Интегрирование ДРФ

Волченко Ю.М.

Содержание лекции

Понятие дробно-рациональной функции (ДРФ). Классификация ДРФ. Интегрирование простейших ДРФ. Разложение правильной ДРФ на сумму простейших ДРФ. Интегрирование правильных ДРФ. Интегрирование неправильных ДРФ.

Интегрирование ДРФ в системе *Mathematica*.

23 марта 2013 г.

На предыдущей лекции было упомянуто, что не все интегралы «берутся», т. е. не всегда выражаются в элементарных функциях. Сегодня мы, однако, познакомимся с классом функций, называемых дробно-рациональными (ДРФ), которые всегда интегрируются в элементарных функциях. Более того, для этого требуется всего три типа элементарных функций: сами ДРФ, логарифм и арктангенс. Можно сделать и более далеко идущий вывод: если интеграл от какой-либо функции удается преобразовать в интеграл от ДРФ, то, значит, такой интеграл обязательно «возьмется», «взять» его будет только делом техники.

Дробно-рациональной функцией называется отношение двух многочленов:

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{a_0x^m + \ldots + a_{m-1}x + a_m}{b_0x^n + \ldots + a_{n-1}x + a_n}.$$

Если $m < n$, то ДРФ называется ***правильной***, если же $m \geq n$, то ДРФ называется ***неправильной***.

Следующие правильные ДРФ называются ***простейшими***:

$$\text{I. } \frac{1}{x-a}. \quad \text{II. } \frac{1}{(x-a)^k}, \quad k \in \mathbb{N}/\left\{1\right\}.$$

$$\text{III. } \frac{Ax+B}{x^2+px+q}, \ p^2-4q<0, \quad \text{IV. } \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}, \ p^2-4q<0, \quad k \in \mathbb{N}/\left\{1\right\}.$$

Условие $p^2-4q<0$ означает, что корни квадратного трехчлена — комплексные. Если это не так, интегрирование дробей третьего и четвертого типов, как это будет показано дальше, можно свести к интегрированию дробей первого и второго типов.

1 Интегрирование простейших ДРФ

Познакомимся с приемами интегрирования простейших ДРФ.

I. Первая простейшая ДРФ интегрируется практически на основе таблицы интегралов:

$$\int \frac{dx}{x-a}\,dx = \ln|x-a| + C.$$

II. Не сложнее обстоит дело со второй ДРФ:

$$\int \frac{dx}{(x-a)^k} = \int (x-a)^{-k}\,dx = \frac{(x-a)^{-k+1}}{1-k} + C.$$

III. Для интегрирования третьей ДРФ сначала выделим в числителе ДРФ производную знаменателя

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}\,dx = \int \frac{\frac{A}{2}(2x+p)+B-\frac{Ap}{2}}{x^2+px+q}\,dx = \\ = \frac{A}{2}\int \frac{2x+p}{x^2+px+q}\,dx + \left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int \frac{dx}{x^2+px+q}.$$

Первый интеграл возьмем заменой $u=x^2+px+q$, $du=(2x+p)\,dx$, а во втором выделим полный квадрат в знаменателе:

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}\,dx = \frac{A}{2}\int\frac{du}{u} + \left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int \frac{dx}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}} = \\ = \left\langle t = x+\frac{p}{2},\ dt=dx,\ w^2=q-p^2/4 \right\rangle = \frac{A}{2}\ln u + \left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int\frac{dt}{t^2+w^2} = \\ = \frac{A}{2}\ln(x^2+px+q) + \frac{1}{w}\left(B-\frac{Ap}{2}\right)\operatorname{arctg}\frac{t}{w} + C = \\ = \frac{A}{2}\ln(x^2+px+q) + \frac{1}{w}\left(B-\frac{Ap}{2}\right)\operatorname{arctg}\frac{2x+p}{2w} + C.$$

IV. Интегрирование четвертой простейшей ДРФ представляет более сложную задачу. Сначала преобразуем интеграл заменой (w^2 — то же, что и раньше):

$$\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}\,dx = \int \frac{Ax+B}{\left[\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}\right]^k}\,dx = \left\langle t=x+\frac{p}{2},\ dt=dx\right\rangle =$$

$$= \int \frac{A\left(t-\frac{p}{2}\right)+B}{\left(t^2+w^2\right)^k}\,dt = A\int \frac{t}{\left(t^2+w^2\right)^k}\,dt + \left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int \frac{dt}{\left(t^2+w^2\right)^k}.$$

