Полный дифференциал

Волченко Ю.М.

Содержание лекции

Полный дифференциал функции. Дифференцирование сложной функции. Инвариантность формы полного дифференциала. Касательная плоскость и нормаль к поверхности. Геометрический смысл полного дифференциала. Частные производные и полные дифференциалы высших порядков. Формула Тейлора для функции нескольких переменных.

Анимация наглядного представления полного дифференциала.
Анимация работает только в программе Acrobat Reader!

Применение системы *Mathematica* для вычисления частных производных высших порядков и решения связанных с ними задач.

14 июня 2013 г.

1 Полный дифференциал функции

Пусть полное приращение функции $y = f(x_1, \ldots, x_n)$ в точке $M(x_1, \ldots, x_n)$ представимо в виде

$$\begin{aligned} \Delta f = f(x_1 + \Delta x_1, \ldots, x_n + \Delta x_n) - f(x, y) = \\ = A_1 \Delta x_1 + \ldots + A_n \Delta x_n + o(\Delta \rho), \end{aligned} \tag{1}$$

где $A_1, \ldots, A_n$ — некоторые числа, $o(\Delta\rho)$ — бесконечно малая относительно $\Delta\rho = \sqrt{(\Delta x_1)^2 + \ldots + (\Delta x_n)^2}$. Тогда функция f называется ***дифференцируемой в точке*** M.

Теорема 1. *Если функция $y = f(x_1, \ldots, x_n)$ дифференцируема в некоторой точке, то в этой точке существуют конечные частные производные функции по всем аргументам, причем, A_i из формулы (1) определяются равенствами $A_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}$, $i = \overline{1, n}$.*

Доказательство. Действительно, положив в (1) $\Delta x_2 = \ldots = \Delta x_n = 0$, придем к равенству $\Delta f = A_1 \Delta x_1 + o(\Delta x_1)$. Разделив на Δx_1 и перейдя к пределу при $\Delta x_1 \to 0$, получим $A_1 = \frac{\partial f}{\partial x_1}$. Аналогично доказывается, что $A_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}$, $i = \overline{2, n}$.

Следствие 1. *Если функция дифференцируема в некоторой точке, то ее полное приращение в этой точке представимо в виде*

$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial x_1}\,\Delta x_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\,\Delta x_n + o\left(\Delta\rho\right). \tag{2}$$

Следствие 2. *Если функция дифференцируема в некоторой точке, то она и непрерывна в этой точке.*

Для функции одного аргумента дифференцируемость была равносильна существованию и конечности производной. Для функции нескольких аргументов такой равносильности нет. Чтобы обеспечить дифференцируемость функции, частные производные обязательно должны быть непрерывны.

Теорема 2. *Если частные производные функции $y = f\left(x_1, \ldots, x_n\right)$ существуют и конечны в некоторой окрестности точки M, а в самой этой точке непрерывны, то функция f дифференцируема в точке M.*

Если функция f дифференцируема, то выражение

$$\boxed{df = \frac{\partial f}{\partial x_1}\,\Delta x_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\,\Delta x_n}$$

называется ее ***полным дифференциалом***.

Для функции $g\left(x_i\right) = x_i$ имеем $\Delta x_i = dx_i$, поэтому полный дифференциал любой функции можно записать также в виде

$$\boxed{df = \frac{\partial f}{\partial x_1}\,dx_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\,dx_n.}$$

Полный дифференциал называют еще ***линейной***, или ***главной частью*** приращения функции.

Запишем полный дифференциал функции двух переменных $z = f\left(x, y\right)$:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy.$$

Так как $\Delta f \approx df$, то полный дифференциал используют в приближенных вычислениях вида:

$$\boxed{f\left(x + \Delta x, y + \Delta y\right) \approx f\left(x, y\right) + \frac{\partial f}{\partial x}\,\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\,\Delta y.} \tag{3}$$

Пример 1. *Вычислить приближенно* $\sqrt{4{,}05^2 + 3{,}07^2}$.

Решение. Положим $x = 4$, $y = 3$, $\Delta x = 0{,}05$, $\Delta y = 0{,}07$; тогда $x + \Delta x = 4{,}05$, $y + \Delta y = 3{,}07$. Чтобы применить формулу (3), возьмем функцию $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, частные производные которой равны

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{\partial f(4;3)}{\partial x} = \frac{4}{5}, \ \frac{\partial f(4;3)}{\partial y} = \frac{3}{5}.$$

Обращаясь к формуле (3), находим

$$\sqrt{4{,}05^2 + 3{,}07^2} \approx \sqrt{x^2+y^2}\Big|_{x=4, y=3} + \frac{4}{5}\cdot 0{,}05 + \frac{3}{5}\cdot 0{,}07 = 5{,}082.$$

□

Полный дифференциал применяют также в теории погрешностей[1)].

Приближенное равенство $\Delta f \approx df$ можно увидеть «геометрически». Для этого возьмем функцию $z = xy$, выражающую площадь прямоугольника со сторонами x и y ($x > 0$, $y > 0$). Ее полное приращение записывается в виде

$$\Delta f = (x + \Delta x)(y + \Delta y) - xy = x\Delta y + y\Delta x + \Delta x\Delta y = df + \Delta x\Delta y.$$

На анимационном рис. 1 видно, что оно равно сумме площадей трех прямоугольников с площадями $x\Delta y$, $y\Delta x$ и $\Delta x\Delta y$. Запустив анимацию, можно убедиться в том, что прямоугольник с площадью $\Delta x\Delta y$ существенно сокращает свои размеры при $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$, так что почти все приращение функции сосредоточивается в площадях прямоугольников $x\Delta y$ и $y\Delta x$, в сумме дающих полный дифференциал функции.

