Экстремумы функции

Волченко Ю.М.

Содержание лекции

Необходимые и достаточные условия монотонности функции. Минимум и максимум функции. Понятие экстремума. Необходимое условие экстремума. Достаточные условия экстремума функции, выражаемые с помощью первой, второй и более высокого порядка производных. Поиск наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке.

Анимация критерия монотонности и необходимого условия экстремума. Анимация работает только в программе Acrobat Reader!

Поиск экстремумов функций в системе *Mathematica*.

14 января 2013 г.

Человеку свойственно стремиться к лучшему: максимизировать прибыль, минимизировать затраты, повышать качество аппаратуры, уменьшать уровень помех в электронных устройствах, продлевать срок их эксплуатации и т.д. Достижение этих целей обычно зависит от множества факторов, но иногда — только от одного фактора. В последнем случае, если цель поддается математической формализации, возникает задача об экстремуме функции одного аргумента. Этому вопросу и посвящена данная лекция. Но, поскольку, чтобы убедиться, что ты находишься на вершине горы, надо на эту вершину сначала подняться, а затем увидеть, что с этого места можно только спуститься, задача об экстремуме функции тесно связана с ее монотонностью.

1 Интервалы монотонности функции

Оказывается, интервалы возрастания и убывания функции можно найти с помощью ее производной.

Теорема 1 (Необходимые условия монотонности). *Если функция $y = f(x)$ в интервале (a, b) возрастает (убывает) и дифференцируема, то для всех x из этого интервала $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$).*

Доказательство. Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в интервале (a, b) и возрастает и пусть $x + \Delta x \in (a, b)$. Тогда, если $\Delta x > 0$, то $f(x + \Delta x) > f(x)$, а, если $\Delta x < 0$, то $f(x + \Delta x) < f(x)$. В обоих случаях

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} > 0.$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $\Delta x \to 0$, получим $f'(x) \geq 0$.

Для убывающей функции доказательство аналогично.

Замечание 1. *Если функция возрастает (убывает) на* (a, b)*, не обязательно* $f'(x)$ *строго больше (меньше)* 0*. Функция* $y = x^3$ *возрастает на всей числовой оси, но ее производная* $y' = 3x^2$ *равна нулю в точке* $x_0 = 0$.

Теорема 2 (Достаточные условия монотонности)**.** *Если в интервале* (a, b) *функция* $y = f(x)$ *дифференцируема и* $f'(x) > 0$ $(f'(x) < 0)$*, то такая функция возрастает (убывает) в интервале* (a, b).

Доказательство. Пусть $f'(x) > 0$ в (a, b) и пусть $x_1, x_2 \in (a, b)$, $x_1 < x_2$. По теореме Лагранжа $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$, $x_1 < c < x_2$. Правая часть этого равенства положительна, значит, и левая часть тоже. Получаем, что из $x_1 < x_2$ следует $f(x_1) < f(x_2)$ для произвольных x_1, x_2 из интервала (a, b). Следовательно, функция $f(x)$ возрастает в этом интервале.

Случай $f'(x) < 0$ доказывается аналогично. □

Поскольку производная функции численно равна тангенсу угла наклона касательной к графику функции, то геометрически утверждения теорем означают, что на интервалах возрастания функции угол между касательной и осью абсцисс — острый, а на интервалах убывания — тупой. Это демонстрирует анимационный рис. 1.

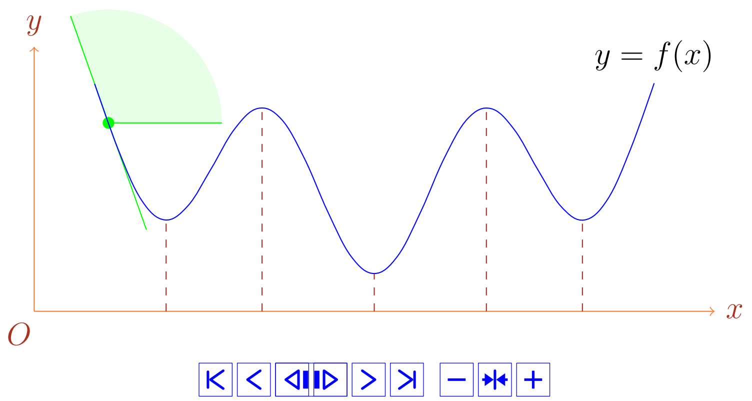


Рис. 1. Критерий монотонности функции.

Из доказанных теорем следует также, что производная функции может сменить свой знак на противоположный только при переходе через точки, в которых функция либо недифференцируема, либо ее производная равна нулю. Поэтому, чтобы отыскать интервалы монотонности (возрастания и убывания) функции, надо найти точки нулей и разрывов производной, а затем на интервалах, ограниченных этими точками, определить ее знак, например, вычисляя значение производной в одной из точек интервала.

Пример 1. *Найти интервалы убывания и возрастания функции*

$$y = \begin{cases} \sqrt[3]{x}, & x \le 1; \\ (x-2)^2, & x > 1. \end{cases}$$

Решение. Найдем производную функции

$$y' = \begin{cases} \frac{1}{3}x^{-2/3}, & x \le 1; \\ 2(x-2), & x > 1. \end{cases}$$

При $x = 0$ производная равна ∞; при $x = 1$ она не существует, так как односторонние производные не равны друг другу; наконец, при $x = 2$ производная равна 0 (см. рис. 2). Все эти точки разбивают ось абсцисс на интервалы монотонности $(-\infty, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 2)$, $(2, \infty)$, причем, в интервале $(1, 2)$ производная отрицательна и функция убывает, а в остальных — положительна и функция возрастает.

