

Физические приложения определенного интеграла

Волченко Ю.М.

Содержание лекции

Работа переменной силы. Масса и заряд материальной кривой. Статические моменты и центр тяжести материальной кривой и плоской фигуры. Моменты инерции материальной кривой и плоской фигуры.

6 марта 2014 г.

В Приложении¹⁾ приведено доказательство одной полезной для нас леммы.

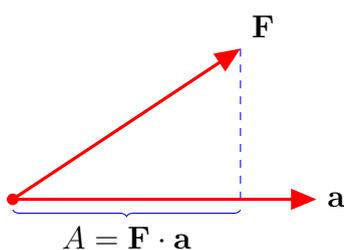
Лемма 1. Если $f(x)$ нечетна на отрезке $[-a, a]$ и интегрируема на нем, то

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0. \quad (1)$$

Если же $f(x)$ четна и интегрируема на $[-a, a]$, то

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx. \quad (2)$$

1 Работа переменной силы



Из элементарной физики известно, что работа A постоянной силы \mathbf{F} по перемещению материальной точки вдоль вектора \mathbf{a} равна их скалярному произведению $A = \mathbf{F} \cdot \mathbf{a}$. Таким образом, если векторы \mathbf{F} и \mathbf{a} сонаправлены, то работа равна произведению их модулей; если противоположно направлены — равна этому же произведению, но с противоположным знаком; если векторы перпендикулярны, работа равна нулю.

Однако материальная точка не обязательно движется по прямой, а сила может изменяться вдоль траектории движения. Пусть переменная сила перемещает материальную точку вдоль кривой AB , заданной в виде вектора

$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$, $t_0 \leq t \leq T$, причем, значению параметра $t = t_0$ отвечает точка A , а значению $t = T$ — точка B . Непостоянство силы вдоль кривой AB выразим зависимостью $\mathbf{F}(t) = F_1(t)\mathbf{i} + F_2(t)\mathbf{j} + F_3(t)\mathbf{k}$. Для работы такой силы справедлива формула²⁾

$$A = \int_{t_0}^T \mathbf{F}(t)\mathbf{r}'(t) dt. \quad (3)$$

Существование интеграла обеспечивает непрерывность скалярного произведения $\mathbf{F}(t)\mathbf{r}'(t)$.

Пример 1. Вычислить работу электрического поля, создаваемого электрическим зарядом Q , расположенном в начале координат, по перемещению заряда q вдоль кривой AB из точки A в точку B .

Решение. В поле заряда Q на заряд q в точке кривой $\mathbf{r}(t)$ действует сила, выражаемая законом Кулона:

$$\mathbf{F}(t) = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2(t)} \cdot \frac{\mathbf{r}(t)}{|\mathbf{r}(t)|},$$

где ϵ_0 — электрическая постоянная. По формуле (3) получаем

$$\begin{aligned} A &= \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \int_{t_0}^T \frac{1}{r^2(t)} \cdot \frac{\mathbf{r}(t)\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}(t)|} dt = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \int_{t_0}^T \frac{x(t)x'(t) + y(t)y'(t) + z(t)z'(t)}{\sqrt{[(x^2(t) + y^2(t) + z^2(t))]^3}} dt = \\ &= \langle u = x^2(t) + y^2(t) + z^2(t), du = [2x(t)x'(t) + 2y(t)y'(t) + 2z(t)z'(t)] dt \rangle = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \int_{r^2(t_0)}^{r^2(T)} \frac{du}{u^{3/2}} = -\frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{u^{1/2}} \Big|_{r^2(t_0)}^{r^2(T)} = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{|\mathbf{r}(t_0)|} - \frac{1}{|\mathbf{r}(T)|} \right]. \end{aligned}$$

Другими словами, работа электрического поля в данном случае не зависит от формы кривой AB , а определяется только начальным и конечным положениями заряда q . \square

Еще один пример рассмотрен в Приложении³⁾.

2 Масса и заряд

Массу однородного стержня найти просто: надо умножить его длину на линейную плотность материала γ , из которого он изготовлен.

Массу неоднородного стержня находят по формуле⁴⁾

$$m = \int_a^b \gamma(x) dx. \quad (4)$$

Если считать $\gamma(x)$ линейной плотностью заряда тонкой проволоки, то полученную формулу можно переписать как

$$q = \int_a^b \gamma(x) dx$$

и интерпретировать как формулу заряда q проволоки, занимающей положение отрезка $[a, b]$ на оси абсцисс.

Рассмотрим изогнутый стержень, форму которого задает векторная функция $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$, $t_0 \leq t \leq T$, и пусть $\gamma(t)$ — его линейная плотность. Масса такого стержня определяется равенством⁵⁾

$$m = \int_{t_0}^T \gamma(t) \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)} dt. \quad (5)$$

Если $\gamma(t)$ — линейная плотность заряда q проволоки, то ее заряд равен

$$q = \int_{t_0}^T \gamma(t) \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)} dt.$$

3 Статические моменты и центр тяжести кривой

Статическим моментом M материальной точки массы m относительно некоторой оси l называется произведение этой массы на расстояние от нее до оси: $M = md$, рис. 1, а). Для **системы материальных точек** с массами m_1, m_2, \dots, m_n , расположенных в одной плоскости с осью, на расстояниях от нее, соответственно, d_1, d_2, \dots, d_n , **статическим моментом** называется сумма отдельных моментов точек: $M = \sum_{i=1}^n m_i d_i$, рис. 1, б). При этом расстояния для точек, лежащих по одну сторону от оси, берутся с одним знаком, а по другую — с противоположным.