Функция, дифференцируемая в каждой точке множества D, называется ***дифференцируемой на множестве*** D.

В дальнейшем нам понадобится следующее определение. Функция, все частные производные которой непрерывны в некоторой точке (на некотором множестве), называется ***непрерывно дифференцируемой*** в этой точке (на этом множестве).

2 Дифференцирование сложной функции

Пусть аргументы функции $z = f(x, y)$ зависят от переменных u и v: $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, причем, производные x'_u, x'_v, y'_u, y'_v существуют и конечны, а функция f дифференцируема. Тогда справедливы формулы производных сложной функции:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}, \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}. \tag{4}$$

Доказательство приведено в Приложении[2)].

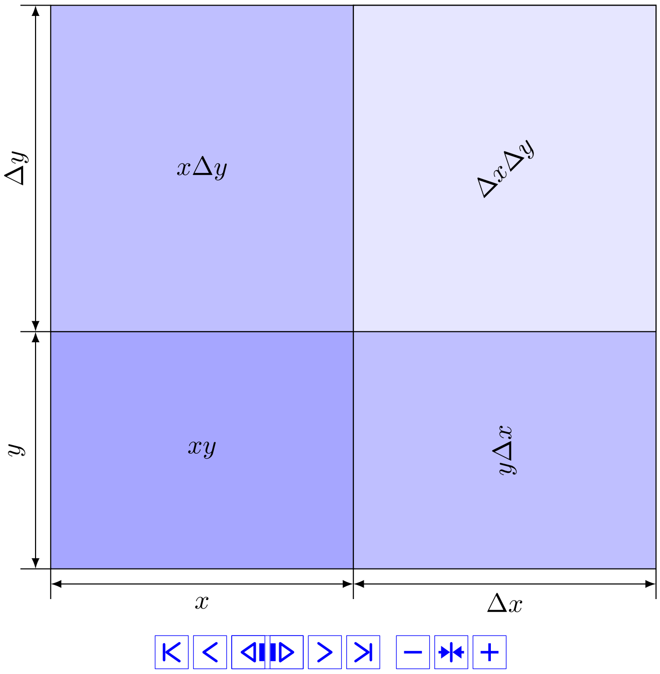

Рис. 1. К полному дифференциалу функции $z = xy$.

Пример 2. *Найти частную производную по u функции $z = \sin(xy)$, $x = u^2 + v^2$, $y = u - v$.*

Решение. Используем первую из формул (4):

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial u} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} = y\cos(xy)\cdot 2u + x\cos(xy)\cdot 1 = \\ &= 2u(u-v)\cos\left[\left(u^2+v^2\right)(u-v)\right] + \left(u^2+v^2\right)\cos\left[\left(u^2+v^2\right)(u-v)\right] = \\ &= \left(3u^2 - 2uv + v^2\right)\cos\left[\left(u^2+v^2\right)(u-v)\right].\end{aligned}$$

$\square$

Для дифференцируемой функции большего числа аргументов

$$y = f(x_1, \ldots, x_n), \ x_j = x_j(u_1, \ldots, u_m), \ j = \overline{1, n},$$

справедлива формула

$$\frac{\partial y}{\partial u_i} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial y}{\partial x_j}\cdot\frac{\partial x_j}{\partial u_i},$$

если производные аргументов функции y существуют и конечны.

Если функция имеет вид $y = f[t, x_1(t), \ldots, x_n(t)]$, то есть все ее аргументы x_i зависят лишь от одного параметра t, то предыдущую формулу записывают так:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\partial y}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial y}{\partial x_j}\cdot\frac{dx_j}{dt} = \frac{\partial y}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial y}{\partial x_j}\cdot x'_j,$$

и называют ***полной производной*** (в отличие от частной производной) функции y по переменной t.

Пример 3. *Найти полную производную функции* $u = xe^{x^2-y^2+z^2}$, *если*

$$x = \sin t,\ y = \cos t,\ z = t^2 - t. \tag{5}$$

Решение. Найдем производные аргументов функции u: $x' = \cos t$, $y' = -\sin t$, $z' = 2t - 1$. По формуле полной производной находим

$$\begin{aligned}\frac{du}{dt} &= \frac{\partial u}{dx}\,x' + \frac{\partial u}{dy}\,y' + \frac{\partial u}{dz}\,z' = \\ &= \left(e^{x^2-y^2+z^2} + 2x^2e^{x^2-y^2+z^2}\right)\cos t + 2xye^{x^2-y^2+z^2}\sin t + 2xze^{x^2-y^2+z^2}\,(2t-1) = \\ &= \left[\left(2x^2+1\right)\cos t + 2xy\sin t + 2xz\,(2t-1)\right]e^{x^2-y^2+z^2},\end{aligned}$$

где x, y, z определяются формулами (5).

3 Инвариантность формы полного дифференциала

Пусть $z = f\,(x,y)$, $x = x\,(u,v)$, $y = y\,(u,v)$ и пусть частные производные всех этих функций непрерывны. Используя формулы полного дифференциала и производных сложной функции, получим

$$\begin{aligned}df &= \frac{\partial z}{\partial x}\,dx + \frac{\partial z}{\partial y}\,dy = \frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\,du + \frac{\partial x}{\partial v}\,dv\right) + \frac{\partial z}{\partial y}\left(\frac{\partial y}{\partial u}\,du + \frac{\partial y}{\partial v}\,dv\right) = \\ &= \left(\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}\right)du + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}\right)dv = \frac{\partial z}{\partial u}\,du + \frac{\partial z}{\partial v}\,dv.\end{aligned}$$

Таким образом,

$$df = \frac{\partial z}{\partial x}\,dx + \frac{\partial z}{\partial y}\,dy = \frac{\partial z}{\partial u}\,du + \frac{\partial z}{\partial v}\,dv,$$

то есть *полный дифференциал функции имеет один и тот же вид для независимых и зависимых переменных*.Это свойство называется ***инвариантностью формы дифференциала***. Оно справедливо и для функций большего числа аргументов.

