Экстремумы функции нескольких переменных

Волченко Ю.М.

Содержание лекции

Экстремумы функции нескольких переменных. Необходимое условие экстремума. Достаточные условия экстремума. Условный и безусловный экстремумы. Метод множителей Лагранжа. Необходимые условия условного экстремума. Его достаточные условия. Поиск наименьшего и наибольшего значений функции нескольких аргументов в ограниченной и замкнутой области.

Анимация особенностей поиска наименьшего и наибольшего значений функции.
Анимация работает только в программе Acrobat Reader!

Отыскание экстремумов функций в системе *Mathematica*.

21 июня 2013 г.

1 Безусловный экстремум

Как и у функции одного переменного, у функции нескольких переменных могут быть экстремумы. Решение задач на экстремумы становится, с одной стороны, более сложным, а, с другой стороны, более интересным, так как позволяет решить многие действительно важные прикладные проблемы.

На рис. 1 показана функция двух аргументов, имеющая два экстремума. Наличие экстремумов можно изобразить не только в виде трехмерного графика, но и с помощью схематической плоской картинки, на которой проведены так называемые линии уровня. ***Линией уровня*** функции $z = f(x, y)$ называется кривая, имеющая в плоскости xOy уравнение $f(x, y) = C = \text{const}$.

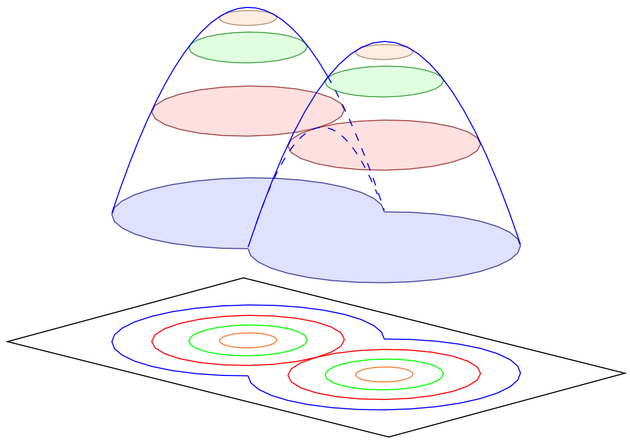


Рис. 1. Линии уровня функции.

Фактически – это сечение графика функции плоскостью, параллельной плоскости xOy, спроектированное затем на эту координатную плоскость.

Сказанное как раз и демонстрирует рис. 1: плоскости, параллельные плоскости xOy, пересекая график функции, дают в сечении кривые, которые затем проектируются на плоскость xOy, показанную ниже графика функции.

Говорят, что функция $z = f(x, y)$ имеет ***минимум*** в точке M_0, если

$$\exists U(M_0) \forall M \in U(M_0) \ f(M_0) \leq f(M).$$

Говорят, что функция $z = f(x, y)$ имеет ***максимум*** в точке M_0, если

$$\exists U(M_0) \forall M \in U(M_0) \ f(M_0) \geq f(M).$$

Минимумы и максимумы функции называются ее ***экстремумами***. Иногда их называют безусловными экстремумами, или экстремумами при отсутствии ограничений. Наличие ограничений на аргументы функции приводит к понятию условного экстремума, с которым мы познакомимся далее.

Теорема 1 (Необходимое условие экстремума). *Если функция $y = f(M)$, $M(x_1, \ldots, x_n)$, дифференцируема в точке $M_0\left(x_1^0, \ldots, y_1^0\right)$ и имеет в ней экстремум, то все первые частные производные $\partial f / \partial x_i$ этой функции равны нулю в точке M_0:*

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial x_1} = 0, \ldots, \frac{\partial f(M_0)}{\partial x_n} = 0. \quad (1)$$

Доказательство. Рассмотрим функцию одного аргумента

$$\varphi(x_1) = f\left(x_1, x_2^0, \ldots, x_n^n\right).$$

Очевидно, она имеет экстремум в точке x_1^0. Значит, для нее выполняется необходимое условие экстремума, справедливое для дифференцируемой функции одного аргумента, то есть $\varphi'\left(x_1^0\right) = \partial f\left(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0\right)/\partial x_1 = 0$. Аналогично доказываются утверждения о равенстве нулю остальных частных производных, $\partial f(M_0)/\partial x_i$, $i = \overline{2, n}$.

Замечание 1. *Необходимое условие экстремума можно записать в компактной форме* $\nabla f\left(M_0\right) = \mathbf{0}$.

Замечание 2. *Теорема не дает достаточных условий экстремума. Например, функция* $z = x^2 - y^2$ *имеет частные производные,* $z'_x = 2x$, $z'_y = -2y$, *обращающиеся в* 0 *в точке* $(0;0)$. *Но в этой точке функция экстремума не имеет, так как*

$$z\left(0,\varepsilon\right) = -\varepsilon^2 < 0 = z\left(0,0\right) < \varepsilon^2 = z\left(\varepsilon,0\right)\ \forall\left(\varepsilon > 0\right).$$

Точки, в которых все первые частные производные функции обращаются в нуль, называются ее ***стационарными*** точками.

При выполнении для функции f необходимых условий экстремума ее формулу Тейлора[†] можно переписать в виде

$$f\left(M\right) - f\left(M_0\right) = \frac{1}{2}\Delta\mathbf{x}^T\mathbf{H}\left(M_0\right)\Delta\mathbf{x} + o\left(\rho^2\left(M, M_0\right)\right).$$

где $M(x_1, \ldots, x_n)$, $M_0(x_1^0, \ldots, x_n^0)$, $\Delta\mathbf{x} = (x_1 - x_1^0, \ldots, x_n - x_n^0)^T$, $\mathbf{H} = \left\{\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right\}_n^n$. Если считать влияние члена $o\left(\rho^2\left(M, M_0\right)\right)$ несущественным в силу его малости, то знак разности в левой части равенства определяется значением второго дифференциала функции, имеющем вид квадратичной формы $\Delta\mathbf{x}^T\mathbf{H}\left(M_0\right)\Delta\mathbf{x}$. При ее положительности получаем $f\left(M\right) \geq f\left(M_0\right)$, что означает наличие минимума в точке M_0, а при отрицательности имеем $f\left(M\right) \leq f\left(M_0\right)$ и максимум в этой точке.