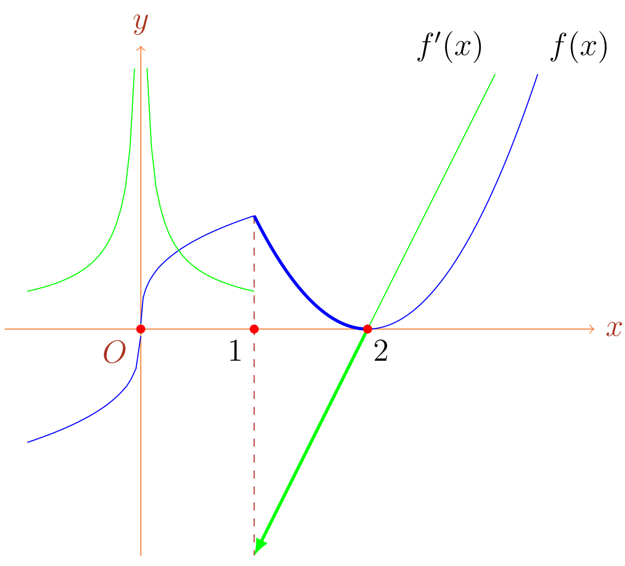


Рис. 2. К примеру 1.

2 Экстремумы функции

Точка x_0 называется ***точкой минимума*** функции $y = f(x)$, если существует окрестность $U(x_0)$, для всех точек x которой справедливо неравенство

$$f(x) \ge f(x_0).$$

Если знак неравенства заменить на противоположный, получим определение ***точки максимума*** функции. Значения функции в точках минимума и максимума называются, соответственно, ее ***минимумами*** и ***максимумами***. Минимумы и максимумы функции называются ее ***экстремумами***.

На рис. 3 изображен график функции, имеющей 4 экстремума: два минимума в точках x_2 и x_4 и два максимума в точках x_1 и x_3. Зеленые криволинейные трапеции имеют основаниями окрестности, для которых выполняется определяющее экстремум неравенство: $f(x) \geq f(x_i)$ для $i = 2, 4$, и $f(x) \leq f(x_i)$ для $i = 1, 3$. Выполнение неравенства демонстрируют вершины трапеции. Из рис. понятно, что минимум не обязательно является наименьшим значением функции, как и максимум — наибольшим. Минимум и максимум экстремальны лишь в пределах упомянутой окрестности и поэтому имеют локальное значение. Их часто так и называют — локальными экстремумами. Так что максимум не самая высокая гора, а любой, даже небольшой, холмик. Точно так же минимум — не самая глубокая впадина, а любая, даже неглубокая, ямка.

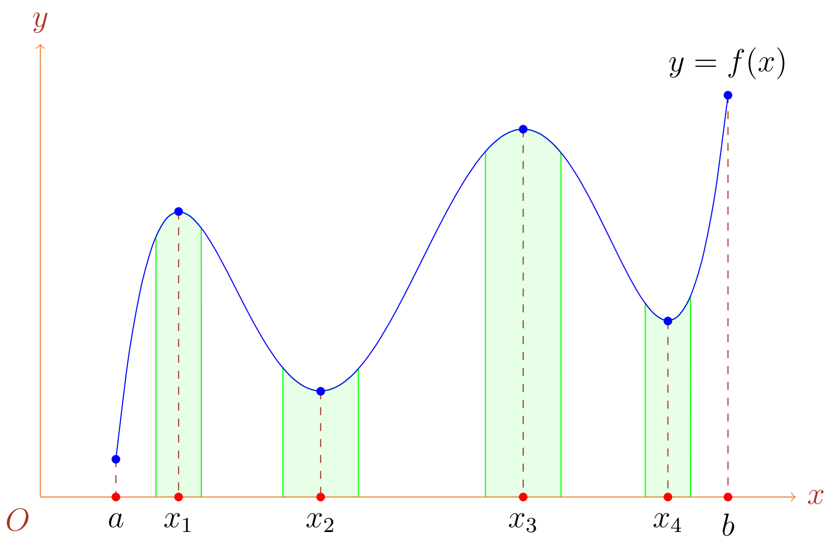


Рис. 3. Экстремумы функции.

Для отыскания экстремумов служат следующие теоремы.

Теорема 3 (Необходимое условие экстремума). *Если функция $y = f(x)$ имеет в точке x_0 экстремум, то в этой точке производная функции либо не существует, либо равна нулю:*

$$f'(x_0) = 0.$$

Доказательство. Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке экстремума x_0 и пусть для определенности x_0 — точка минимума. Тогда для достаточно малого $\Delta x \neq 0$ должно выполняться неравенство $f(x_0 + \Delta x) \geq f(x_0)$, или $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \geq 0$. Разделим обе части этого неравенства на Δx и получим два неравенства:

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \geq 0, \text{ если } \Delta x > 0;$$
$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \leq 0, \text{ если } \Delta x < 0.$$

Переход к пределу при $\Delta x \to 0$ приводит к соотношениям

$$f'(x_0) \geq 0, \; f'(x_0) \leq 0.$$

Но одно и то же число не может быть одновременно и больше, и меньше нуля; остается единственная возможность: $f'(x) = 0$.

То, что точки, в которых функция недифференцируема, могут быть точками ее экстремумов, показывает пример функции $y = \sqrt[3]{x^2}$. Ее производная $y' = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$ в нуле не существует, потому что $f'(0-0) = -\infty$, а $f'(0+0) = \infty$, но при этом для любого x выполняется $y(0) = 0 \leq \sqrt[3]{x^2}$. Так что $x = 0$ – точка минимума функции.