4 Касательная плоскость и нормаль к поверхности

Пусть имеется поверхность, заданная уравнением

$$F\,(x,y,z) = 0. \tag{6}$$

Если в некоторой ее точке функция F дифференцируема и хотя бы одна из ее частных производных отлична от нуля, то такая точка называется ***обыкновенной*** точкой поверхности; иначе она называется ее ***особой*** точкой.

Прямая линия называется ***касательной к поверхности*** в точке M_0, если она является касательной к какой-либо кривой, лежащей на поверхности и проходящей через точку M_0.

Теорема 3. *Все касательные прямые к поверхности* (6) *в ее обыкновенной точке* M_0 *лежат в одной плоскости.*

Доказательство приведено в Приложении[3)].

Плоскость, в которой находятся все касательные прямые к линиям, лежащим на поверхности и проходящим через точку M_0, называется ***касательной плоскостью*** к поверхности в точке M_0.

Прямая, проведенная через точку M_0 поверхности перпендикулярно касательной плоскости в этой точке, называется ***нормалью*** к поверхности. Таким образом, нормаль к поверхности является и нормалью к касательной плоскости. Направляющим вектором нормали является вектор $\mathbf{N} = (F'_x, F'_y, F'_z)$, Приложение[3)], поэтому уравнение касательной плоскости имеет вид:

$$\boxed{F'_x\left(M_0\right)\left(x - x_0\right) + F'_y\left(M_0\right)\left(y - y_0\right) + F'_z\left(M_0\right)\left(z - z_0\right) = 0,} \tag{7}$$

а уравнение нормали будет таким:

$$\boxed{\frac{x - x_0}{F'_x\left(M_0\right)} = \frac{y - y_0}{F'_y\left(M_0\right)} = \frac{z - z_0}{F'_z\left(M_0\right)}.}$$

Если поверхность задана уравнением $z = f\left(x, y\right)$, то его можно привести к виду (6): $f\left(x, y\right) - z = 0$, после чего, используя равенство (7), получить уравнение касательной плоскости в этом случае:

$$\boxed{f'_x\left(x_0, y_0\right)\left(x - x_0\right) + f'_y\left(x_0, y_0\right)\left(y - y_0\right) - \left(z - z_0\right) = 0.} \tag{8}$$

Соответственно, уравнение нормали к поверхности будет иметь вид:

$$\boxed{\frac{x - x_0}{f'_x\left(x_0, y_0\right)} = \frac{y - y_0}{f'_y\left(x_0, y_0\right)} = \frac{z - z_0}{-1}.}$$

Обозначив $dx = x - x_0$, $dy = y - y_0$, перепишем уравнение (8):

$$z - z_0 = df\big|_{M_0}. \tag{9}$$

Формула устанавливает ***геометрический смысл полного дифференциала***: *его значение в некоторой точке равно приращению аппликаты касательной плоскости к графику функции в этой точке.*

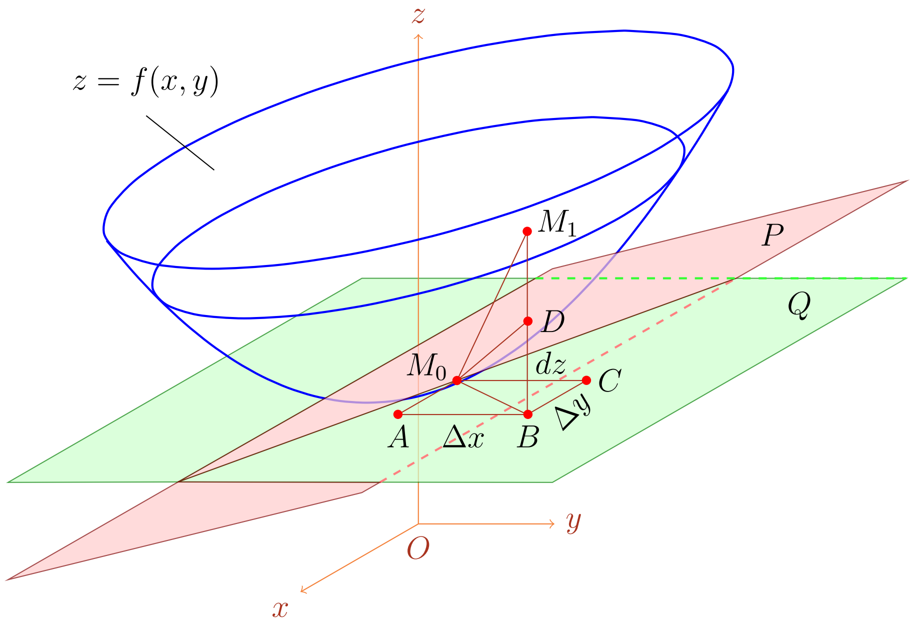

Рис. 2. Геометрический смысл полного дифференциала функции.