Поэтому, чтобы сформулировать достаточные условия экстремума, рассмотрим некоторые понятия, связанные с произвольной квадратичной формой вида $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$, где $\mathbf{x}^T = (x_1, \ldots, x_n)$, матрица которой имеет вид

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots & a_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}. \qquad (2)$$

Квадратичная форма называется ***положительно определенной*** (***отрицательно определенной***), если для любого ненулевого вектора $\mathbf{x}$ выполняется $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} > 0$ ($\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} < 0$). Матрица $\mathbf{A}$ при этом тоже называется положительно определенной (отрицательно определенной).

[†] Последняя формула в основном тексте лекции «Полный дифференциал».

Квадратичная форма называется ***знакопеременной***, если она может принимать как положительные, так и отрицательные значения.

Для квадратичных форм с симметричной матрицей $\mathbf{A}$, т. е. такой, что $a_{ij} = a_{ji}$, существует критерий Сильвестра для проверки квадратичной формы на положительную и отрицательную определенность. В этом критерии используются определители $\Delta_1 = |a_{11}|$, $\Delta_2 = \left|\{a_{ij}\}_2^2\right|$, $\ldots$, $\Delta_n = \left|\{a_{ij}\}_n^n\right| = |\mathbf{A}|$, называемые ***главными минорами*** матрицы $\mathbf{A}$ и отмеченные в формуле (2) прямыми углами.

Лемма 1 (Критерий Сильвестра). *Для того чтобы квадратичная форма с симметричной матрицей была положительно определенной, необходимо и достаточно, чтобы все главные миноры ее матрицы были положительны. Для того чтобы квадратичная форма с симметричной матрицей была отрицательно определенной, необходимо и достаточно, чтобы знаки главных миноров матрицы чередовались следующим образом:*

$$\Delta_1 > 0, \Delta_2 < 0, \Delta_3 > 0, \Delta_4 < 0, \ldots .$$

Теорема 2 (Достаточные условия экстремума). *Пусть функция $y = f(M)$ дважды дифференцируема в окрестности своей стационарной точки M_0. Если квадратичная форма $\Delta\mathbf{x}^T\mathbf{H}\,(M_0)\,\Delta\mathbf{x}$ положительно определена (отрицательно определена), то в точке M_0 функция имеет минимум (максимум); если же названная квадратичная форма знакопеременна, то экстремума в точке M_0 нет.*

Для функции двух переменных $z = f\,(x, y)$ достаточно рассмотреть два определителя матрицы $\mathbf{H}$:

$$H_1 = f''_{xx},\ H_2 = \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{vmatrix},$$

после чего можно переформулировать теорему 2 в следующем виде.

Теорема 3 (Достаточные условия экстремума для функции двух аргументов). *Пусть функция $z = f\,(x, y)$ в окрестности стационарной точки M_0 имеет непрерывные частные производные 2-го порядка. Тогда, если*

1) $H_2\,(M_0) > 0$ и $H_1\,(M_0) > 0$, то в точке M_0 — минимум функции f;

2) $H_2\,(M_0) > 0$ и $H_1\,(M_0) < 0$, то в точке M_0 — максимум функции f;

3) $H_2\,(M_0) < 0$ — в точке M_0 экстремума нет;

4) $H_2\,(M_0) = 0$ — требуются дополнительные исследования.

Пример 1. *Исследовать на экстремумы функцию*

$$z = x^3 + y^3 - 3xy.$$

Решение. Найдем первые частные производные функции и приравняем их к нулю:

$$z'_x = 3x^2 - 3y = 0,$$
$$z'_y = 3y^2 - 3x = 0.$$

Решим полученную систему уравнений:

$$y = x^2,\ x^4 - x = 0,$$
$$x_1 = 0,\ y_1 = 0,\ x_2 = 1,\ y_2 = 1.$$

Получили стационарные точки функции $M_1\left(0;0\right)$, $M_2\left(1;1\right)$. Найдем вторые частные производные:

$$z''_{xx} = 6x,\ z''_{xy} = z''_{yx} = -3,\ z''_{yy} = 6y.$$

Составим и вычислим определители H_1 и H_2:

$$H_1 = 6x,\ H_2 = \begin{vmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{vmatrix} = 36xy - 9 = 9\left(4xy - 1\right).$$

Так как $H_2\left(M_1\right) = -9 < 0$, то в точке M_1 экстремума нет. В точке M_2 имеем минимум, поскольку $H_2\left(M_2\right) = 27 > 0$ и $H_1\left(M_2\right) = 6 > 0$. Значение экстремума записывается в виде $z_{\min} = z\left(1;1\right) = -1$.

2 Условный экстремум. Метод множителей Лагранжа

Пусть требуется найти экстремумы функции $y = f\left(x_1, \ldots, x_n\right)$ при условии, что переменные $x_1, \ldots, x_n$ связаны уравнениями

$$\left\{\begin{array}{l} \varphi_1\left(x_1, \ldots, x_n\right) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi_m\left(x_1, \ldots, x_n\right) = 0, \end{array}\right. \tag{3}$$

где $f, \varphi_1, \ldots, \varphi_m$ — дифференцируемые функции. Такая задача называется задачей на *условный экстремум* в отличие от задачи на *безусловный экстремум*, в которой отсутствуют ограничения (3).

Говорят, что в точке M_0 функция $y = f\left(x_1, \ldots, x_n\right)$ имеет ***условный минимум***, если

$$\exists\left(U\left(M_0\right)\right)\forall\left(M \in U\left(M_0\right)\right)$$
$$f\left(M_0\right) \leq f\left(M\right) \wedge \varphi_1\left(M_0\right) = 0 \wedge \ldots \wedge \varphi_m\left(M_0\right) = 0.$$

Поменяв в этом высказывании знак неравенства на противоположный, получим определение ***условного максимума***.

Условные минимум и максимум функции называются ее ***условными экстремумами***.