Первый из полученных интегралов вычисляется сразу:

$$\int \frac{t}{\left(t^2+w^2\right)^k}\,dt = \left\langle z=t^2+w^2,\ dz=2t\,dt\right\rangle = \frac{1}{2}\int \frac{dz}{z^k} = \frac{1}{2\,(1-k)\,z^{k-1}} + C =$$
$$= \frac{1}{2\,(1-k)\left(t^2+w^2\right)^{k-1}} + C. \qquad (1)$$

Второй представим в виде разности двух интегралов:

$$I_k = \int \frac{dt}{\left(t^2+w^2\right)^k} = \frac{1}{w^2}\int \frac{\left(t^2+w^2\right)-t^2}{\left(t^2+w^2\right)^k}\,dt =$$
$$= \frac{1}{w^2}\left[\int \frac{dt}{\left(t^2+w^2\right)^{k-1}} - \int \frac{t^2}{\left(t^2+w^2\right)^k}\,dt\right] =$$
$$= \frac{1}{w^2}\left[I_{k-1} - \int \frac{t^2}{\left(t^2+w^2\right)^k}\,dt\right]. \qquad (2)$$

Интеграл в квадратных скобках возьмем по частям (для вычисления v используем (1)):

$$u=t,\ dv=\frac{t}{\left(t^2+w^2\right)^k}\,dt,\ du=dt, v=\frac{1}{2\,(1-k)\left(t^2+w^2\right)^{k-1}},$$

$$\int \frac{t^2}{\left(t^2+w^2\right)^k}\,dt = \frac{t}{2\,(1-k)\left(t^2+w^2\right)^{k-1}} - \frac{1}{2\,(1-k)}\int \frac{dt}{\left(t^2+w^2\right)^{k-1}} =$$
$$= \frac{t}{2\,(1-k)\left(t^2+w^2\right)^{k-1}} - \frac{1}{2\,(1-k)}I_{k-1}.$$

Полученное выражение подставим в формулу (2):

$$I_k = \frac{1}{w^2}\left[I_{k-1} - \frac{t}{2\,(1-k)\left(t^2+w^2\right)^{k-1}} + \frac{1}{2\,(1-k)}I_{k-1}\right],$$
$$I_k = \frac{1}{w^2}\left[\frac{2k-3}{2k-2}I_{k-1} + \frac{t}{2\,(k-1)\left(t^2+w^2\right)^{k-1}}\right]. \qquad (3)$$

Тем самым задача вычисления интеграла от ДРФ четвертого типа решена.

Пример 1. *Найти интеграл*

$$\int \frac{x+1}{x^2+6x+25}\,dx.$$

Решение. Вычислим данный интеграл, следуя схеме вычисления, изложенной для интегралов третьего типа:

$$\int \frac{x+1}{x^2+6x+25}\,dx = \int \frac{\frac{1}{2}(2x+6)-2}{x^2+6x+25}\,dx =$$
$$= \frac{1}{2}\int \frac{2x+6}{x^2+6x+25}\,dx - 2\int \frac{dx}{x^2+6x+25} = \left\langle t = x^2+6x+25,\ dt = 2x+6 \right\rangle =$$
$$= \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t}\,dx - 2\int \frac{dx}{(x+3)^2+16} = \frac{1}{2}\ln t - 2\cdot\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{x+3}{4} + C =$$
$$= \frac{1}{2}\ln\left(x^2+6x+25\right) - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+3}{4} + C.$$

Пример 2. *Найти интеграл*

$$\int \frac{1-x}{(x^2+2x+2)^3}\,dx.$$

Решение. Применим методику вычисления интегралов четвертого типа. Преобразуем заданный интеграл в сумму двух интегралов:

$$\int \frac{1-x}{(x^2+2x+2)^3}\,dx = \int \frac{1-x}{\left[(x+1)^2+1\right]^3}\,dx = \langle t = x+1,\ dt = dx\rangle =$$
$$= \int \frac{2-t}{(t^2+1)^3}\,dt = -\int \frac{t}{(t^2+1)^3}\,dt + 2\int \frac{dt}{(t^2+1)^3}. \tag{4}$$