Рис. 2 демонстрирует геометрический смысл полного дифференциала. В точке касания M_0 аргументу x дано приращение Δx, а аргументу y — приращение Δy. На поверхности $z = f(x, y)$ этим приращениям соответствует точка $M_1(x_1, y_1, z_1)$, где $x_1 = x_0 + \Delta x$, $y_1 = y_0 + \Delta y$, $z_1 = f(x_1, y_1)$, которая проектируется в точку B на плоскости Q, проходящей через точку касания и параллельной координатной плоскости xOy. Таким образом, полное приращение функции Δz равно длине отрезка BM_1. Этот отрезок пересекает касательную плоскость P в точке D, так что приращение аппликаты касательной плоскости для приращений Δx и Δy равно длине отрезка BD. Согласно формуле (9) длина отрезка BD численно равна полному дифференциалу функции $z = f(x, y)$ в точке M_0.

5 Частные производные высших порядков

Пусть задана функция $z = f(x, y)$. Частные производные $\partial f/\partial x$, $\partial f/\partial y$ называются ***частными производными первого порядка***. Частные производные по x и по y от частных производных первого порядка называются частными производными второго порядка

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = f''_{xx}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = f''_{xy},$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = f''_{yx}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = f''_{yy}.$$

И вообще, ***частными производными n-го порядка*** называются частные производные от частных производных $(n-1)$-го порядка. Для удобства функцию f будем считать ***частной производной нулевого порядка*** по любому аргументу. Производную называют ***смешанной***, если при ее вычислении дифференцирование осуществляется по различным аргументам.

Теорема 4. *Пусть функция $f(x,y)$ определена вместе со своими частными производными в некоторой окрестности точки M, причем, вторые производные f''_{xy} и f''_{yx} непрерывны в этой точке. Тогда*

$$f''_{xy} = f''_{yx}.$$

Теорема 5. *Пусть функция $y = f(x_1, \ldots, x_n)$ определена в n-мерной области D и имеет в этой области всевозможные частные производные до $(k-1)$-го порядка включительно и смешанные производные k-го порядка, причем, все эти производные непрерывны в области D. Тогда значение любой k-й смешанной производной не зависит от порядка, в котором производятся последовательные дифференцирования.*

Так, при выполнении условий теоремы для функции $u = f(x,y,z)$, справедливо, например, равенство

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} = \frac{\partial^3 u}{\partial y \partial x \partial y}.$$

Пример 4. *Показать, что функция*

$$u(x,y,t) = (A\cos\omega t + B\sin\omega t)\sin\frac{\pi}{l}x\sin\frac{\pi}{l}y,$$

$\omega = \pi a\sqrt{2}/l$, *удовлетворяет волновому уравнению*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right),$$

описывающему колебания квадратной мембраны со стороной l.

Решение. Вычислим частные производные функции u:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = (-A\omega\sin\omega t + B\omega\cos\omega t)\sin\frac{\pi}{l}x\sin\frac{\pi}{l}y = \omega(-A\sin\omega t + B\cos\omega t)\sin\frac{\pi}{l}x\sin\frac{\pi}{l},y$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\pi}{l}(A\cos\omega t + B\sin\omega t)\cos\frac{\pi}{l}x\sin\frac{\pi}{l}y,\ \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\pi}{l}(A\cos\omega t + B\sin\omega t)\sin\frac{\pi}{l}x\cos\frac{\pi}{l}y,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\omega^2(A\cos\omega t + B\sin\omega t)\sin\frac{\pi}{l}x\sin\frac{\pi}{l}y = -\omega^2 u,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\pi^2}{l^2}(A\cos\omega t + B\sin\omega t)\sin\frac{\pi}{l}x\sin\frac{\pi}{l}y = -\frac{\pi^2}{l^2}u.$$

Подставляя найденные выражения для производных в волновое уравнение и учитывая выражение для ω, получаем тождество

$$-\omega^2 u = -a^2\left(\frac{\pi^2}{l^2}u + \frac{\pi^2}{l^2}u\right), -\frac{2\pi^2 a^2}{l^2} \equiv -\frac{2\pi^2 a^2}{l^2}.$$

□

Пусть функция $z = f(x, y)$ имеет непрерывные частные производные второго порядка. ***Дифференциалом второго порядка*** этой функции называется полный дифференциал от полного дифференциала dz:

$$d^2z = d\,(dz) = d\left(f'_x\,dx + f'_y\,dy\right) = f''_{xx}\,dx^2 + f''_{xy}\,dx\,dy + f''_{yx}\,dy\,dx + f''_{yy}\,dy^2 = \\ = f''_{xx}\,dx^2 + 2f''_{xy}\,dx\,dy + f''_{yy}\,dy^2.$$

Аналогично, если эта функция имеет непрерывные частные производные третьего порядка, ***дифференциалом третьего порядка*** называется выражение

$$d^3z = d\left(d^2z\right) = f'''_{xxx}\,dx^2 + 3f'''_{xxy}\,dx^2dy + 3f'''_{xyy}\,dx\,dy^2 + f'''_{yyy}\,dy^3.$$

По индукции можно найти выражение для дифференциала n-го порядка:

$$d^nz = d(d^{n-1}z) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{\partial^n f}{\partial x^k \partial^{n-k} y}\,dx^k dy^{n-k} = \left\{\frac{\partial}{\partial x}\,dx + \frac{\partial}{\partial y}\,dy\right\}^n f,$$

причем, последнее выражение представляет собой символическую запись, которую надо понимать как формальное возведение в n-ю степень выражения в фигурных скобках и затем приписывания в числителях дробей функции f.