Интересно, что задача на условный экстремум может быть сведена к задаче на безусловный экстремум для ***функции Лагранжа***

$$L(M,\Lambda) = f(M) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \varphi_j(M),$$

где λ_j — дополнительные переменные, называемые ***множителями Лагранжа***, которые мы будем записывать в виде координат точки $\Lambda(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ в m-мерном пространстве. Не останавливаясь на теоретическом обосновании этой возможности, отметим, что необходимые условия условного экстремума в соответствии с равенствами (1) в этом случае принимают вид

$$\frac{\partial L(M_0,\Lambda_0)}{\partial x_i} = \frac{\partial f(M_0)}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^0 \frac{\partial \varphi_j(M_0)}{\partial x_j} = 0,\ i = \overline{1,n}; \tag{4}$$

$$\frac{\partial L(M_0,\Lambda_0)}{\partial \lambda_j} = \varphi_j(M_0) = 0,\ j = \overline{1,m}. \tag{5}$$

Таким образом, для определения координат стационарной точки (M_0, Λ_0), $\Lambda_0\left(\lambda_1^0, \ldots, \lambda_m^0\right)$, имеется как раз $n+m$ уравнений, причем, вторая группа уравнений просто означает, что в точке M_0 должны выполняться ограничения (3). Более точно необходимые условия экстремума формулируются в следующей теореме.

Теорема 4 (Необходимые условия условного экстремума). *Пусть функция $f(M)$ дифференцируема в точке M_0 и имеет в этой точке условный экстремум при условиях связи* (3). *Пусть функции φ_m дифференцируемы в некоторой окрестности точки M_0, их частные производные непрерывны в точке M_0, и определитель матрицы $\{\partial\varphi_i/\partial x_j\}_m^m$ отличен от нуля в точке M_0. Тогда выполнены условия* (4), (5).

Чтобы определить, имеется ли в найденной стационарной точке (M_0, Λ_0) экстремум, нужны его достаточные условия. Введем определитель порядка $m+n$

$$\Delta = \begin{vmatrix} O & G \\ G^T & H \end{vmatrix}, \tag{6}$$

где O_m^m — нулевая матрица, $G = \{\partial\varphi_i/\partial x_j\}_m^n$, $H = \{\partial^2 L/\partial x_i \partial x_j\}_n^n$ и обозначим главные миноры определителя Δ через Δ_1, Δ_2, $\ldots$, Δ_{m+n}.

Теорема 5 (Достаточные условия условного экстремума). *Пусть в точке M_0 выполнены необходимые условия условного экстремума, а функции f и φ_k дважды дифференцируемы в точке M_0. Тогда 1) если в точке M_0 знаки миноров Δ_{2m+1}, Δ_{2m+2}, ..., Δ_{m+n} совпадают со знаком числа $(-1)^m$, то точка M_0 является точкой условного минимума; 2) если в точке M_0 знаки миноров $\Delta_{2m+1}, \Delta_{2m+2}, \ldots, \Delta_{m+n}$ чередуются, причем знак минора Δ_{2m+1} совпадает со знаком числа $(-1)^{m+1}$, то точка M_0 является точкой условного максимума.*

Посмотрим, как выглядит теория условного экстремума в простейшем случае функции двух переменных $z = f(x, y)$, связанных между собой уравнением

$$\varphi(x, y) = 0. \tag{7}$$

Составим функцию Лагранжа

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y)$$

и запишем необходимые условия условного экстремума:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial L(x_0, y_0, \lambda_0)}{\partial x} = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} + \lambda_0 \frac{\partial \varphi(x_0, y_0)}{\partial x} = 0,\\
&\frac{\partial L(x_0, y_0, \lambda_0)}{\partial y} = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} + \lambda_0 \frac{\partial \varphi(x_0, y_0)}{\partial y} = 0,\\
&\frac{\partial L(x_0, y_0, \lambda_0)}{\partial \lambda} = \varphi(x_0, y_0) = 0.
\end{aligned}$$

Пусть $M_0(x_0, y_0)$, λ_0 – решение этой системы. Как мы знаем, наличие экстремума в этой точке и его тип определяет знак второго дифференциала. Для дважды дифференцируемых функций f и φ он имеет вид[†]

$$d^2L = L''_{xx}\Delta x^2 + 2L''_{xy}\Delta x\Delta y + L''_{yy}\Delta^2 y. \tag{8}$$

Возьмем полный дифференциал от уравнения связи (7):

$$\varphi'_x\Delta x + \varphi'_y\Delta y = 0,$$

и выразим из полученного равенства Δy:

$$\Delta y = -\frac{\varphi'_x}{\varphi'_y}\Delta x.$$

Подставим это выражение вместо Δy в формулу (8):

$$d^2L = L''_{xx}\Delta x^2 + 2L''_{xy}\Delta x\left(-\frac{\varphi'_x}{\varphi'_y}\Delta x\right) + L''_{yy}\left(-\frac{\varphi'_x}{\varphi'_y}\Delta x\right)^2 =$$

[†] Лекция «Полный дифференциал».

$$= \frac{\Delta x^2}{\varphi_y'^2}\left(\varphi_y'^2 L''_{xx} - 2\varphi'_x\varphi'_y L''_{xy} + \varphi_x'^2 L''_{yy}\right).$$

Мы видим, что знак второго дифференциала определяет выражение в скобках, которое можно записать в виде определителя:

$$\Delta = -\begin{vmatrix} 0 & \varphi'_x & \varphi'_y \\ \varphi'_x & L''_{xx} & L''_{xy} \\ \varphi'_y & L''_{yx} & L''_{yy} \end{vmatrix}.$$

В соответствии со сказанным, если $\Delta(M_0, \lambda_0) > 0$, то M_0 – точка условного минимума, а при $\Delta(M_0, \lambda_0) < 0$ – условного максимума.

Пример 2. *Найти экстремум функции $z = x + 2y$ при условии $x^2 + y^2 = 5$.*

Решение. Запишем функцию Лагранжа

$$L = x + 2y + \lambda\left(x^2 + y^2 - 5\right),$$

найдем ее частные производные и приравняем их к нулю:

$$L'_x = 1 + 2\lambda x = 0,\ L'_y = 2 + 2\lambda y = 0,\ L'_\lambda = x^2 + y^2 - 5 = 0.$$

Из первого и второго уравнения выразим x и y через λ: $x = -\frac{1}{2\lambda}$, $y = -\frac{1}{\lambda}$. Подставив эти выражения в третье уравнение системы, получим $\frac{1}{4\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} = 5$, откуда $\lambda_1 = -1/2$, $\lambda_2 = 1/2$. Значению λ_1 соответствуют $x_1 = 1$, $y_1 = 2$, а значению λ_2 отвечают $x_1 = -1$, $y_1 = -2$. В результате имеем две стационарные точки: $M_1(1;2)$ (соответствует λ_1) и $M_2(-1;-2)$ (соответствует λ_2). Найдем частные производные функции $\varphi(x,y) = x^2 + y^2 - 5$ и функции Лагранжа :

$$\varphi'_x = 2x,\ \varphi'_y = 2y,\ L''_{xx} = L''_{yy} = 2\lambda,\ L''_{xy} = L''_{yx} = 0,$$

составим определитель

$$\Delta = -\begin{vmatrix} 0 & 2x & 2y \\ 2x & 2\lambda & 0 \\ 2y & 0 & 2\lambda \end{vmatrix} = 8\lambda\left(x^2 + y^2\right).$$

Вычислим его значения в найденных точках: $\Delta(M_1, \lambda_1) = -20 < 0$, $\Delta(M_2, \lambda_2) = 20 > 0$. Значит, в точке M_1 функция имеет условный максимум, а в точке M_2 – условный минимум. Ее значения в этих точках равны $z(M_1) = 5$, $z(M_2) = -5$.