Первый интеграл вычислим заменой:

$$J = \int \frac{t}{(t^2+1)^3}\,dt = \left\langle z = t^2+1,\ dz = 2t\,dt \right\rangle = \frac{1}{2}\int \frac{dz}{z^3} =$$
$$= -\frac{1}{4z^2} + C_1 = -\frac{1}{4\left(t^2+1\right)^2} + C_1,$$

а для вычисления второго воспользуемся формулой (3) при $w = 1$:

$$I_k = \frac{2k-3}{2k-2} I_{k-1} + \frac{t}{2\,(k-1)\left(t^2+w^2\right)^{k-1}}. \tag{5}$$

Интеграл I_1 найдем непосредственно (произвольную постоянную пока не пишем):

$$I_1 = \int \frac{dt}{t^2+1} = \operatorname{arctg} t.$$

Зная I_1, по формуле (5) при $k = 2$ определим I_2:

$$I_2 = \int \frac{dt}{(t^2+1)^2} = \frac{1}{2}\,I_1 + \frac{t}{2(t^2+1)} = \frac{t}{2(t^2+1)} + \frac{1}{2}\,\operatorname{arctg} t.$$

Чтобы найти I_3, еще раз применим формулу (5), но теперь при $k = 3$:

$$I_3 = \int \frac{dt}{(t^2+1)^3} = \frac{3}{4}\,I_2 + \frac{t}{4(t^2+1)^2} = \frac{3t}{8(t^2+1)} + \frac{t}{4(t^2+1)^2} + \frac{3}{8}\,\operatorname{arctg} t + C_2.$$

По формуле (4) вычислим заданный интеграл:

$$
\begin{aligned}
&\int \frac{1-x}{\left(x^2+2x+2\right)^3}\,dx = -J + 2J_3 = \\
&\qquad = \frac{1}{4\left(t^2+1\right)^2} - C_1 + \frac{3t}{4(t^2+1)}^{\backslash t^2+1} + \frac{t}{2(t^2+1)^2}^{\backslash 2} + \frac{3}{4}\operatorname{arctg} t + 2C_2 = \\
&\qquad = \frac{3t^3+5t+1}{4(t^2+1)^2} + \frac{3}{4}\operatorname{arctg} t + C = \\
&\qquad = \frac{3(x+1)^3+5(x+1)+1}{4[(x+1)^2+1]^2} + \frac{3}{4}\operatorname{arctg}(x+1) + C = \\
&\qquad = \frac{3x^3+9x^2+14x+9}{4(x^2+2x+2)^2} + \frac{3}{4}\operatorname{arctg}(x+1) + C.
\end{aligned}
$$

2 Интегрирование правильных ДРФ

Пусть требуется проинтегрировать правильную ДРФ

$$
\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{x^m + a_1x^{m-1} + \ldots + a_{m-1}x + a_m}{x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n}.
$$

Как известно†, любой многочлен с действительными коэффициентами можно разложить на произведение линейных и квадратичных множителей с отрицательными дискриминантами. Произведем такое разложение в знаменателе ДРФ:

$$
\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{x^m + a_1x^{m-1} + \ldots + a_{m-1}x + a_m}{(x-a_1)^{m_1}\ldots(x-a_k)^{m_k}\left(x^2+p_1x+q_1\right)^{n_1}\ldots\left(x^2+p_lx+q_l\right)^{n_l}}. \tag{6}
$$