Для функции $y = f\left(x_1, \ldots, x_n\right)$ ***дифференциал k-го порядка*** записывают подобным же образом:

$$d^kz = \sum_{\substack{k_1\geq 0 \\ k_1+\ldots+k_n=k}} \ldots \sum_{k_n\geq 0} \frac{k!}{k_1!\cdots k_n!} \cdot \frac{\partial^k f}{\partial x_1^{k_1}\ldots\partial^{k_n}x_n}\,dx_1^{k_1}\ldots dx_n^{k_n} = \\ = \left\{\frac{\partial}{\partial x_1}\,dx_1 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_n}\,dx_n\right\}^k f.$$

Замечание 1. *Дифференциалы высших порядков свойством инвариантности не обладают.*

Функция называется ***k раз дифференцируемой*** в некоторой точке (на некотором множестве), если все ее производные $(k-1)$-го порядка дифференцируемы в этой точке (на этом множестве).

Функция называется ***k раз непрерывно дифференцируемой*** в некоторой точке (на некотором множестве), если в этой точке (на этом множестве) она имеет непрерывные частные производные до порядка k включительно.

6 Формула Тейлора

Ранее† можно было убедиться, что формула Тейлора для функции одного аргумента играет важную роль как при аппроксимации функций многочленами, так и в теоретических рассуждениях при доказательстве теорем. Не менее важное значение она имеет и в области функций нескольких аргументов.

Рассмотрим функцию n аргументов $y = f(M)$, $M(x_1, \ldots, x_n)$. Пусть она определена в некоторой окрестности точки $M_0\left(x_1^0, \ldots, x_n^0\right)$ и имеет в ней непрерывные частные производные до m-го порядка включительно по всем аргументам. Тогда для нее справедлива ***формула Тейлора***:

$$f(M) = f(M_0) + \sum_{k=1}^{m} \frac{d^k f(M_0)}{k!} + o\left(\rho^m(M, M_0)\right), \tag{10}$$

где ρ — расстояние между точками M и M_0, $o\left(\rho^m(M, M_0)\right)$ — бесконечно малая более высокого порядка малости, чем $\rho^m(M, M_0)$ при $M \to M_0$.

Несмотря на кажущуюся простоту этой формулы и ее аналогичность формуле Тейлора одного аргумента следует заметить, что на самом деле формула (10) является довольно сложной и тем сложнее, чем больше m и n. Сложность вызвана громоздкостью выражений для дифференциалов функций нескольких аргументов, рассмотренных в предыдущем разделе.

Если точкой M_0 является начало координат O, то формула Тейлора называется ***формулой Маклорена***.

Рассмотрим следующие частные случаи формулы Тейлора.

При $n = 2$ и $m = 1$ и точках $M(x, y)$ и $M_0(x_0, y_0)$ имеем

$$\begin{aligned} f(M) = f(x,y) = f(M_0) + df(M_0) + o\left(\rho(M, M_0)\right) = \\ = f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)\,\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\,\Delta y + o\left(\rho(M, M_0)\right). \end{aligned}$$

При $n = 2$ и $m = 2$:

$$\begin{aligned} f(M) = f(x,y) = f(M_0) + df(M_0) + \frac{1}{2} d^2 f(M_0) + o\left(\rho^2(M, M_0)\right) = \\ = f(x_0, y_0) + f'_x(M_0)\,\Delta x + f'_y(M_0)\,\Delta y + \\ + \frac{1}{2}\left[f''_{xx}(M_0)\,\Delta x^2 + 2 f''_{xy}(M_0)\,\Delta x \Delta y + f''_{yy}(M_0)\,\Delta y^2\right] + o\left(\rho^2(M, M_0)\right). \end{aligned}$$

При произвольном n и $m = 1$:

$$\begin{aligned} f(M) = f(M_0) + df(M_0) + o\left(\rho(M, M_0)\right) = \\ = f(M_0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f(M_0)}{\partial x_k}\Delta x_k + o\left(\rho(M, M_0)\right). \end{aligned}$$

† Лекции «Формула Тейлора», «Экстремумы функции».

Если ввести вектор $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^T$, обозначаемый также $\operatorname{grad} f$ и называемый градиентом функции f, то эту формулу можно записать в совсем простом виде:

$$f(M) = f(M_0) + \nabla f(M_0)^T \Delta\mathbf{x} + o(\rho(M, M_0)),$$

где $\Delta\mathbf{x} = (\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n)^T$.

При произвольном n и $m = 2$:

$$\begin{aligned} f(M) &= f(M_0) + df(M_0) + \frac{1}{2}d^2 f(M_0) + o\left(\rho^2(M, M_0)\right) = \\ &= f(M_0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f(M_0)}{\partial x_k}\Delta x_k + \\ &+ \frac{1}{2}\sum_{\substack{k_1 \geq 0 \\ k_1+\ldots+k_n=2}} \cdots \sum_{k_n \geq 0} \frac{2}{k_1! \cdots k_n!} \cdot \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial^{k_n} x_n} \Delta x_1^{k_1} \ldots \Delta x_n^{k_n} + o\left(\rho^2(M, M_0)\right). \end{aligned}$$

Многократное суммирование можно представить следующим образом:

$$\begin{gathered} \sum_{\substack{k_1 \geq 0 \\ k_1+\ldots+k_n=2}} \cdots \sum_{k_n \geq 0} \frac{2}{k_1! \cdots k_n!} \cdot \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial^{k_n} x_n} \Delta x_1^{k_1} \ldots \Delta x_n^{k_n} = \\ = \left\{\frac{\partial}{\partial x_1}\Delta x_1 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_n}\Delta x_n\right\}\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}\Delta x_1 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_n}\Delta x_n\right\} f\Big|_{M_0} = \\ = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x_i \partial x_j}\Delta x_i \Delta x_j = \Delta\mathbf{x}^T \mathbf{H}(M_0)\Delta\mathbf{x}, \end{gathered}$$

где $\mathbf{H} = \left\{\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right\}$ – так называемая матрица Гессе размера $n \times n$. В результате получаем компактную формулу

$$f(M) = f(M_0) + \nabla f(M_0)^T \Delta\mathbf{x} + \frac{1}{2}\Delta\mathbf{x}^T \mathbf{H}(M_0)\Delta\mathbf{x} + o\left(\rho^2(M, M_0)\right). \quad (11)$$

В Приложении[4)] показано, как в системе *Mathematica* вычислять частные производные высших порядков, строить касательные плоскости и нормали к поверхностям и раскладывать функции нескольких аргументов по формуле Тейлора.