На рис. 2 показано, почему функция $z = x + 2y$, которая, вообще говоря, не имеет ни наименьшего, ни наибольшего значений, при ограничении $x^2 + y^2 = 5$ принимает эти значения, соответственно, в точках M_1 и M_2. На рис. в виде отрезков прямых изображены линии уровня функции, справа от которых в трех случаях в квадратиках проставлены ее значения. Мы видим, что сдвигая отрезок $x + 2y = 0$ параллельно самому себе в сторону увеличения значения функции, мы в конце концов приходим к отрезку, являющемуся касательным к окружности, и дальнейшее увеличения значения функции становится невозможным. Точка касания $(1;2)$ и дает наибольшее значение функции, равное 5. Рассуждения относительно минимума аналогичны.

□

Более содержательный пример рассмотрен в Приложении[1].

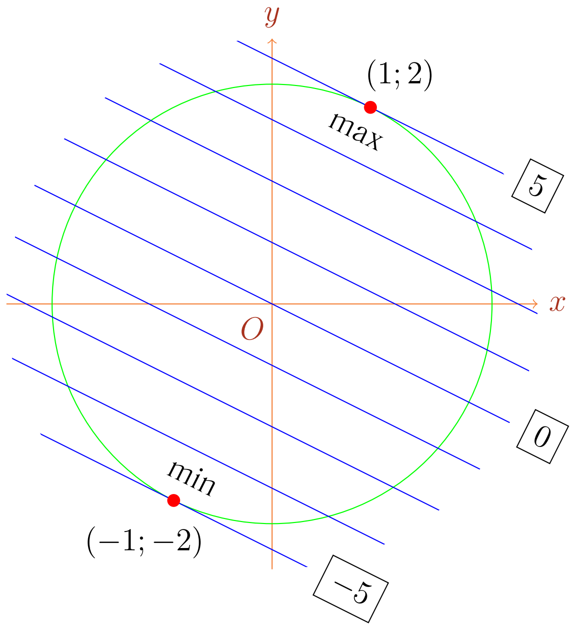


Рис. 2. К примеру 2.

3 Наибольшее и наименьшее значения функции

Пусть функция $y = f(x_1, \ldots, x_n)$ дифференцируема на ограниченном замкнутом множестве D. Тогда она достигает на этом множестве своего наибольшего и наименьшего значений†. Точки, в которых эти значения достигаются, могут быть расположены как внутри множества D, так и на его границе. Поэтому, чтобы найти наибольшее и наименьшее значения функции, проводят ее исследование как внутри области D, так и на различных участках ее границы.

Более подробно рассмотрим этот вопрос на примере непрерывно дифференцируемой функции двух переменных $z = f(x, y)$ и множества D, заданного в виде

$$D = \left\{(x, y) : \varphi_i(x, y) \leq 0, i = \overline{1, m}\right\}.$$

Применяется следующая схема вычислений, для которой вначале Список Точек пуст.

1) Найти стационарные точки функции, принадлежащие области D, и внести их в Список Точек.

2) Для каждого $i = \overline{1, m}$ из уравнения границы $\varphi_i(x, y) = 0$ выразить либо x через y: $x = \beta_i(y)$, либо y через x: $y = \alpha_i(x)$; пусть выбрано второе. Рассмотреть функцию $h_i(x) = f(x, \alpha_i(x))$ и найти ее стационарные точки $x_1, \ldots x_k$ как функции одного аргумента; из точек на плоскости $(x_1, \alpha_i(x_1))$, $(x_2, \alpha_i(x_2))$, …,

†Лекции «Частные производные», «Полный дифференциал».

$(x_k, \alpha_i(x_k))$ добавить в Список Точек те, которые принадлежат границе множества D (остальные отбросить).

3) Решая всевозможные пары уравнений

$$\varphi_i(x, y) = 0,\ \varphi_j(x, y) = 0,\ i \neq j,$$

получить точки, лежащие на пересечении кривых, определяющих границы области; в Список Точек добавить только те их них, которые принадлежат границе D (так называемые угловые точки).

4) Вычислить значения функции $z = f(x, y)$ во всех точках из Списка Точек и, сравнивая эти значения между собой, найти среди них наименьшее и наибольшее.

Почему нужен такой довольно сложный алгоритм, показывает анимационный рис. 3. Изменение положения области D, заключающееся в ее перемещении по плоскости xOy вдоль некоторой кривой, вызывает изменение координат точек, в которых достигается наибольшее и наименьшее значения функции в заданном квадрате. Эти точки располагаются то внутри квадрата, то во внутренних точках его сторон, то в его вершинах.

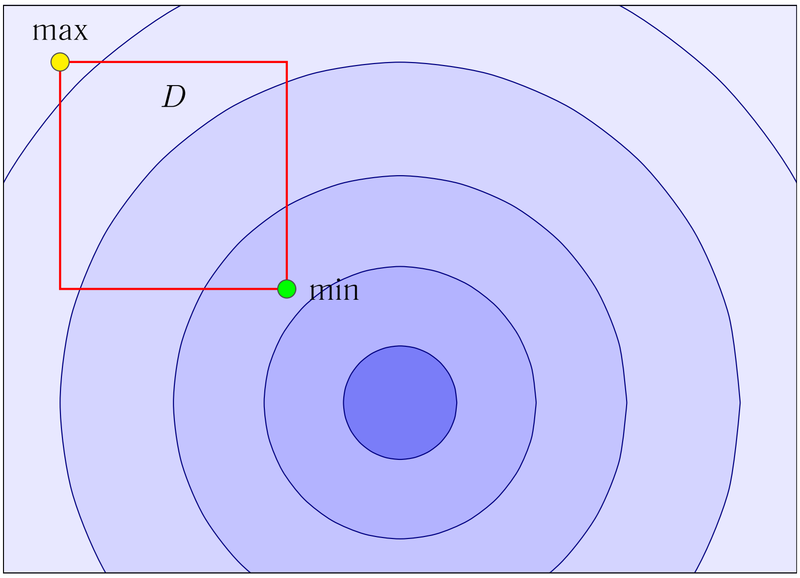


Рис. 3.