Следствие 1. *Если в какой-то точке производная функции существует, но не равна нулю, то в этой точке у функции экстремума нет.*

Замечание 2. *Функция не обязательно имеет экстремум в точке, в которой ее производная равна нулю. Производная функции* $y = x^3$ *равна* $y' = 3x^2$ *и в точке* $x_0 = 0$ *обращается в нуль. Но слева от* $x_0 = 0$ *функция меньше своего значения в этой точке:* $x^3 < y(0) = 0$, $x < 0$, *а справа больше этого значения:* $x^3 > y(0) = 0$, $x > 0$, *и, таким образом, экстремум в точке* $x_0 = 0$ *отсутствует.*

Следствие из необходимого условия экстремума позволяет отсеять точки, в которых экстремума заведомо нет, то есть те точки, в которых производная функции существует, но в нуль не обращается. Остальные точки, то есть точки, в которых производная равна нулю или не существует, образуют множество ***критических точек*** функции. Обычно множество критических точек конечно. Среди этих точек требуется выделить те, которые действительно являются точками экстремума функции. Это достигается с помощью следующей теоремы. Отметим, что критические точки, в которых производная функции равна нулю, называются ее ***стационарными*** точками.

Теорема 4 (Достаточное условие экстремума). *Пусть функция* $y = f(x)$ *непрерывна в точке* x_0 *и дифференцируема в некоторой ее окрестности* $\overset{\circ}{U}(x_0)$. *Если производная функции* $y = f'(x)$ *при переходе* x *через* *точку x_0 слева направо меняет свой знак с «$-$» на «$+$», то в точке x_0 функция имеет минимум; если с «$+$» на «$-$» — максимум. Если производная знак не меняет, то у функции в точке x_0 экстремума нет.*

Доказательство. Пусть производная при переходе x через точку x_0 слева направо меняет знак с «$-$» на «$+$». Возьмем в окрестности $U(x_0)$, о которой говорится в условии теоремы, точку x и применим к точкам x и x_0 теорему Лагранжа:

$$f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0), \tag{1}$$

$c \prec x, x_0$. Пусть $x < c < x_0$, тогда $f'(c) < 0$ и правая часть равенства положительна. Если же $x < c < x_0$, то $f'(c) > 0$ и правая часть (1) снова положительна. Таким образом, в указанной окрестности правая, а, значит, и левая части равенства (1) положительны, то есть $f(x) \geq f(x_0)$ для всех $x \in U(x_0)$ и, следовательно, точка x_0 — точка минимума.

Аналогично доказывается случай перемены знака производной с «$+$» на «$-$».

Если при переходе x через точку x_0 производная знак не меняет, например, для всех $x \in U(x_0)$ будет $f'(x) > 0$, то из (1) следует, что при $x < x_0$ выполняется $f(x) > f(x_0)$, а при $x < x_0$ — противоположное неравенство. Значит, функция $f(x)$ в точке x_0 экстремума не имеет. $\square$

Смена знаков производной равносильна изменению типа монотонности функции, смене убывания на возрастание или наоборот. На анимационном рис. 1 хорошо видно, что при движении x вдоль оси абсцисс слева направо в точках минимума убывание сменяется возрастанием, а в точках максимума — возрастание переходит в убывание. При этом в момент такого перехода касательная горизонтальна, что подчеркивается ее красным цветом. В этот момент в соответствии с теоремой 3 производная функции равна нулю.

Пример 2. *Исследовать на экстремумы функцию*

$$y = (x-4)\sqrt[3]{(x+1)^2}.$$

Решение. Найдем производную заданной функции:

$$y' = \sqrt[3]{(x+1)^2} + \frac{2}{3\sqrt[3]{x+1}}(x-4) = \frac{3(x+1)+2x-8}{3\sqrt[3]{x+1}} = \frac{5(x-1)}{3\sqrt[3]{x+1}}.$$

В точке $x_1 = -1$ производная не существует, а в точке $x_2 = 1$ производная равна нулю. Эти критические точки разбивают ось абсцисс на интервалы $(-\infty; -1)$, $(-1; 1)$, $(1, \infty)$. Вычисляя значения производной в этих интервалах, определяем ее знаки и изображаем их в виде стрелок, показывающих убывание или возрастание функции:

$$\begin{array}{ccc} \nearrow & \searrow & \nearrow \\ (-\infty; -1) & (-1; 1) & (1, \infty) \end{array}$$

Такая картинка сразу показывает, что $x = x_{\max} = -1$ — точка максимума функции, а $x = x_{\min} = 1$ — точка минимума. При этом надо учесть, что функция непрерывна на всей числовой оси. Остается найти значения функции в этих точках: $y_{\max} = y(-1) = 0$, $y_{\min} = y(1) = -3\sqrt[3]{4}$.

Пример 3. *Пусть ε — э. д. с. источника тока, r — его внутреннее сопротивление. Определить, при каком сопротивлении R внешней цепи полезная мощность*

$$P = \frac{\varepsilon^2 R}{(R+r)^2},$$

выделяемая во внешней электрической цепи, максимальна. Найти максимальное значение полезной мощности.