Приложение

[1)] Пусть вычисляется приближенное значение функции $y = f(x_1, \dots, x_n)$, которая предполагается дифференцируемой, и требуется получить оценку точности этого приближения при условии, что известны абсолютные погрешности ее аргументов $\Delta x_1, \dots, \Delta x_n$. Используем для расчета погрешности формулу (3).

Так как справедливо неравенство

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x_1}\Delta x_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\Delta x_n\right| \le \left|\frac{\partial f}{\partial x_1}\right| |\Delta x_1| + \ldots + \left|\frac{\partial f}{\partial x_n}\right| |\Delta x_n|,$$

то абсолютной погрешностью вычислений по формуле $y = f(x_1, \dots, x_n)$ принято считать величину

$$|\Delta f| = \left|\frac{\partial f}{\partial x_1}\right| |\Delta x_1| + \ldots + \left|\frac{\partial f}{\partial x_n}\right| |\Delta x_n|.$$

Пример П1. *Цилиндрический конденсатор состоит из внутреннего цилиндрического электрода радиуса r_1 и наружного электрода радиуса r_2 в виде трубы, концентричной внутреннему электроду. Найти абсолютную погрешность вычисления емкости такого конденсатора по формуле*

$$C = \frac{2\pi}{\ln\frac{r_2}{r_1}}.$$

Решение. Найдем частные производные:

$$\frac{\partial C}{\partial r_1} = 2\pi\left(-\frac{1}{\ln^2\frac{r_2}{r_1}}\right)\frac{r_1}{r_2}\left(-\frac{r_2}{r_1^2}\right) = \frac{2\pi}{r_1\ln^2\frac{r_2}{r_1}},$$
$$\frac{\partial C}{\partial r_2} = 2\pi\left(-\frac{1}{\ln^2\frac{r_2}{r_1}}\right)\frac{r_1}{r_2}\cdot\frac{1}{r_1} = -\frac{2\pi}{r_2\ln^2\frac{r_2}{r_1}}.$$

Следовательно, формула абсолютной погрешности для расчета емкости цилиндрического конденсатора будет такой:

$$\Delta C = \frac{2\pi}{\ln^2\frac{r_2}{r_1}}\left(\frac{\Delta r_1}{r_1} + \frac{\Delta r_2}{r_2}\right).$$

Найдем относительную погрешность:

$$\delta C = \frac{\Delta C}{C} = \frac{1}{\ln\frac{r_2}{r_1}}\left(\frac{\Delta r_1}{r_1} + \frac{\Delta r_2}{r_2}\right).$$

Из формул видно, что при малых радиусах $r_1 \approx 0$, $r_2 \approx 0$ или радиусах, близких друг к другу: $r_1 \approx r_2$ (тогда $r_2/r_1 \approx 1$, а $\ln(r_2/r_1) \approx 0$), обе погрешности могут быть очень большими.

[2)] Действительно,

$$\Delta z = z'_x\Delta x + z'_y\Delta y + o(\Delta\rho), \tag{П1}$$

где $\Delta\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$. Далее

$$\Delta x = x'_u\Delta u + x'_v\Delta v + o(\Delta r),$$
$$\Delta y = y'_u\Delta u + y'_v\Delta v + o(\Delta r),$$

где $\Delta r = \sqrt{(\Delta u)^2 + (\Delta v)^2}$. Подставим эти выражения вместо Δx и Δy в равенство (П1):

$$\begin{aligned}\Delta z &= z'_x \left(x'_u \Delta u + x'_v \Delta v + o\left(\Delta r\right)\right) + z'_y \left(y'_u \Delta u + y'_v \Delta v + o\left(\Delta r\right)\right) + o\left(\Delta \rho\right) = \\ &= \left(z'_x x'_u + z'_y y'_u\right) \Delta u + \left(z'_x x'_v + z'_y y'_v\right) \Delta v + o\left(\Delta r\right),\end{aligned} \tag{П2}$$

так как при $\Delta r \to 0$ и $\Delta \rho \to 0$. Положив в формуле (П2) $\Delta v = 0$, разделив на Δu и устремив последнюю величину к нулю, получим первое из доказываемых равенств. Аналогично доказывается второе.

[3] Пусть кривая L на поверхности (6) задана уравнением

$$\mathbf{r}\left(t\right) = x\left(t\right)\mathbf{i} + y\left(t\right)\mathbf{j} + z\left(t\right)\mathbf{k},$$

где $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ — декартовы орты. Если координатные функции подставить в уравнение (6) (кривая принадлежит поверхности) и продифференцировать по t (найти полную производную), получим равенство

$$F'_x x' + F'_y y' + F'_z z' = 0,$$

или

$$\mathbf{N} \cdot \mathbf{r}' = 0, \tag{П3}$$

где $\mathbf{r}'$— вектор касательной к кривой, $\mathbf{N} = \left(F'_x, F'_y, F'_z\right)^T$ — направляющий вектор нормали к поверхности, причем, $|\mathbf{N}| = \sqrt{F'^2_x + F'^2_y + F'^2_z} > 0$, так как точка M_0 — обыкновенная. В силу (П3) касательный вектор перпендикулярен вектору нормали и, так как L — произвольная кривая, то все касательные прямые перпендикулярны одному и тому же вектору нормали, следовательно, лежат в одной и той же плоскости.