Пример 3. *Для функции $z = x^2 + x + 2y$ определить ее наименьшее и наибольшее значения в области $x \leq 1$, $y \leq 1$, $y \geq (x-1)^2$.*

Решение. Изобразим заданную функцию с помощью линий уровня, на которых проставим значения, которые она на них имеет (рис. 4).

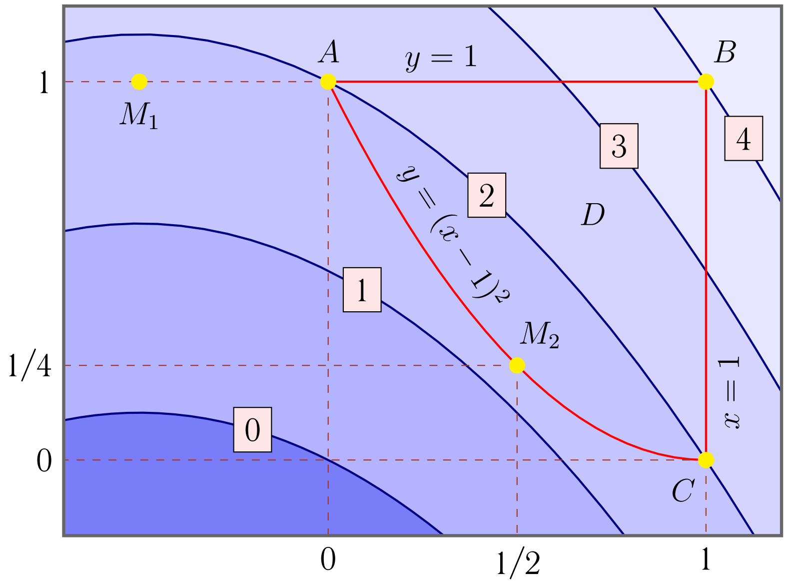


Рис. 4. К примеру 3.

Красными линиями нарисуем границу области D. Вычислим частные производные функции и приравняем их к нулю:

$$z'_x = 2x + 1 = 0, \; z'_y = 2.$$

Производная по y не равна нулю, поэтому стационарных точек функция не имеет.

Исследуем функцию на экстремум на части границы AB с уравнением $y = 1$. Подставим вместо y в заданную функцию единицу: $z = x^2 + x + 2$. Найдем стационарные точки полученной функции: $z' = 2x + 1 = 0$, $x = -1/2$. Это дает точку $M_1\left(-\frac{1}{2}; 1\right)$, которая, однако, не принадлежит области (отбрасываем).

Берем следующую часть границы, BC, с уравнением $x = 1$. Подстановка в заданную функцию такого значения x приводит к функции $z = 2 + 2y$. Ее производная $z' = 2$ в нуль не обращается, на чем исследование функции вдоль AB заканчивается.

Последняя часть границы, AC, имеет уравнение $y = (x-1)^2$. Подставим правую часть этого выражения вместо y в заданную функцию: $z = x^2 + x + 2\,(x-1)^2$. Вычислим производную полученной функции: $z'_x = 2x + 1 + 4\,(x-1) = 6x - 3$. Ее корень $x = 1/2$ вместе с соответствующим значением ординаты $y = (x-1)^2\big|_{x=1/2} = 1/4$ дает точку $M_2\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right) \in D$.

Угловые точки границы в данном случае находятся легко: $A\,(0;1)$, $B\,(1;1)$, $C\,(1;0)$. Итак, в Список Точек вошли M_2, A, B, C. Вычислим значения функции в этих точках:

$$z\,(M_2) = z\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1\frac{1}{4};$$

$$z\,(A) = z\,(0;1) = 2; \; z\,(B) = z\,(1;1) = 4; \; z\,(C) = z\,(1;0) = 2.$$

Из найденных значений выбираем наименьшее и наибольшее:

$$\min_D z\,(x,y) = z\,(M_2) = 1\frac{1}{4}, \quad \max_D z\,(x,y) = z\,(B) = 4.$$

□

В Приложении[2)] показано, как исследовать функцию нескольких переменных на экстремумы средствами системы *Mathematica*.

Приложение

[1] Рассмотрим пример из области электротехники

Пример П1. *Для электрической сети на рис. 5, где P_k — приемник тока, потребляющий i_k тока, необходимо для заданного напряжения $2u$ в сети определить сечения проводов так, чтобы на всю сеть пошло наименьшее количество меди.*

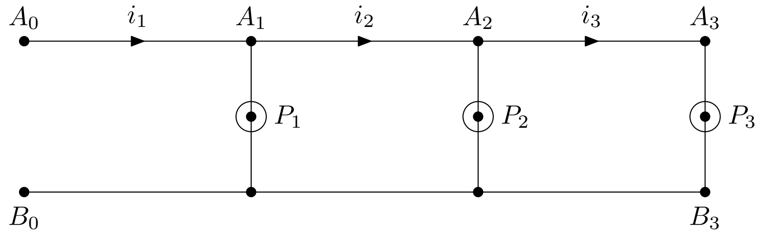


Рис. 5. Электрическая сеть.

