном основании можно применить расчетную формулу (15). Вычисления сведем в таблицу

9	16	11,63	8,13	4,63	2,81	1	0
8	16	11,63	7,25	4,63	2	1	0
7	16	11	7,25	3,5	2	0,5	0
6	16	11	6	3,5	1	0,5	0
5	16	10	6	2	1	0	0
4	16	10	4	2	0	0	0
3	16	8	4	0	0	0	0
2	16	8	0	0	0	0	0
1	16	0	0	0	0	0	0
0	16	0	0	0	0	0	0
k/i	0	1	2	3	4	5	6

и проиллюстрируем рис. 4, на котором показаны вторая, пятая и девятая итерации расчетов.

□

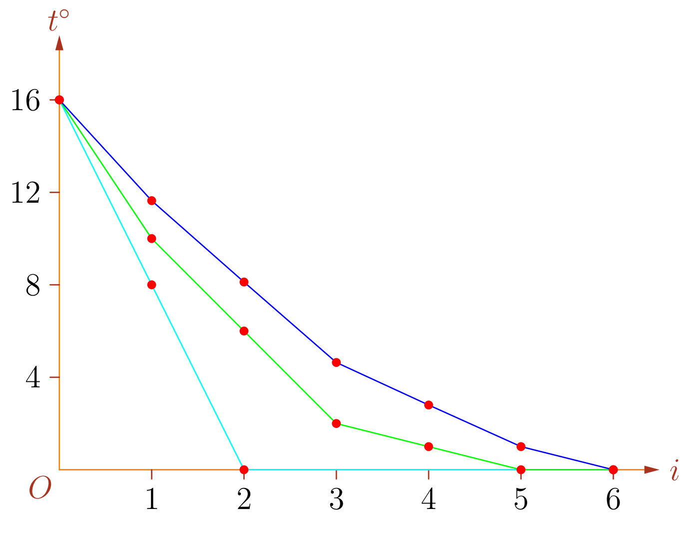


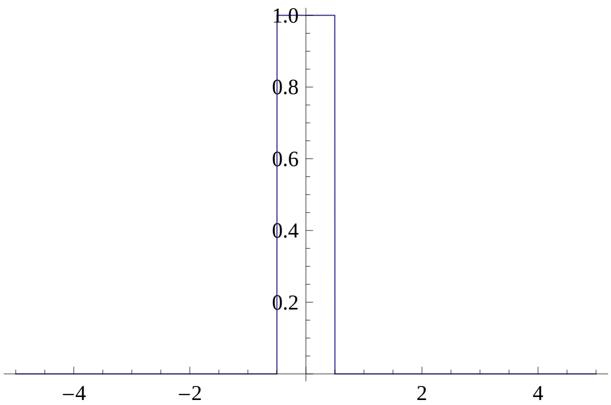
Рис. 4. Расчет нагрева стержня.

Решение задач теплопроводности в системе *Mathematica* приведено в Приложении[1)].

Приложение

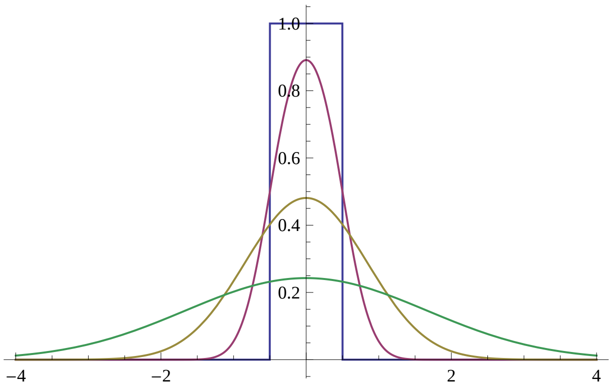
[1)] Рассмотрим численное решение задачи нагрева бесконечного стержня. Пусть в начальный момент времени стержень в начале координат подвергается тепловому импульсу вида

```
φ[x_] := UnitBox[x];
Plot[φ[x],{x,−5,5}]
```



Далее, используя уже знакомую процедуру `NDSolveValue` найдем численное решение задачи и построим графики распределения температуры вдоль стержня для некоторых значений времени:

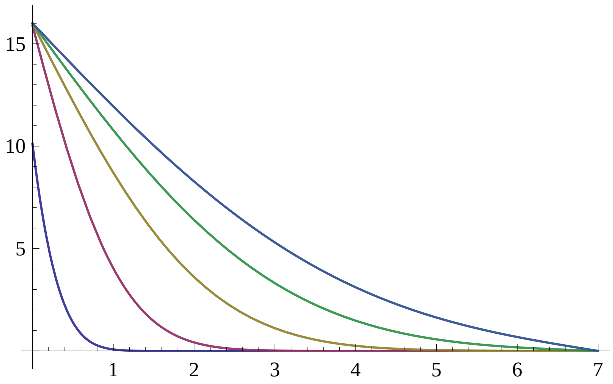
```
usol = NDSolveValue[{∂_t u[t,x] == ∂_{x,x} u[t,x], u[0,x] == φ[x]}, u, {t, 0, 1.5},
  {x, −1000, 1000}, MaxSteps → Infinity];
Plot[{φ[x],usol[0.05,x], usol[0.3,x], usol[1.3,x]}, {x,-4,4},
  PlotRange → All, PlotTheme → "Classic"]
```



Можно наблюдать, как с течением времени максимальная температура уменьшается, график уплощается и «расползается» вдоль оси времени.

Решим также задачу о нагреве стержня конечной длины, рассмотренную на лекции:

```
a = 1;
usol = NDSolveValue[{∂_t u[t,x] == a^2 ∂_{x,x} u[t,x], u[0,x] == 0, u[t,0] == 16,
  u[t,7] == 0}, u, {t, 0, 10}, {x, 0, 7}];
Plot[{usol[1,x], usol[2.5,x], usol[4.5,x], usol[6.5,x], usol[10,x]}, {x,0,7},
  PlotRange → All, PlotTheme → "Classic"]
```



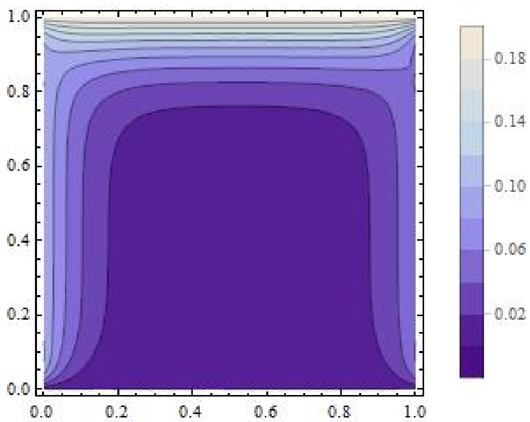
Видно, что процесс нагрева ведет к линейному убыванию температуры стержня от его левого конца к правому.

Модифицированное уравнение теплопроводности используется при исследовании нагрева или охлаждения двумерных поверхностей и трехмерных тел. Мы ограничимся двумерным объектом — тонкой пластинкой квадратной формы: $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$. Ее температура в точке (x, y) в момент времени t описывают функцией $u(t, x, y)$, а уравнение теплопроводности в двумерном случае принимает вид

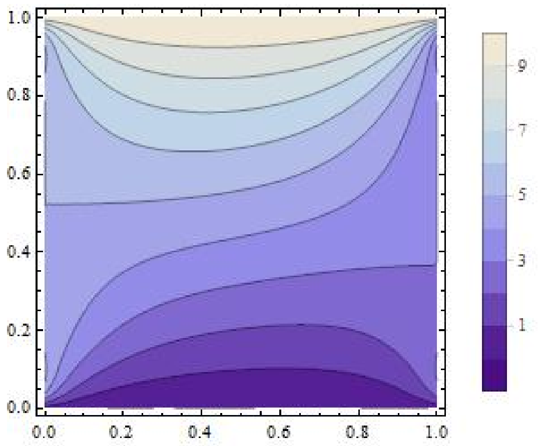
$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right).$$

Предположим, что начальная температура пластинки равна нулю, а ее края поддерживаются при следующих температурах: верхний край — при температуре 10°, левый — при 5°, правый — при 3°, нижний — при 0°. Решим эту задачу в системе *Mathematica* и построим изотермы пластинки для $t = 0{,}02$, когда нагрев пластинки только начинается:

```
a = 1;
usol = NDSolveValue[{∂t u[t,x,y] == a^2(∂x,x u[t,x,y] + ∂y,y u[t,x,y]),
  u[0,x,y] == 0, u[t,0,y] == 5, u[t,1,y] == 3, u[t,x,0] == 0, u[t,x,1] == 10},
  u, {t, 0, 10}, {x, 0, 1}, {y, 0, 1}];
ContourPlot[usol[0.02,x,y], {x,0,1},{y,0,1},PlotLegends -> Automatic,
  PlotTheme -> "Classic"]
```



Как показывает рис., температура вблизи краев пластинки близка к их температуре, средняя часть пластинки еще не нагрета. По истечении более длительного времени $t = 10$ получим следующее распределение температуры:



Литература

[1] Бугров Я.С., Никольский С.М. *Высшая математика. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного* . – М.: Наука, 1985, – с. 327-329, 334-342.

[2] Араманович И.Г., Левин В.И. *Уравнения математической физики*. – М.: Наука, 1969. – с. 145–183.