Теорема 1. *Всякая правильная ДРФ может быть представлена в виде суммы простейших ДРФ:*

$$
\begin{aligned}
\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} &= \frac{A_1}{(x-a_1)^{m_1}} + \frac{A_2}{(x-a_1)^{m_1-1}} + \ldots + \frac{A_{m_1}}{x-a_1} + \ldots + \\
&+ \frac{B_1}{(x-a_k)^{m_k}} + \frac{B_2}{(x-a_k)^{m_k-1}} + \ldots + \frac{B_{m_k}}{x-a_k} + \ldots + \\
&+ \frac{C_1x+D_1}{\left(x^2+p_1x+q_1\right)^{n_1}} + \frac{C_2x+D_2}{\left(x^2+p_1x+q_1\right)^{n_1-1}} + \ldots + \frac{C_{n_1}x+D_{n_1}}{x^2+p_1x+q_1} + \ldots + \\
&+ \frac{E_1x+F_1}{\left(x^2+p_lx+q_l\right)^{n_l}} + \frac{E_2x+F_2}{\left(x^2+p_lx+q_l\right)^{n_l-1}} + \ldots + \frac{E_{n_l}x+F_{n_l}}{x^2+p_lx+q_l}.
\end{aligned} \tag{7}
$$

Доказательство приведено в Приложении[1)].

---

†Лекция «Комплексная функция».

Следствие 1. *Каждая правильная ДРФ может быть проинтегрирована в элементарных функциях, так как в правой части разложения* (7) *стоят простейшие ДРФ, которые всегда интегрируются в элементарных функциях.*

Остается найти неизвестные коэффициенты $A_1, \ldots, F_{n_l}$ разложения (7). Эту задачу решает следующая схема вычислений, которая основывается на том, что равенство многочленов равносильно равенству их коэффициентов при одинаковых степенях переменной[2]:

1) привести правую часть равенства (7) к общему знаменателю;

2) раскрыть скобки в полученном числителе и привести в нем подобные;

3) приравнять полученный числитель числителю левой части, то есть фактически приравнять их коэффициенты;

4) решить полученную таким образом систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов $A_1, \ldots, F_{n_l}$.

Такой способ определения неизвестных коэффициентов разложения ДРФ называется методом ***неопределенных коэффициентов***.

Пример 3. *Вычислить интеграл*

$$\int \frac{3x+2}{x\,(x+1)\,(x^2+1)}\,dx.$$

Решение. Разложим подынтегральную ДРФ на сумму простейших ДРФ в соответствии с формулой (7):

$$\frac{3x+2}{x\,(x+1)\,(x^2+1)} = \frac{A}{x}^{\backslash(x+1)\left(x^2+1\right)} + \frac{B}{x+1}^{\backslash x\left(x^2+1\right)} + \frac{Cx+D}{x^2+1}^{\backslash x(x+1)}.$$

Приравняем числители левой и правой частей:

$$3x+2 = (A+B+C)\,x^3 + (A+C+D)\,x^2 + (A+\ +D)\,x + A.$$

Приравнивая коэффициенты при соответствующих степенях x, получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} A+B+C=0, \\ A+C+D=0, \\ A+B+D=3, \\ A=2. \end{cases}$$

Так как $A=2$, то система упрощается:

$$\begin{cases} B+C=-2, \\ C+D=-2. \\ B+D=1. \end{cases}$$

Решением системы является $B=D=1/2$, $C=-5/2$. Следовательно, разложение подынтегральной функции имеет вид

$$\frac{3x+2}{x\,(x+1)\,(x^2+1)} = \frac{2}{x} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+1} - \frac{1}{2}\cdot\frac{5x-1}{x^2+1}.$$

Берем заданный интеграл:

$$\int \frac{3x+2}{x\,(x+1)\,(x^2+1)}\,dx = 2\int \frac{dx}{x} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x+1} - \frac{5}{4}\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+1} =$$

$$= 2\ln x + \frac{1}{2}\ln|x+1| - \frac{5}{4}\ln\left(x^2+1\right) + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + C.$$

Пример 4. *Найти интеграл*

$$\int \frac{2x^3-x^2-27x+30}{(x-1)\,(x-2)^3\,(x+1)}\,dx.$$

Решение. На этом примере мы познакомимся с еще одним методом нахождения неопределенных коэффициентов в разложении ДРФ на сумму простейших ДРФ. Запишем разложение подынтегральной функции по формуле (7):

$$\frac{2x^3-x^2-27x+30}{(x-1)\,(x-2)^3\,(x+1)} =$$

$$= \frac{A}{x-1}^{\backslash(x-2)^3(x+1)} + \frac{B}{(x-2)^3}^{\backslash(x-1)(x+1)} + \frac{C}{(x-2)^2}^{\backslash(x-1)(x-2)(x+1)} +$$

$$+ \frac{D}{x-2}^{\backslash(x-1)(x-2)^2(x+1)} + \frac{E}{x+1}^{\backslash(x-1)(x-2)^3}.$$