Решение. Так как провода A_0A_3 и B_0B_3 находятся в одинаковых условиях, ограничимся рассмотрением только первого из них. Обозначим l_k длину участка сети $A_{k-1}A_k$, $k = \overline{1,3}$, через q_k — площадь его поперечного сечения, через R_k — его сопротивление. Тогда необходимый объем меди для сети выразится формулой

$$u = l_1q_1 + l_2q_2 + l_3q_3. \tag{П1}$$

Если обозначить ρ сопротивление медной проволоки длиной в 1 м и с сечением 1 мм^2, то сопротивление участка $A_{k-1}A_k$ будет равно $R_k = \rho\, l_k/q_k$, а падение напряжения на этом участке по закону Ома запишется в виде

$$u_k = R_k i_k = \frac{\rho\, l_k i_k}{q_k}.$$

По условию задачи должно выполняться равенство суммы падений напряжений на всех участках входному напряжению $2u$. Но поскольку мы рассматриваем только один провод, то требуется выполнение равенства

$$u_1 + u_2 + u_3 = u,$$

или

$$\varphi\left(q_1, q_2, q_3\right) = \frac{\rho\, l_1 i_1}{q_1} + \frac{\rho\, l_2 i_2}{q_2} + \frac{\rho\, l_3 i_3}{q_3} - u = 0. \tag{П2}$$

Таким образом, сформулирована задача на условный экстремум функции (П1)

$$f\left(q_1, q_2, q_3\right) = l_1q_1 + l_2q_2 + l_3q_3$$

при наличии уравнения связи (П2).

Для ее решения составим функцию Лагранжа

$$L\left(q_1, q_2, q_3, \lambda\right) = l_1q_1 + l_2q_2 + l_3q_3 + \lambda^2\left(\frac{\rho\, l_1 i_1}{q_1} + \frac{\rho\, l_2 i_2}{q_2} + \frac{\rho\, l_3 i_3}{q_3} - u\right),$$

в которой для дальнейшего удобства вычислений множитель Лагранжа взят в квадрате.

Приравнивание нулю производной этой функции по λ^2 приведет нас к уравнению связи, а равенство нулю производных по остальным аргументам даст формулы

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} = l_k - \lambda^2\frac{\rho\, l_k i_k}{q_k^2} = 0,$$

из которых можно выразить переменные q_k:

$$q_k = \lambda\sqrt{\rho i_k}. \tag{П3}$$

Подставляя эти выражения в уравнение связи, получим

$$\frac{\rho\, l_1 i_1}{\lambda\sqrt{\rho i_1}} + \frac{\rho\, l_2 i_2}{\lambda\sqrt{\rho i_2}} + \frac{\rho\, l_3 i_3}{\lambda\sqrt{\rho i_3}} = u,$$

или

$$\frac{\sqrt{\rho}}{\lambda}\left(l_1\sqrt{i_1} + l_2\sqrt{i_2} + l_3\sqrt{i_3}\right) = u,$$

откуда

$$\lambda = \frac{\sqrt{\rho}}{u}\left(l_1\sqrt{i_1} + l_2\sqrt{i_2} + l_3\sqrt{i_3}\right).$$

Следовательно, формула (П3) приобретает вид

$$q_k = \frac{\rho}{u}\sqrt{i_k}\left(l_1\sqrt{i_1} + l_2\sqrt{i_2} + l_3\sqrt{i_3}\right). \tag{П4}$$

Чтобы показать, что найденные значения q_k действительно дают минимум расхода меди, проверим достаточные условия условного экстремума. Для этого составим определитель (6)

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial\varphi}{\partial q_1} & \frac{\partial\varphi}{\partial q_2} & \frac{\partial\varphi}{\partial q_3} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial q_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial q_1^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial q_1\partial q_2} & \frac{\partial^2 L}{\partial q_1\partial q_3} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial q_2} & \frac{\partial^2 L}{\partial q_2\partial q_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial q_2^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial q_2\partial q_3} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial q_3} & \frac{\partial^2 L}{\partial q_3\partial q_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial q_3\partial q_2} & \frac{\partial^2 L}{\partial q_3^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -\frac{\rho l_1 i_1}{q_1^2} & -\frac{\rho l_2 i_2}{q_2^2} & -\frac{\rho l_3 i_3}{q_3^2} \\ -\frac{\rho l_1 i_1}{q_1^2} & \frac{2\lambda^2\rho l_1 i_1}{q_1^3} & 0 & 0 \\ -\frac{\rho l_2 i_2}{q_2^2} & 0 & \frac{2\lambda^2\rho l_2 i_2}{q_2^3} & 0 \\ -\frac{\rho l_3 i_3}{q_3^2} & 0 & 0 & \frac{2\lambda^2\rho l_3 i_3}{q_3^3} \end{vmatrix}$$

и отметим, что в нашем примере $m = 1$, $n = 3$. Из теоремы 5 тогда следует, что нам надо вычислить миноры Δ_3 и Δ_4 и определить их знаки. При вычислении Δ_3 получаем два отрицательных слагаемых, так что

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 0 & -\frac{\rho l_1 i_1}{q_1^2} & -\frac{\rho l_2 i_2}{q_2^2} \\ -\frac{\rho l_1 i_1}{q_1^2} & \frac{2\lambda^2\rho l_1 i_1}{q_1^3} & 0 \\ -\frac{\rho l_2 i_2}{q_2^2} & 0 & \frac{2\lambda^2\rho l_2 i_2}{q_2^3} \end{vmatrix} < 0.$$

Определитель Δ_4 разложим по последнему столбцу:

$$\Delta_4 = \Delta = \begin{vmatrix} 0 & -\frac{\rho l_1 i_1}{q_1^2} & -\frac{\rho l_2 i_2}{q_2^2} & -\frac{\rho l_3 i_3}{q_3^2} \\ -\frac{\rho l_1 i_1}{q_1^2} & \frac{2\lambda^2\rho l_1 i_1}{q_1^3} & 0 & 0 \\ -\frac{\rho l_2 i_2}{q_2^2} & 0 & \frac{2\lambda^2\rho l_2 i_2}{q_2^3} & 0 \\ -\frac{\rho l_3 i_3}{q_3^2} & 0 & 0 & \frac{2\lambda^2\rho l_3 i_3}{q_3^3} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{\rho\, l_3 i_3}{q_3^2}\begin{vmatrix} -\frac{\rho l_1 i_1}{q_1^2} & \frac{2\lambda^2\rho l_1 i_1}{q_1^3} & 0 \\ -\frac{\rho l_2 i_2}{q_2^2} & 0 & \frac{2\lambda^2\rho l_2 i_2}{q_2^3} \\ -\frac{\rho\ l_3 i_3}{q_3^2} & 0 & 0 \end{vmatrix} + \frac{2\lambda^2\rho\, l_3 i_3}{q_3^3}\,\Delta_3 < 0,$$

поскольку последний выписанный определитель и Δ_3 отрицательны. Так как знаки Δ_3 и Δ_4 совпадают со знаком числа $(-1)^m = (-1)^1 = -1$, то при найденных значениях (П4) действительно имеет место условный минимум. □

[2)] Систему *Mathematica* можно применять для исследования функции нескольких переменных на экстремумы как в прямом, так и в косвенном смысле. В первом случае используются уже известные вам операторы `Minimize`, `Maximize`, `FindMinimum` и `FindMaximum`, а во втором *Mathematica* помогает решить систему уравнений, вытекающих из необходимых условий экстремума, вычислить определители для проверки достаточных условий и т. д.