Решение. Найдем производную полезной мощности по сопротивлению R:

$$\frac{dP}{dR} = \varepsilon^2 \frac{(R+r)^2 - 2R(R+r)}{(R+r)^4} = \frac{(r-R)\varepsilon^2}{(R+r)^3}.$$

Мы видим, что в области допустимых значений R производная обращается в 0 в точке $R = r$, причем, слева от этой точки производная положительна, а справа — отрицательна. Значит, $R = r$ — точка максимума. Найдем максимальное значение полезной мощности:

$$P|_{R=r} = \frac{\varepsilon^2 r}{4r^2} = \frac{\varepsilon^2}{4r}.$$

Теорема 5 (Достаточное условие экстремума). *Пусть x_0 — стационарная точка функции $f(x)$. Тогда в точке x_0 функция имеет минимум (максимум), если $f''(x) > 0$ ($f''(x) < 0$).*

Доказательство. Пусть $f''(x_0) > 0$. По определению второй производной и в силу $f'(x_0) = 0$ имеем

$$f''(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{x - x_0} > 0.$$

Из леммы, доказанной ранее†, следует, что в достаточно малой окрестности точки x_0 будет выполняться неравенство

$$\frac{f'(x)}{x - x_0} > 0.$$

Это значит, что в этой окрестности $f'(x) < 0$ при $x < x_0$ и $f'(x) > 0$ при $x > x_0$. По теореме 4 получаем, что в точке x_0 функция имеет минимум.

Случай $f''(x_0) < 0$ анализируется аналогично.

†Лекция «Теоремы о среднем», Приложение.

Пример 4. *Кольцо радиусом R из проволоки равномерно заряжено и несет заряд q. Определить, на каком расстоянии r от центра кольца напряженность электрического поля*

$$E = \frac{qr}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0(R^2+r^2)^{3/2}}$$

на оси кольца будет максимальной (ε, ε_0 — константы).

Решение. Сначала найдем первую производную функции:

$$\frac{dE}{dr} = \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0} \cdot \frac{(R^2+r^2)^{3/2} - 3r^2(R^2+r^2)^{1/2}}{(R^2+r^2)^3} = \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0} \cdot \frac{R^2-2r^2}{(R^2+r^2)^{5/2}}.$$

В области допустимых значений r имеем единственную стационарную точку функции $r = R/\sqrt{2}$.

Вычислим вторую производную:

$$\begin{aligned}\frac{d^2E}{dr^2} &= \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0} \cdot \frac{-4r(R^2+r^2)^{5/2} - 5r(R^2-2r^2)(R^2+r^2)^{3/2}}{(R^2+r^2)^5} = \\ &= \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0} \cdot \frac{-4r(R^2+r^2) - 5rR^2 + 10r^3}{(R^2+r^2)^{7/2}} = \\ &= \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0} \cdot \frac{-9rR^2+6r^3}{(R^2+r^2)^{7/2}} = \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0} \cdot \frac{3r(2r^2-3R^2)}{(R^2+r^2)^{7/2}}\end{aligned}$$

и найдем ее значение при $r = R/\sqrt{2}$:

$$\left.\frac{d^2E}{dr^2}\right|_{r=R\sqrt{2}} = \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0} \cdot \frac{3R(R^2-3R^2)/\sqrt{2}}{(R^2+R^2/2)^{7/2}} = \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0} \cdot \frac{-6R^3}{\sqrt{2}R^7(3/2)^{7/2}} = -\frac{4q}{9\sqrt{3}\,\pi\varepsilon\varepsilon_0 R^4}.$$

Вторая производная в стационарной точке отрицательна, значит, функция в этой точке имеет максимум. Найдем его значение:

$$E_{\max} = E|_{r=R/\sqrt{2}} = \frac{qR/\sqrt{2}}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0(R^2+R^2/2)^{3/2}} = \frac{qR}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0\sqrt{2}R^3(3/2)^{3/2}} = \frac{q}{6\sqrt{3}\,\pi\varepsilon\varepsilon_0 R^2}.$$

□

Может получиться так, что вторая производная в стационарной точке функции равна нулю и, следовательно, теорема 5 не позволит определить наличие или отсутствие экстремума в этой точке. В этом случае может пригодиться теорема, использующая производные порядка, более высокого, чем 2.

Теорема 6 (Достаточное условие экстремума). *Пусть*

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n)}(x_0) = 0$$

и $f^{(n+1)}(x_0) \neq 0$ и непрерывна в окрестности точки x_0. Тогда

1) если $n+1$ — четно и $f^{(n+1)}(x_0) > 0$, то функция $f(x)$ имеет в точке x_0 минимум;

2) если $n+1$ — четно и $f^{(n+1)}(x_0) < 0$, то функция имеет в точке x_0 максимум;

3) если $n+1$ — нечетно, то в точке x_0 функция экстремума не имеет.

Доказательство. Пусть $f^{(n+1)}(x_0) > 0$. Представим функцию $f(x)$ по формуле Тейлора в окрестности точки x_0:

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\,(x - x_0)^{n+1},\ c \prec x, x_0. \qquad (2)$$

Поскольку $f^{(n+1)}(x)$ непрерывна в некоторой окрестности x_0, то в этой окрестности $\lim_{c\to x_0} f^{(n+1)}(c) = f^{(n+1)}(x_0) > 0$ и по уже упомянутой лемме в достаточно малой окрестности точки x_0 выполнится $f^{(n+1)}(c) > 0$.

Если $n+1$ – четно, то правая часть неравенства (2) при любом x из указанной окрестности положительна. Из левой части тогда получаем, что в этой окрестности $f(x) \geq f(x_0)$, т.е. x_0 – точка минимума.

Аналогично доказывается второе утверждение теоремы.

Если $n+1$ – нечетно, то при любом знаке $f^{(n+1)}(c)$ правая часть (2) при переходе x через x_0 меняет знак на противоположный, т.е. с одной стороны от x_0 будет выполняться $f(x) \geq f(x_0)$, а с другой стороны – противоположное неравенство. Поэтому в точке x_0 экстремума нет.