После приведения правой части к общему знаменателю снова получим в правой части многочлен с неопределенными коэффициентами. Приравняв числители, придем к равенству двух многочленов. Подставляя в них одни и те же значения аргумента, будем получать уравнения для неопределенных коэффициентов. Какие же значения x следует подставлять? Да те, которые обращают дополнительные множители в формуле (7) в 0! Если корней знаменателя достаточно, чтобы найти все неизвестные коэффициенты, то метод называется методом частных значений. Если корней знаменателя недостаточно, то приравнивают также коэффициенты при некоторых одинаковых степенях x, как это делалось в предыдущем примере. Тогда этот метод называется комбинированным методом неопределенных коэффициентов и частных значений.

Последний метод мы и применим, оформив наши действия в виде таблицы, в первом столбце которой будут указаны либо значения x, подставляемые в числители, либо степени x, при которых приравниваются коэффициенты. Во втором столбце будут приведены получающиеся при этом уравнения, а в остальных столбцах — ход их решения. Вот что у нас получится:

$x=-1$	$54E=54$	$E=1$
$x=1$	$-2A=4$	$A=-2$
$x=2$	$3B=-12$	$B=-4$
x^4	$A+D+E=0$	$D=-A-E=2-1=1$
x^0	$-8A-B+2C-4D+8E=30$	$C=(30+8A+B+4D-8E)/2=$
		$=(30-16-\cancel{4}+\cancel{4}-8)/2=3$

Как видите, на этот раз систему решать не пришлось, просто последовательно вычислялись коэффициенты. В результате получаем следующее разложение подынтегральной функции:

$$\frac{2x^3-x^2-27x+30}{(x-1)\,(x-2)^3\,(x+1)} = -\frac{2}{x-1} - \frac{4}{(x-2)^3} + \frac{3}{(x-2)^2} + \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x+1}.$$

Возьмем интеграл:

$$\int \frac{2x^3 - x^2 - 27x + 30}{(x-1)(x-2)^3(x+1)}\,dx =$$
$$= -2\ln|x-1| + \frac{2}{(x-2)^2} - \frac{3}{x-2} + \ln|x-2| + \ln|x+1| + C.$$

3 Интегрирование неправильных ДРФ

Неправильную ДРФ всегда можно представить в виде суммы многочлена и правильной ДРФ. Для этого числитель неправильной ДРФ надо разделить на ее знаменатель по правилу деления многочленов с остатком.

Следствие 2. *Так как многочлен и правильная ДРФ интегрируются в элементарных функциях, то любая ДРФ интегрируется в элементарных функциях.*

Пример 5. *Вычислить интеграл*

$$\int \frac{x^3+1}{x^2+4x+5}\,dx.$$

Решение. Разделим числитель подынтегральной функции на ее знаменатель:

$$\begin{array}{r|l} -\begin{array}{l} x^3+1 \\ x^3+4x^2+5x \end{array} & x^2+4x+5 \\ \cline{1-1} \cline{2-2} \quad -\begin{array}{l} -4x^2-5x+1 \\ -4x^2-16x-20 \end{array} & x-4 \\ \cline{1-1} 11x+21 & \end{array}$$

Таким образом,

$$\frac{x^3+1}{x^2+4x+5} = x - 4 + \frac{11x+21}{x^2+4x+5}.$$

Многочлен легко интегрируется:

$$\int (x-4)\,dx = \frac{x^2}{2} - 4x + C_1,$$

а правильную ДРФ интегрируем способом, рассмотренным выше:

$$\int \frac{11x+21}{x^2+4x+5}\,dx = \int \frac{\frac{11}{2}(2x+4)-1}{x^2+4x+5}\,dx = \frac{11}{2}\int \frac{2x+4}{x^2+4x+5}\,dx - \int \frac{dx}{(x+2)^2+1} =$$
$$= \left\langle t = x^2+4x+5,\ dt = (2x+4)\,dx \right\rangle = \frac{11}{2}\int \frac{dt}{t} - \operatorname{arctg}(x+2) =$$
$$= \frac{11}{2}\ln t - \operatorname{arctg}(x+2) + C_2 = \frac{11}{2}\ln\left(x^2+4x+5\right) - \operatorname{arctg}(x+2) + C_2.$$