Если вы попробуете решить лекционный пример, в котором требуется найти экстремумы функции $z = x^3 + y^3 - 3xy$, вызвав оператор `Minimize`, то *Mathematica* вам ответит, что заданная функция минимума не имеет. И это — чистая правда. Дело в том, что упомянутый оператор ищет глобальный минимум, а у этой функции нет наименьшего значения.

Задачу может, однако, решить оператор `FindMinimum`, если ему указать начальную точку поиска, например, $(1/2; 1/2)$:

```
FindMinimum[x^3 + y^3 - 3xy,{x,1/2},{y,1/2}]
{-1.,{x → 1.,y → 1.}}
```

Если же мы хотим решить задачу по всем правилам, «как на лекции», то можно использовать систему *Mathematica* для выполнения промежуточных вычислений. Для этого зададим нашу функцию:

```
z[x_,y_]:=x^3 + y^3 - 3xy
```

и решим систему уравнений, вытекающую из необходимых условий экстремума для этой задачи:

```
Solve[{∂_x z[x,y]==0,∂_y z[x,y]==0}]
{{x → 0, y → 0}, {x → 1, y → 1}, {x → -(-1)^(1/3), y → (-1)^(2/3)},
  {x → (-1)^(2/3), y → -(-1)^(1/3)}}
```

Обе (хотя кажется, что четыре) стационарные точки получены. Теперь найдем определители H_1 и H_2 для проверки достаточных условий экстремума (определители вычисляет оператор `Det`):

```
H1 = ∂_{x,x} z[x,y]
6x
H2 = Det[ ∂_{x,x} z[x,y]   ∂_{x,y} z[x,y]
          ∂_{y,x} z[x,y]   ∂_{y,y} z[x,y] ]
-9 + 36xy
```

и вычислим их значения в найденных точках:

```
H2/.{x → 0,y → 0}
-9
H1/.{x → 1,y → 1}
6
H2/.{x → 1,y → 1}
27
```

Таким образом, исследование функции на экстремум проведено полностью.

Перейдем к лекционному примеру на условный экстремум. Введем функцию, получающуюся из уравнения связи, и функцию Лагранжа:

```
φ[x_,y_]:=x^2 + y^2 - 5
L[x_,y_,λ_]:=x + 2y + λφ[x, y]
```

Используем необходимые условия:

$\mathtt{Solve}[\{\partial_x L[x,y,\lambda]==0, \partial_y L[x,y,\lambda]==0, \partial_\lambda L[x,y,\lambda]==0\}]$

$\left\{\left\{\lambda \to -\frac{1}{2}, x \to 1, y \to 2\right\}, \left\{\lambda \to \frac{1}{2}, x \to -1, y \to -2\right\}\right\}$

Составим определитель Δ:

$$\Delta = -\mathtt{Det}\begin{bmatrix} 0 & \partial_x\varphi[x,y] & \partial_y\varphi[x,y] \\ \partial_x\varphi[x,y] & \partial_{x,x}L[x,y] & \partial_{x,y}L[x,y] \\ \partial_y\varphi[x,y] & \partial_{y,x}L[x,y] & \partial_{y,y}L[x,y] \end{bmatrix}$$

$8x^2\lambda + 8y^2\lambda$

и вычислим его значения в найденных стационарных точках:

$\Delta/.\{x \to 1, y \to 2, \lambda \to -1/2\}$

-20

$\Delta/.\{x \to -1, y \to -2, \lambda \to 1/2\}$

20

Выводы из этих результатов уже были сделаны на лекции.

Напрямую *Mathematica* решает эту задачу так:

$\mathtt{Minimize}[x + 2y, x^2 + y^2 == 5, \{x,y\}]$

$\{-5,\{x \to -1, y \to -2\}\}$

$\mathtt{Maximize}[x + 2y, x^2 + y^2 == 5, \{x,y\}]$

$\{5,\{x \to 1, y \to 2\}\}$

Пример 3 тоже решается в две строчки ввода:

$\mathtt{Minimize}[x^2 + x + 2y, x \le 1 \,\&\&\, y \le 1 \,\&\&\, y \ge (x-1)^2, \{x,y\}]$

$\left\{\frac{5}{4}, \left\{x \to \frac{1}{2}, y \to \frac{1}{4}\right\}\right\}$

$\mathtt{Maximize}[x^2 + x + 2y, x \le 1 \,\&\&\, y \le 1 \,\&\&\, y \ge (x-1)^2, \{x,y\}]$

$\{4,\{x \to 1, y \to 1\}\}$

Сделаем средствами системы *Mathematica* рисунок к этому примеру (рис. 6):

```
plot1=ContourPlot[x^2 + x + 2y,{x,-0.7,1.25},{y,-0.25,1.25},
  ContourLabels -> Function[{x,y,z},Text[Framed[z],{x,y},
  Background -> LightYellow]]];
plot2=ParametricPlot[{x,(x - 1)^2},{x,0,1},PlotStyle -> {Thick,Red}];
plot3=Graphics[{Thick,Red,Line[{{0,1},{1,1},{1,0}}],Yellow,
  PointSize[Large],Point[{{-1/2,1},{1/2,1/4},{0,1},{1,1},{1,0}}],
  Black,Text[Style["A",Medium],{0,1.08}],Text[Style["B",Medium],{1,1.08}],
  Text[Style["C",Medium],{1,-0.09}],Text[Style["M2",Medium],{0.65,0.25}],
  Text[Style["M1", Medium],{-1/2,1.08}],Text[Style["D",Medium],{0.7,0.65}]}];
Show[plot1,plot2,plot3]
```

Для оформления значений линий уровня в операторе `ContourPlot` была использована опция `ContourLabels`, которая эти значения помещает в прямоугольники светло-желтого цвета, окаймленные черным. Метка линии уровня описывается функцией трех переменных `Function`, называемой в системе *Mathematica* чистой, так как она не имеет специального имени, причем, первые два ее аргумента являются координатами точки, в которой располагается метка, а