Пример 5. *Исследовать на экстремум функцию* $y = e^{-x} + e^{x} + 2\cos x$ *в точке* $x_0 = 0$.

Решение. Точка $x_0 = 0$ является стационарной для заданной функции, так как ее производная

$$y' = -e^{-x} + e^{x} - 2\sin x$$

в этой точке равна нулю.

Найдем еще производные и их значения в точке $x_0 = 0$:

$$\begin{aligned} y'' &= e^{-x} + e^{x} - 2\cos x, & y''(0) &= 0; \\ y''' &= -e^{-x} + e^{x} + 2\sin x, & y'''(0) &= 0; \\ y^{IV} &= e^{-x} + e^{x} + 2\cos x, & y^{IV}(0) &= 4. \end{aligned}$$

Так как первой не обратилась в нуль производная четного порядка, то в точке $x_0 = 0$ функция имеет экстремум, а именно минимум, так как $y^{IV}(0) > 0$.

3 Наибольшее и наименьшее значения функции

Непрерывная на отрезке функция достигает на нем своего наибольшего и наименьшего значения[†]. Но, как показывает рис. 3, не всегда она принимает эти значения в точках экстремумов. Наибольшее и наименьшее значения могут приниматься функцией и на концах отрезка. В связи с этим при поиске таких значений достаточные условия экстремума не используются. Поиск осуществляется по следующему алгоритму.

[†] Лекция «Непрерывность функции».

1. Найти критические точки функции и отбросить те из них, которые не принадлежат заданному отрезку.

2. Вычислить значения функции в оставшихся точках и на концах отрезка.

3. Сравнив эти значения между собой, выбрать из них наибольшее и наименьшее.

Пример 6. *Найти наибольшее и наименьшее значения функции*

$$y = -x^2 + 7\,|x| - 12$$

на отрезке $[-4; 3]$.

Решение. Перепишем функцию в виде

$$y = \begin{cases} -x^2 - 7x - 12, & x < 0; \\ -x^2 + 7x - 12, & x \geq 0. \end{cases}$$

Найдем ее производную:

$$y = \begin{cases} -2x - 7, & x < 0; \\ -2x + 7, & x \geq 0. \end{cases}$$

Как видим, производная обращается в нуль в точках $x = -7/2$ и $x = 7/2$, а при $x = 0$ она не существует, потому что в этой точке односторонние производные не равны друг другу. Точку $x = 7/2$ отбрасываем, поскольку она не принадлежит заданному отрезку.

Вычисляем значения функции в остальных критических точках и на концах отрезка:

$$y(-4) = 0,\ y\left(-\frac{7}{2}\right) = \frac{1}{4},\ y(0) = -12,\ y(3) = 0.$$

Таким образом,

$$\max_{[-4;3]} y(x) = y\left(-\frac{7}{2}\right) = \frac{1}{4},$$
$$\min_{[-4;3]} y(x) = y\,(0) = -12.$$

$\square$

Как исследовать функцию на монотонность и экстремумы с помощью системы *Mathematica*, показано в Приложении[1)].

Приложение

[1)] Чтобы найти интервалы монотонности функции, можно воспользоваться уже известным нам оператором Reduce. Зададим, например, такую функцию

$$f[x\_] := \begin{cases} \frac{1}{2x^2} & x < 1 \\ -(x-3)^2/2 + 5/2 & x \geq 1 \end{cases}$$

и найдем ее интервалы убывания:

```
Reduce[f′[x] < 0, x, Reals]
x > 3 || 0 < x < 1
```

Точно так же отыщем интервалы возрастания:

```
Reduce[f′[x] > 0, x, Reals]
x < 0 || 1 < x < 3
```

Интересно, что поставив системе *Mathematica* условие найти интервалы, на которых функция не равна нулю, мы получим интервалы, определяемые всеми критическими точками функции, а не только ее нулями. Не станем отказываться от приятной возможности найти сразу все критические точки функции:

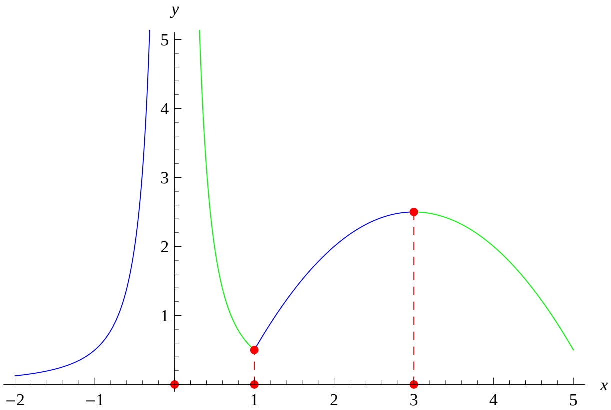
```
Reduce[f′[x] ≠ 0, x, Reals]
1 < x < 3 || x > 3 || x < 0 || 0 < x < 1
```

Построим график заданной функции, слегка его разукрасив: отметим критические точки и соответствующие им точки графика красным цветом, участки возрастания обозначим синим, а участки убывания — зеленым. Заодно познакомимся с некоторыми дополнительными возможностями изображения функций в системе *Mathematica*. Прежде всего, зададим несколько графиков, отвечающих разным цветам графика нашей функции:

```
plot1 = Plot[f[x],{x, -2, 0}, PlotStyle → Blue];
plot2 = Plot[f[x],{x, 0, 1}, PlotStyle → Green];
plot3 = Plot[f[x],{x, 1, 3}, PlotStyle → Blue];
plot4 = Plot[f[x],{x, 3, 5}, PlotStyle → Green];
```