Суммируя полученные интегралы, находим окончательное выражение для заданного интеграла:

$$\int \frac{x^3+1}{x^2+4x+5}\,dx = \frac{x^2}{2} - 4x + \frac{11}{2}\,\ln\left(x^2+4x+5\right) - \operatorname{arctg}(x+2) + C.$$

$\square$

В Приложении[3)] показано, как использовать систему *Mathematica* для интегрирования ДРФ.

Приложение

[1)] Сначала докажем две леммы.

Лемма П1. *Пусть знаменатель $Q_n(x)$ правильной ДРФ $P_m(x)/Q_n(x)$ имеет корень a кратности $k \geq 1$, тогда ДРФ раскладывается в следующую сумму ДРФ:*

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{A}{(x-a)^k} + \frac{R(x)}{(x-a)^{k-1}S(x)}, \tag{П1}$$

где $A \equiv \text{const}$, $R(x)$, $S(x)$ — многочлены, причем, $S(a) \neq 0$, а вторая дробь в правой части равенства — правильная ДРФ.

Доказательство. Многочлен $R(x)$ находим из того факта, что знаменатель можно представить в виде

$$Q_n(x) = (x-a)^k S(x),$$

причем, $S(a) \neq 0$ и степень $S(x)$ равна $n-k$.

Чтобы подобрать подходящую константу A и подходящий многочлен $R(x)$, приведем (П1) к общему знаменателю, а затем отбросим его:

$$P_m(x) - AS(x) = (x-a)R(x). \tag{П2}$$

Выберем A из условия, чтобы левая часть равенства делилась на $x-a$. Для этого достаточно, чтобы $x = a$ был корнем многочлена левой части. Подставляя в (П2) значение $x = a$, получаем, что

$$A = \frac{P_m(a)}{S(a)}.$$

После того как константа A определена, многочлен $R(x)$ находится из равенства (П2):

$$R(x) = \frac{P_m(x) - AS(x)}{x-a}. \tag{П3}$$

Остается доказать, что вторая дробь в правой части равенства (П1) — правильная. Для этого заметим, что степени многочленов $P_m(x)$ и $S(x)$ не превосходят $n-1$. Кроме того, числитель правой части (П3) нацело делится на $x-a$, поскольку константа A определялась, исходя из этого условия. Значит, степень $R(x)$ не превосходит $n-2$, а степень знаменателя второй дроби в правой части формулы (П1) равна $n-1$. Таким образом, эта дробь — правильная.

Лемма П2. *Пусть квадратный трехчлен x^2+px+q с отрицательным дискриминантом входит в разложение знаменателя $Q_n(x)$ правильной ДРФ $P_m(x)/Q_n(x)$ с показателем $k \geq 1$. Тогда ДРФ можно представить в виде*

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k} + \frac{R(x)}{(x^2+px+q)^{k-1}S(x)}, \tag{П4}$$

где M, N — константы, $R(x)$, $S(x)$ — многочлены, причем, $S(x)$ на трехчлен x^2+px+q не делится, а вторая дробь в правой части равенства — правильная ДРФ.

Доказательство. Многочлен $S(x)$ находим из разложения

$$Q_n(x) = (x^2+px+q)^k S(x),$$

причем, $S(x)$ не делится на x^2+px+q и его степень равна $n-2k$.

Подберем подходящие константы M и N и подходящий многочлен $R(x)$. Для этого приведем равенство (П4) к общему знаменателю и отбросим последний:

$$P_m(x) - (Mx+N)S(x) = (x^2+px+q)R(x). \tag{П5}$$

Обозначим комплексные корни трехчлена x^2+px+q как $\alpha = c+dj$ и $\overline{\alpha} = c-dj$, $d \neq 0$. Подставим их в равенство (П5) и получим систему уравнений:

$$\begin{cases} P_m(\alpha) - (M\alpha+N)S(\alpha) = 0, \\ P_m(\overline{\alpha}) - (M\overline{\alpha}+N)S(\overline{\alpha}) = 0, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} M\alpha + N = \dfrac{P_m(\alpha)}{S(\alpha)} = L, \\ M\overline{\alpha} + N = \dfrac{P_m(\overline{\alpha})}{S(\overline{\alpha})} = \overline{\left(\dfrac{P_m(\alpha)}{S(\alpha)}\right)} = \overline{L}, \end{cases} \tag{П6}$$

причем, по условию $S(\alpha) \neq 0$, $S(\overline{\alpha}) \neq 0$.