[4] Частные производные высших порядков в системе *Mathematica* вычисляются известными вам операторами `D` и `Derivative`. Первый из них приобретает форму $\partial_{\square,\square}$, которую удобно использовать для нахождения частных производных второго порядка и которую можно выщелкнуть мышкой из палитры либо набрать на клавиатуре как `Esc` `pd` `Esc` `Ctrl` + `_`:

$\partial_{x,x}(x^2 y^3)$

$2y^3$

Вместо запятой в нижнем индексе можно вводить невидимую запятую: `Esc` `,` `Esc`, тогда вычисление частной производной будет выглядеть так:

$\partial_{xy}(x^2 y^3)$

$6xy^2$

Найдем и остальные частные производные второго порядка этой функции:

$\partial_{yx}(x^2 y^3)$

$6xy^2$

$\partial_{yy}(x^2 y^3)$

$6x^2 y$

Если число аргументов функции превышает два, оператор `D` записывают в виде

$$\mathtt{D[f,\{arg_1,n_1\},...,\{arg_k,n_k\}]},$$

где `f` — дифференцируемая функция, $\mathtt{arg_i}$ — аргумент функции, по которому надо взять производную $\mathtt{n_i}$-го порядка. При этом, $\mathtt{n_i}$ и окружающие его фигурные скобки опускаются, если $\mathtt{n_i} = 1$.

Возьмем производную 4-го порядка $\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial z \partial y}$:

```
D[z^2x^3y^3,{x,2},z,y]
36xy^2z
```

Вычислим производную сложной функции, рассмотренной в лекционном примере:

```
∂_u(Sin[xy] /. {x → u^2 + v^2, y → u - v})
(u^2 + 2u(u - v) + v^2)Cos[(u - v)(u^2 + v^2)]
```

Как отмечалось на предыдущих лекциях, для функции, заданной пользователем, бывает удобнее использовать оператор `Derivative`, общий вид которого вам уже знаком:

$$\texttt{Derivative[}\mathtt{n}_1\texttt{,...,}\mathtt{n}_k\texttt{][f][}\mathtt{arg}_1\texttt{,...,}\mathtt{arg}_k\texttt{]},$$

только теперь $\mathtt{n_i}$ равно порядку производной, которая берется по аргументу $\mathtt{arg_i}$.

Найдем производную $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}$ функции $z = \cos x \sin y^2$:

```
f[x_,y_]:=Cos[x]Sin[y^2]
Derivative[2,1][f][x,y]
-2yCos[x]Cos[y^2]
```

Так же просто находится и производная четвертого порядка от функции трех аргументов:

```
f[x_,y_,z_]:=x^3y^3z^3;
Derivative[2,1,1][f][x,y,z]
54xy^2z^2
```

Пусть требуется вычислить предыдущую производную в точке $(1; 2; 1)$, в этом случае оператор `Derivative` записывается так:

```
Derivative[2,1,1][f][1,2,1]
216
```

Для получения полного дифференциала функции в системе *Mathematica* зарезервирован оператор `Dt`:

```
Dt[x^2y + z^2 - 1]
2xy Dt[x] + x^2 Dt[y] + 2z Dt[z]
```

Это означает, что

$$d(x^2y + z^2 - 1) = 2xy\,dx + x^2dy + 2z\,dz.$$

Можно найти и дифференциалы высших порядков, например, для предыдущей функции вычислим второй дифференциал:

```
Dt[Dt[x^2y + z^2 - 1]]
2y Dt[x]^2 + 4x Dt[x] Dt[y] + 2 Dt[z]^2 + 2xy Dt[Dt[x]] + x^2 Dt[Dt[y]] + 2z Dt[Dt[z]]
```

то есть

$$d^2(x^2y + z^2 - 1) = 2y\,dx^2 + 4x\,dx\,dy + 2\,dz^2 + 2xy\,d^2x + x^2\,d^2y + 2z\,d^2z.$$

Таким образом, *Mathematica* считается с возможностью того, что x, y и z могут быть функциями каких-то еще аргументов. Но, если эти переменные независимы, то в полученной формуле следует положить $d^2x = d^2y = d^2z = 0$ и она приобретет вид

$$d^2(x^2y + z^2 - 1) = 2y\,dx^2 + 4x\,dx\,dy + 2\,dz^2.$$

Если в теле оператора Dt указать независимую переменную, он вычислит полную производную функции:

```
Dt[xe^(x²−y²+z²),t]//Factor
```

$e^{x^2-y^2+z^2}$(Dt[x,t] + 2x² Dt[x,t] - 2xy Dt[y,t] + 2xz Dt[z,t])

Это следует понимать как

$$\frac{d(xe^{x^2-y^2+z^2})}{dt} = e^{x^2-y^2+z^2}\left[(1+2x^2)\frac{dx}{dt} - 2xy\,\frac{dy}{dt} + 2xz\,\frac{dz}{dt}\right].$$

Как вы заметили, зависимость от переменной t не была задана. Зададим ее:

```
Dt[xe^(x²−y²+z²),t]/.{x → Sin[t],y → Cos[t],z → t²−t}//Factor
```

$e^{(-t+t^2)^2-\mathrm{Cos[t]}^2+\mathrm{Sin[t]}^2}$ (Cos[t] + 2t Sin[t] - 6t² Sin[t] + 4t² Sin[t] + 4 Cos[t] Sin[t]²)