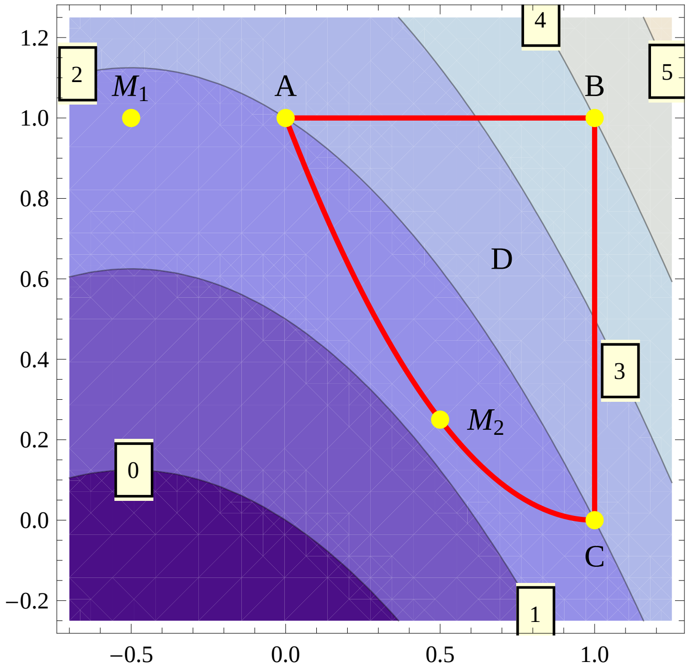


Рис. 6.

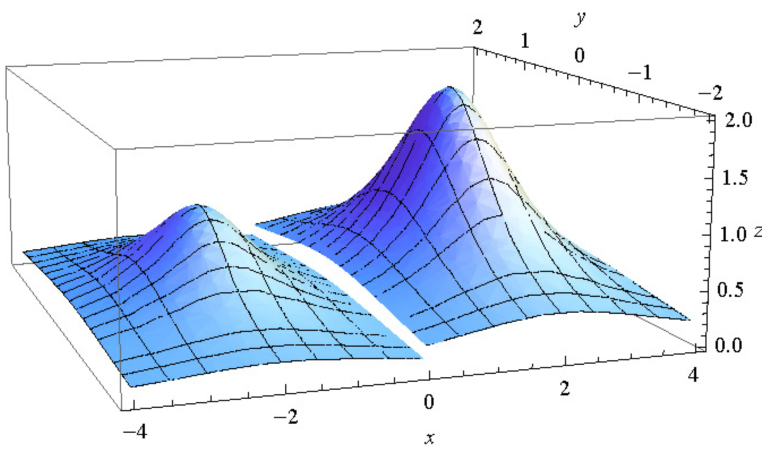
третий является выводимым значением заданной функции. Это значение выводится как текст, взятый в прямоугольник (`Framed`), на светло-желтом фоне (`Background` $\rightarrow$ `LightYellow`).

Напоследок познакомимся с тем, как *Mathematica* находит глобальные и локальные экстремумы многоэкстремальных функций. Зададим функцию вида

$$\texttt{z[x\_,y\_]:=}\begin{cases} \dfrac{1}{1+(x+2)^2+y^2} & \texttt{x} < 0 \\ \dfrac{2}{1+(x-2)^2+y^2} & \texttt{x} \geq 0 \end{cases}$$

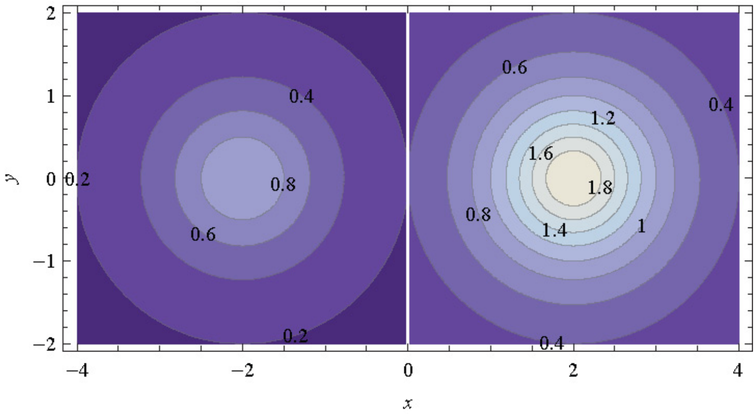
и построим ее график:

```
Plot3D[z[x, y],{x,−4,4},{y,−2,2},AxesLabel → {x,y,z}]
```



Как видите, функция имеет два максимума и терпит разрыв по линии $x = 0$. Добавим также ее изображение в виде линий уровня:

```
ContourPlot[z[x, y],{x,−4,4},{y,−2,2},ContourLabels → True,
  AspectRatio → Automatic,FrameLabel → {x,y}]
```



Все известные вам операторы максимизации успешно находят глобальный максимум такой вот разрывной функции:

```
Maximize[z[x,y],{x,y}]
{2,{x → 2,y → 0}}
NMaximize[z[x,y],{x,y}]
{2.,{x → 2.,y → −6.71156 × 10^-9}}
FindMaximum[z[x,y],{x,y}]
{2.,{x → 2.,y → −1.94476 × 10^-11}}
```

А как найти локальный максимум? Для этого оператору NMaximize надо указать какой-нибудь диапазон поиска для аргументов функции. Мы ограничим только переменную x:

```
NMaximize[z[x,y],{{x,−3,0},y}]
{1.,{x → −2.,y → −2.81241 × 10^-23}}
```

Локальный максимум найден. Для оператора FindMaximum укажем подходящую начальную точку поиска. Выберем точку $(-3;0)$:

```
FindMaximum[z[x,y],{x,−3},{y,0}]
{1.,{x → −2.,y → 0.}}
```

И этот оператор справился с задачей.

Литература

[1] Бугров Я.С., Никольский С.М. *Высшая математика. Дифференциальное и интегральное исчисление.* – М.: Наука, 1984, – с. 336-343, 357-364.

[2] Письменный Д.Т. *Конспект лекций по высшей математике.* – М.: Рольф, 2000. Ч. 1. – с. 274–278.

[3] Колыбасова В.В., Крутицкая Н.Ч. *Достаточные условия существования решения задачи об условном экстремуме методом Лагранжа.* – М.: МГУ.