Графики не будут выводиться на дисплей, так как после операторов Plot стоят точки с запятыми. Далее используем оператор Show, предназначенный для того, чтобы выводить на монитор комбинации различных геометрических объектов. Внутри квадратных скобок оператора перечислим заданные нами графики plot1 и т.д., а потом добавим оператор Graphics, в котором обычно указывают стандартные геометрические объекты: точки, отрезки, круги и др. Мы укажем точки (оператор Point) и отрезок (оператор Line). Внутри квадратных скобок последних двух операторов поместим списки координат точек и концов отрезка. Перед операторами разместим различные опции: Red — точки и отрезок отрисуются красным цветом, PointSize[Medium] — точки будут среднего размера, Dashed — отрезок изобразится штриховой линией. Далее запишем уже известные вам опции PlotRange и AxesLabel, которые будут справедливы для всего графика. Вот что у нас получится:

```
Show[plot1,plot2,plot3,plot4,Graphics[{Red,PointSize[Medium],
    Point[{{0,0},{1,0},{3,0},{1,f[1]},{3,f[3]}}],
    Dashed,Line[{{1,0},{1,f[1]}}],Line[{{3,0},{3,f[3]}}]}],
    PlotRange → {0,5},AxesLabel → {x,y}]
```



Для исследования функции на экстремум найдем ее первую и вторую производные:

```
f′[x]
```

$$\begin{cases} -\frac{1}{x^3} & x<1 \\ 3-x & x>1 \\ \text{Indeterminate} & \text{True} \end{cases}$$

```
f″[x]
```

$$\begin{cases} \frac{3}{x^4} & x<1 \\ -1 & x>1 \\ \text{Indeterminate} & \text{True} \end{cases}$$

Если попытаться исследовать функцию на экстремум в точке $x = 1$ с помощью второй производной, то ничего не получится:

```
f″[1]
Indeterminate
```

Это и понятно, в этой точке и первая производная не существует. Применим первую производную, вычислив ее значения в окрестности точки $x = 1$:

```
f′[1/2]
-8
f′[2]
1
```

Производная при переходе x через точку $x = 1$ слева направо меняет знак с «-» на «+», значит, в этой точке функция имеет минимум.

Вычислим вторую производную в точке $x = 2$:

```
f″[2]
-1
```

Вторая производная отрицательна, следовательно, функция при $x = 2$ имеет максимум.

Решим еще одну задачу на экстремум с помощью системы *Mathematica*.

Пример П1. *В катушку индуктивности радиуса a вставить крестообразный сердечник наибольшей площади поперечного сечения.*

Решение. Вначале нарисуем поперечное сечение катушки индуктивности, в которую вставлен сердечник. Для этого снова применим оператор `Graphics`. Поскольку на нашем рисунке будет текст, зададим функцию, с помощью которой можно подобрать размер шрифта `FontSize`:

```
sty[t_]:=Style[t,FontSize → 13];
```

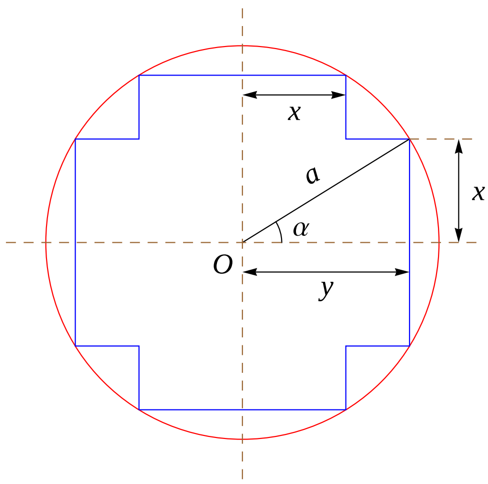
Сердечник в виде окружности изобразим оператором `Circle`, в котором укажем координаты центра окружности и ее радиус. Этот оператор у нас появится еще раз для рисования маленькой дуги, изображающей угол α; в этом случае мы еще укажем углы, между которыми заключена дуга.

Стрелки получим с помощью оператора `Arrow`, который имеет аргументы, аналогичные аргументам оператора `Line`. Поскольку стрелки у нас будут двойными, операторы `Arrow` будет предварять опция `Arrowheads`, назначение которой — указывать размер острия стрелки и тот факт, что она — двойная.

Надпись в виде буквы «a» расположим параллельно радиусу окружности. Это достигается указанием специфического стиля надписи прямо в операторе `Text`, в то время как остальные операторы `Text` будут использовать уже заданный нами стиль `sty`. Вообще говоря, в операторе `Text` стиль можно не указывать, тогда будет использован стиль по умолчанию.

Вот что получится в результате:

```
Graphics[{Red,Circle[{0,0},1],Blue,Line[{{0.85,0.526},{0.526,0.526},
    {0.526,0.85},{-0.526,0.85},{-0.526,0.526},{-0.85,0.526},{-0.85,-0.526},
    {-0.526,-0.526},{-0.526,-0.85},{0.526,-0.85},{0.526,-0.526},
    {0.85,-0.526},{0.85,0.526}}],Black,Line[{{0,0},{0.85,0.526}}],
    Circle[{0,0},0.2,{0,ArcTan[2]/2}],Arrowheads[{-0.03,0.03}],
    Arrow[{{0,-0.15},{0.85,0.15}}],Arrow[{{1.1,0},{1.1,0.526}}],
    Arrow[{{0,0.75},{0.526,0.75}}],Text[sty[x],{0.263,0.67}],
    Text[sty[x],{1.2,0.263}],Text[sty[y],{0.425,-0.23}],
    Text[sty[α],{0.3,0.082}],Text[sty[O],{-0.1,-0.11}],
    Text[Style[a,FontSize → 13],{0.35,0.35},Automatic,{2,1}],Brown,
    Dashed,Line[{{-1.2,0},{1.2,0}}],Line[{{0,-1.2},{0,1.2}}],
    Line[{{0.85,0.526},{1.2,0.526}}]}]
```