Перейдем к геометрии. Если в системе *Mathematica* задана функция f[x,y], и координаты обыкновенной точки x0, y0, лежащей на графике функции, то уравнение касательной плоскости можно записать в виде

```
zxy[x_,y_]:=fx0(x-x0)+fy0(y-y0)+z0
```

где

```
z0=f[x0,y0];
fx0=Derivative[1,0][f][x0,y0,z0];
fy0=Derivative[0,1][f][x0,y0,z0];
```

После этого уравнение касательной плоскости можно использовать в вычислениях; например, построить ее график (рис. 3):

```
f[x_,y_]:=1 − x² − y²;
x0=0.2;y0=0;z0=f[x0, y0];
fx0=Derivative[1,0][f][x0,y0,z0];
fy0=Derivative[0,1][f][x0,y0,z0];
zxy[x_,y_]:=fx0(x - x0) + fy0(y - y0) + z0
plot1=Plot3D[1 − x² − y²,{x,−1.1,1.1},{y,−1.1,1.1},
    RegionFunction → Function[{x,y,z},x² + y² ≤ 1],AxesLabel → {x,y,z},
    BoxRatios → {1,1,1.1}];
plot2=Plot3D[zxy[x,y],{x,−1.1,1.1},{y,−1.1,1.1},
    RegionFunction → Function[{x,y,z},Abs[x - x0] ≤ 0.7 &&
    Abs[y - y0] ≤ 0.7],PlotStyle → Opacity[0.8],Mesh → None];
plot3=ParametricPlot3D[{x0 + fx0 t,y0 + fy0 t,z0 - t},{t,−2,2},
    PlotStyle → {Thick,Red}];
Show[plot1,plot2,plot3,PlotRange → {0,2}]
```

Заодно был построен и график нормали, которая задавалась в параметрической форме:

$$\frac{\mathtt{x-x0}}{\mathtt{fx0}} = \frac{\mathtt{y-y0}}{\mathtt{fy0}} = \frac{\mathtt{z-z0}}{-1} = \mathtt{t}.$$

Использованная при построении опция Opacity определяет степень прозрачности геометрического объекта, поэтому сквозь слегка прозрачную касательную плоскость просвечивает поверхность. Опция RegionFunction с помощью логической функции задает область, над которой строится геометрический объект. Так, для графика функции был выбран круг $x^2+y^2 \le 1$, а для касательной плоскости — квадрат $|x-x0| \le 0.7$, $|y-y0| \le 0.7$.

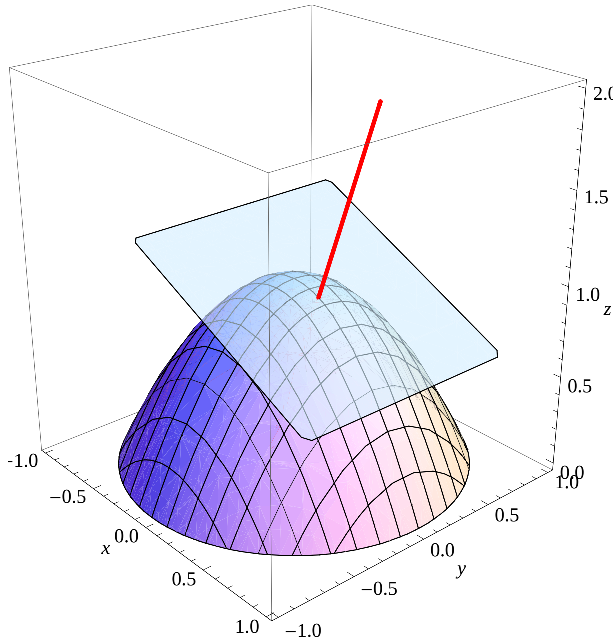

Рис. 3.

Наконец, рассмотрим возможность разложения функций нескольких переменных в ряд Тейлора. Такое разложение *Mathematica* выполняет с помощью уже известного вам оператора `Series`:

```
SerSin=Series[Sin[x+y],{x,0,3},{y,0,3}]
```

$$\left(y-\frac{y^2}{6}+O[y]^4\right)+\left(1-\frac{y^2}{2}+O[y]^4\right)x+\left(-\frac{y}{2}+\frac{y^2}{12}+O[y]^4\right)x^2+\left(-\frac{1}{6}+\frac{y^2}{12}+O[y]^4\right)x^3+O[x]^4$$

Можно заметить, что для каждой степени x *Mathematica* выполняет отдельное разложение функции по степеням y. В результате остаточный член формулы Тейлора состоит из нескольких слагаемых, которые еще требуется свести воедино. Если нас интересует только аппроксимирующий многочлен, к предыдущему результату надо применить оператор `Normal`:

```
Normal[SerSin]
```

$$x-\frac{x^3}{6}+\left(1-\frac{x^2}{2}\right)y+\left(-\frac{x}{2}+\frac{x^3}{12}\right)y^2+\left(-\frac{1}{6}+\frac{x^2}{12}\right)y^3$$

Теперь можно найти вид остаточного члена этого разложения в системе *Mathematica*:

```
SerSin - Normal[SerSin]
```

$$O[y]^4+O[y]^4x+O[y]^4x^2+O[y]^4x^3+O[x]^4$$

Литература

[1] Бугров Я.С., Никольский С.М. *Высшая математика. Дифференциальное и интегральное исчисление.* – М.: Наука, 1984, – с. 307-317, 321-328.

[2] Письменный Д.Т. *Конспект лекций по высшей математике.* – М.: Рольф, 2000. Ч. 1. – с. 265–271, 273, 274.