Система имеет единственное решение относительно M и N, так как ее главный определитель не равен нулю:

$$\begin{vmatrix} \alpha & 1 \\ \overline{\alpha} & 1 \end{vmatrix} = \alpha - \overline{\alpha} = 2dj \neq 0.$$

Покажем, что решения M и N этой системы являются действительными числами. Для этого в системе (П6) перейдем к сопряженным величинам:

$$\begin{cases} \overline{M}\overline{\alpha} + \overline{N} = \overline{L}, \\ \overline{M}\alpha + \overline{N} = L. \end{cases} \tag{П7}$$

Системы (П6) и (П7) равносильны, и поэтому их единственные решения должны совпадать: $M = \overline{M}$, $N = \overline{N}$. Это и означает действительность чисел M и N.

Из равенства (П5) найдем многочлен $R(x)$:

$$R(x) = \frac{P_m(x) - (Mx+N)S(x)}{x^2+px+q}.$$

Правильность второй дроби в правой части формулы (П4) доказывается аналогично тому, как это было сделано в конце предыдущей леммы. □

Пусть теперь имеется ДРФ в виде (6). Если $x - a_1$ входит в разложение знаменателя в первой степени, то, применяя формулу (П1), мы выделим дробь

$$\frac{A_1}{x-a_1},$$

которая будет единственной в первой строке разложения (7). Если же $m_1 > 1$, то, пользуясь формулой (П1), мы сначала выделим дробь

$$\frac{A_1}{(x-a_1)^{m_1}},$$

затем, применяя к оставшейся дроби снова формулу (П1), выделим сумму

$$\frac{A_1}{(x-a_1)^{m_1}} + \frac{A_2}{(x-a_1)^{m_1-1}},$$

и так далее, пока не получим всю первую строку разложения (7).

Этот же подход применим к каждому линейному множителю в формуле (6) и получим первые две строки разложения (7).

Переходя к квадратичным множителям, повторим наши рассуждения, но уже применяя не равенство (П1), а формулу (П4). В результате получим все разложение (7).

[2)] Говоря о равенстве многочленов, надо учитывать один нюанс. Различают алгебраическое и функциональное равенство многочленов. Многочлены равны ***алгебраически***, если равны их коэффициенты при одинаковых степенях x. Многочлены равны ***функционально*** (или как функции), если их значения равны при всех значениях переменной x. Если многочлены равны алгебраически, то, очевидно, они равны и функционально. Чтобы доказать обратное, придется рассмотреть такие утверждения.

Лемма П3. *Два многочлена, степень которых не превосходит n, алгебраически равны, если их значения равны при $n+1$ значении переменной.*

Доказательство. Возьмем два таких многочлена $P(x)$ и $Q(x)$ и рассмотрим многочлен $P(x) - Q(x)$. Последний имеет по предположению теоремы более n корней, а степень его не превосходит n. Это возможно только для нулевого многочлена (все коэффициенты которого равны нулю). Значит $P(x) = Q(x)$ алгебраически. □

Следствие П1. *Если два многочлена не равны алгебраически, то они принимают различные значения на бесконечном множестве чисел (можно брать комплексные, или действительные, или даже целые числа — и тех, и других, и третьих бесконечно много).*

Доказательство. Если бы многочлены принимали различные значения на конечном множестве чисел, то из остальной (бесконечной) части чисел можно было бы выделить по крайней мере $n+1$ значение x, для каждого из которых многочлены были бы равны, и тогда по доказанной лемме многочлены были бы равны алгебраически, что противоречит условию следствия. □

Это значит, что алгебраически не равные друг другу многочлены не равны и функционально. Следовательно, справедлива

Теорема П1. *Если два многочлена равны функционально, то они равны и алгебраически.*

Обратим внимание на то, что в методе неопределенных коэффициентов используется алгебраическое равенство многочленов, а в методе частных значений — функциональное.