Как видно из рис., площадь поперечного сечения крестообразного сердечника выражается формулой $S = (2y)^2 - 4(y-x)^2$, так как равна площади квадрата со стороной $2y$ минус площади маленьких квадратиков со сторонами $y-x$. Получилась функция двух переменных, а нам требуется функция одного. К счастью, величины x и y выражаются через радиус катушки a и угол α: $x = a\sin\alpha$, $y = a\cos\alpha$. Далее предоставим слово системе *Mathematica*:

```
(2y)^2 - 4(y - x)^2 /. {x → a Sin[α], y → a Cos[α]}
Assuming[a > 0 && 0 < α < π/4, Simplify[%]]
```

$4\,\mathrm{a}^2\,\mathrm{Cos}[\alpha]^2 - 4(\mathrm{a}\,\mathrm{Cos}[\alpha] - \mathrm{a}\,\mathrm{Sin}[\alpha])^2$

$4\,\mathrm{a}^2(2\,\mathrm{Cos}[\alpha] - \mathrm{Sin}[\alpha])\,\mathrm{Sin}[\alpha]$

Первый оператор выполнил подстановку вместо x и y их выражений через a и α, а второй — упростил полученный результат. Упрощение было выполнено оператором `Simplify`, помещенным внутрь оператора `Assuming`, в который записывают различные предположения о переменных. Так, было указано, что величина a положительна, а угол α находится в пределах от 0 до $\pi/4$ (вне этого диапазона задача не имеет смысла). Без этих предположений `Simplify` выдал бы нам все решения, соответствующие, например, $a < 0$, $a = 0$ и т. д.

Так как величина $4a^2$ на координаты точек возможных экстремумов не влияет, мы ее отбросим и составим максимизируемую функцию в виде

```
S[α_] := (2 Cos[α] - Sin[α])Sin[α]
```

Найдем ее производную и произведем упрощение:

```
S'[α]
Simplify[%]
```

Cos[α](2 Cos[α] - Sin[α]) + (-Cos[α] - 2 Sin[α])Sin[α]

2 Cos[2α] - Sin[2α]

Определим стационарные точки функции в заданном диапазоне α:

```
Reduce[% == 0 && 0 < α < π/4, Reals]
%//N
DMSString[0.553574/Degree]
```

$\alpha == \mathrm{ArcTan}\left[\frac{1}{2}\left(-1+\sqrt{5}\right)\right]$

α == 0.553574

31°43′2.83385″

Обнаружилась единственная стационарная точка $\alpha_0 = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0{,}553574$, или в градусной мере $\alpha_0 \approx 31^\circ 43' 3''$.

Теперь найдем вторую производную нашей функции:

```
Simplify[S''[α]]
```

-2(Cos[2α] + 2 Sin[2α])

В заданном диапазоне изменения α синус и косинус в последнем выражении положительны, следовательно, при любом $\alpha \in (0; \pi/4)$ будет $S''(\alpha) < 0$. Значит, в найденной стационарной точке и реализуется искомый максимум площади поперечного сечения.

Конечно, все выкладки рекомендуется проверить вручную. Мы могли ошибиться при вводе операторов, *Mathematica* могла нас не так понять... Кстати, на этом пути можно получить более компактное выражение для максимизирующего угла: $\alpha_0 = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} 2$. Докажите, что это тот же самый угол, который преподнесла *Mathematica*. □

Теперь перейдем к рассмотрению операторов, умеющих самостоятельно находить экстремумы: `Minimize[f,cons,x]` и `Maximize[f,cons,x]`, где `f` — заданная функция, `x` — ее аргумент, `cons` — ограничения на аргумент. Первый из них находит наименьшее значение функции, а второй — наибольшее, т. е. они находят, как говорят, глобальные экстремумы.

Для рассмотренной выше функции

$$\text{f}[\text{x\_}] := \begin{cases} \frac{1}{2\text{x}^2} & \text{x} < 1 \\ -(\text{x}-3)^2/2 + 5/2 & \text{x} \geq 1 \end{cases}$$

получим

```
Minimize[f[x],x]
Minimize::natt: The minimum is not attained at any point satisfying
    the given constraints. ≫
{-∞,{x → ∞}}
```

Ответ означает, что при заданных ограничениях на аргумент (а они вообще не были заданы) наименьшее значение функции не достигается, так как при $x \to \infty$ функция стремится к $-\infty$. Что ж, введем ограничения на аргумент:

```
Minimize[f[x],0 < x < 5,x]
```

$$\left\{\frac{1}{2}, \{\text{x} \to 1\}\right\}$$

Итак, минимум найден. Аналогичным образом найдем максимум:

```
Maximize[f[x],3/2 < x < 5,x]
```

$$\left\{\frac{5}{2}, \{\text{x} \to 3\}\right\}$$

Займемся теперь какой-нибудь многоэкстремальной функцией, например, такой:

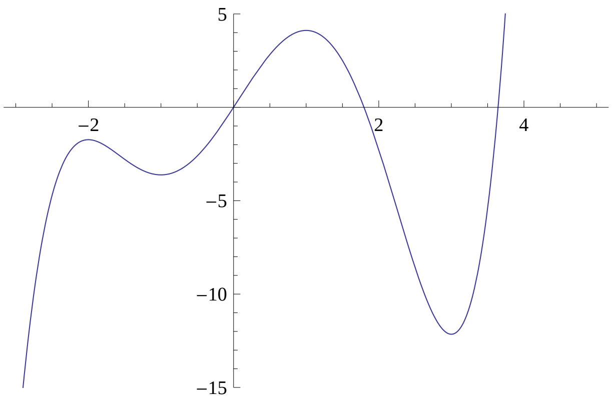
```
f[x_]:=6x + x^2/2 - 7x^3/3 - x^4/4 + x^5/5
```

С помощью оператора

```
Reduce[f'[x] ≠ 0,x,Reals]
x < -2 || -2 < x < -1 || -1 < x < 1 || 1 < x < 3 || x > 3
```

определим ее стационарные точки: -2, -1, 1, 3. Теперь мы знаем, каким задать диапазон изменения x, чтобы построить график функции:

```
Plot[f[x],{x,-3,5},PlotRange → {-15,5}]
```



Найдем глобальный минимум функции:

```
Minimize[f[x],-2 < x < 5, x]
```

$$\left\{-\frac{243}{20}, \{\text{x} \to 3\}\right\}$$

Чтобы найти локальный минимум, сузим диапазон поиска:

```
Minimize[f[x],-2 < x < 0, x]
```

$\left\{-\frac{217}{60}, \{x \to -1\}\right\}$

Точно так же найдем глобальный и локальный максимумы:

```
Maximize[f[x],-3 < x < 2, x]
```

$\left\{\frac{247}{60}, \{x \to 1\}\right\}$

```
Maximize[f[x],-3 < x < -1, x]
```

$\left\{-\frac{26}{15}, \{x \to -2\}\right\}$

Точные значения координат экстремума, которые всегда пытаются получить `Minimize` и `Maximize` при наличии точных исходных данных, могут иметь довольно громоздкое выражение:

```
f[x_]:=e^-x Cos[3 x]
Minimize[f[x],0 < x < 6,x]
```

$\left\{e^{-\frac{2}{3}\mathtt{ArcTan}[3+\sqrt{10}]}\mathtt{Cos}[2\mathtt{ArcTan}[3+\sqrt{10}]], \left\{x \to \frac{2}{3}\mathtt{ArcTan}[3+\sqrt{10}]\right\}\right\}$

Чтобы оценить значения этих выражений, можно найти их приближения:

```
%//N
{-0.370602,{x -> 0.939947}}
```

Если хотя бы одно из входных данных является приближенным, операторы `Minimize` и `Maximize` дают на выходе тоже приближенные выражения, вызывая для этого, соответственно, операторы `NMinimize` и `NMaximize`. Если точные значения нас не интересуют или мы заведомо знаем, что получить их не удастся, можно сразу вызывать операторы `NMinimize` и `NMaximize`. Например, для предыдущей функции будем иметь:

```
NMinimize[f[x],x]
{-0.370602,{x -> 0.939947}}
```

Следует отметить, что эти приближенно работающие операторы, стараясь найти глобальный экстремум, иногда вместо него находят локальный.

Есть в арсенале системы *Mathematica* еще два оператора, `FindMinimum` и `FindMaximum`, которые ищут приближенные значения локальных экстремумов, первый — локальных минимумов, второй — локальных максимумов. Их аргументы имеют вид `[{f,cons},{x,`x_0`}]`, где `f` — заданная функция; `x` — ее аргумент; `cons` — условия, накладываемые на переменные; x_0 — начальная точка поиска. Правда, условия и начальную точку поиска задавать не обязательно (в этом случае *Mathematica* начальную точку назначит сама). Решим предыдущее задание с помощью оператора `FindMinimum`:

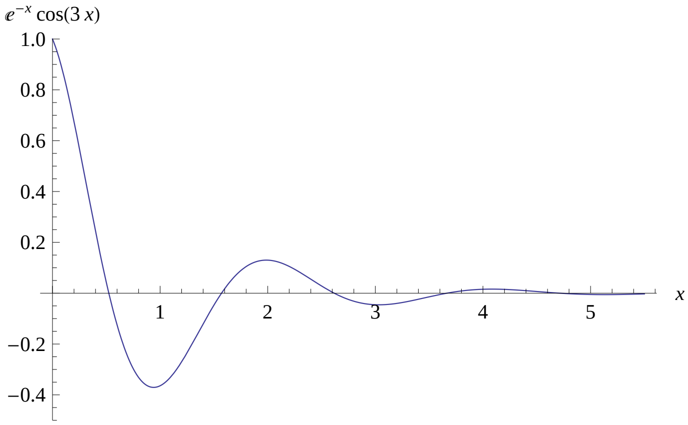
```
FindMinimum[f[x],x]
{-0.370602,{x -> 0.939947}}
```

Снова найден глобальный минимум. Вычислим еще пару локальных минимумов, начиная поиск из разных начальных точек:

```
FindMinimum[f[x],{x,3}]
{-0.0456376,{x -> 3.03434}}
FindMinimum[f[x],{x,5}]
{-0.00562003,{x -> 5.12874}}
```

Этот процесс бесконечен, потому что функция имеет бесчисленное множество экстремумов (как минимумов, так и максимумов). Кстати, вот ее график:

```
Plot[f[x],{x,0,5},PlotRange → {-0.5,1},AxesLabel → {x,e^-x Cos[3x]}]
```



Литература

[1] Бугров Я.С., Никольский С.М. *Высшая математика. Дифференциальное и интегральное исчисление.* – М.: Наука, 1984, – с. 149-150, 154-156, 171-177.

[2] Письменный Д.Т. *Конспект лекций по высшей математике.* – М.: Рольф, 2000. Ч. 1. – с. 171–176.