[3)] Проще всего познакомиться с тем, как *Mathematica* интегрирует ДРФ, на примерах, взятых из текущей лекции. Особенности интегрирования в этой системе пояснялись на предыдущей лекции[†]. Начнем с простейших ДРФ:

$$\int \frac{x+1}{x^2+6x+25}\,dx$$

$$-\frac{1}{2}\,\mathtt{ArcTan}\Big[\frac{3+x}{4}\Big] + \frac{1}{2}\,\mathtt{Log}[25+6x+x^2]$$

$$\int \frac{1-x}{(x^2+2x+2)^2}\,dx$$

$$\frac{3+2x}{2(2+2x+x^2)} + \mathtt{ArcTan}[1+x]$$

[†]Лекция «Неопределенный интеграл».

Последний пример можно усложнить, увеличив показатель степени в знаменателе. Систему *Mathematica* это нисколько не затруднит — решение будет получено практически мгновенно:

$$\int \frac{1-x}{(x^2+2x+2)^3}\,dx$$

$$\frac{1}{4}\left(\frac{9+14x+9x^2+3x^3}{(2+2x+x^2)^2}+3\mathrm{ArcTan}[1+x]\right)$$

$$\int \frac{1-x}{(x^2+2x+2)^4}\,dx$$

$$\frac{1}{24}\left(\frac{92+228x+270x^2+190x^3+75x^4+15x^5}{(2+2x+x^2)^3}+15\mathrm{ArcTan}[1+x]\right)$$

Для интегрирования правильной ДРФ неплохо бы иметь возможность ее разложения в сумму простейших ДРФ. Такую приятную возможность *Mathematica* предоставляет в виде оператора `Apart`:

$$\mathrm{Apart}\left[\frac{3x+2}{x(x+1)(x^2+1)}\right]$$

$$\frac{2}{x}+\frac{1}{2(1+x)}+\frac{1-5x}{2(1+x^2)}$$

Возьмем интеграл от этой ДРФ:

$$\int \frac{3x+2}{x(x+1)(x^2+1)}\,dx$$

$$\frac{\mathrm{ArcTan}[x]}{2}+2\,\mathrm{Log}[x]+\frac{1}{2}\mathrm{Log}[1+x]-\frac{5}{4}\mathrm{Log}[1+x^2]$$

Для следующего примера тоже выполним и разложение правильной ДРФ на сумму простейших ДРФ, и интегрирование:

$$\mathrm{Apart}\left[\frac{2x^3-x^2-27x+30}{(x-1)(x-2)^3(x+1)}\right]$$

$$-\frac{4}{(-2+x)^3}+\frac{3}{(-2+x)^2}+\frac{1}{-2+x}-\frac{2}{-1+x}+\frac{1}{1+x}$$

$$\int \frac{2x^3-x^2-27x+30}{(x-1)(x-2)^3(x+1)}\,dx$$

$$\frac{2}{(-2+x)^2}-\frac{3}{-2+x}+\mathrm{Log}[-2+x]-2\,\mathrm{Log}[-1+x]+\mathrm{Log}[1+x]$$

Деление многочлена на многочлен с остатком тоже выполняет оператор `Apart`:

$$\mathrm{Apart}\left[\frac{x^3+1}{x^2+4x+5}\right]$$

$$-4+x+\frac{21+11x}{5+4x+x^2}$$

Вычислим интеграл:

$$\int \frac{x^3+1}{x^2+4x+5}\,dx$$

$$-4x+\frac{x^2}{2}-\mathrm{ArcTan}[2\ +\ x]+\frac{11}{2}\mathrm{Log}[5+4x+x^2]$$

Литература

[1] Бугров Я.С., Никольский С.М. *Высшая математика. Дифференциальное и интегральное исчисление*. – М.: Наука, 1984, – с. 201, 203, 204, 214-217.

[2] Письменный Д.Т. *Конспект лекций по высшей математике*. – М.: Рольф, 2000. Ч. 1. – с. 206–211.