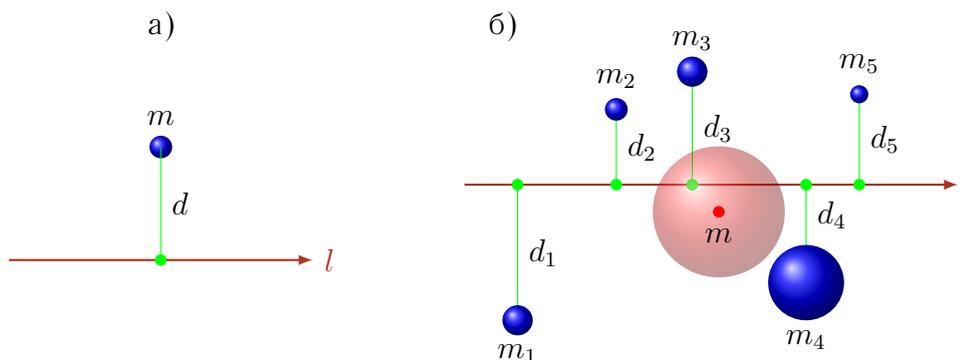


Рис. 1. Статические моменты и центр тяжести.

Центром тяжести плоского геометрического объекта называется точка, обладающая следующим свойством. Если в нее поместить всю массу m объекта, то статический момент этой массы относительно любой оси будет равен статическому моменту объекта относительно этой оси.

Обозначим центр тяжести $C(c_x, c_y)$. Тогда, исходя из его определения, моменты центра тяжести M_x и M_y относительно координатных осей должны удовлетворять равенствам $M_x = mc_y$, $M_y = mc_x$. Таким образом, центр тяжести геометрического объекта массы m определяется формулами

$$c_x = \frac{M_y}{m}, \quad c_y = \frac{M_x}{m}. \quad (6)$$

Пусть имеется система точек, имеющих координаты (x_i, y_i) и массы m_i , $i = \overline{1, n}$. Тогда их статические моменты относительно координатных осей выражаются формулами

$$M_x = \sum_{i=1}^n m_i y_i, \quad M_y = \sum_{i=1}^n m_i x_i,$$

следовательно, центр тяжести такой системы в соответствии с формулами (6) имеет координаты

$$c_x = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{m}, \quad c_y = \frac{\sum_{i=1}^n m_i y_i}{m}. \quad (7)$$

На рис. 1, б) центр тяжести системы из пяти материальных точек показан в виде розового шара с массой m , равной сумме масс всех синих шариков.

Материальные точки могут, однако, заполнять собой некоторую кривую, и тогда представление статического момента в виде суммы моментов отдельных точек не годится. Пусть некоторая материальная кривая $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$, $t_0 \leq t \leq T$, расположена в плоскости xOy . Тогда ее статические моменты относительно осей Ox и Oy , соответственно, вычисляются по формулам⁶⁾

$$M_x = \int_{t_0}^T \gamma(t) y(t) \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt, \quad M_y = \int_{t_0}^T \gamma(t) x(t) \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt. \quad (8)$$

Если кривая задана явным уравнением $y = f(x) \geq 0$, $a \leq x \leq b$, то

$$M_x = \int_a^b f(x) \bar{\gamma}(x) \sqrt{1 + f'^2(x)} dx, \quad M_y = \int_a^b x \bar{\gamma}(x) \sqrt{1 + f'^2(x)} dx, \quad (9)$$

где $\bar{\gamma}(x)$ — линейная плотность вдоль кривой в зависимости от x .

Будем говорить, что материальная кривая однородна, если ее линейная плотность постоянна: $\gamma(x) = \bar{\gamma} \equiv \text{const}$.

Теорема 1. Если материальная кривая симметрична относительно оси ординат и однородна, то ее статический момент $M_y = 0$.

Доказательство. Перепишем вторую из формул (9) для случая постоянной линейной плотности:

$$M_y = \bar{\gamma} \int_{-a}^a x \sqrt{1 + f'^2(x)} dx.$$

Интеграл в правой части равен нулю в силу формулы (1), так как для симметричной относительно оси ординат кривой функция $f(x)$ четна, а тогда подынтегральная функция нечетна.

Теорема 2. *Статический момент нескольких кривых равен сумме их статических моментов.*

Доказательство дано в Приложении⁷).

Центр тяжести кривой можно найти по формулам (6). Если кривая однородна и задана векторной функцией $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$, $t_0 \leq t \leq T$, то, учитывая формулу (5), найдем, что

$$c_x = \frac{1}{l} \int_{t_0}^T x(t) \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt, \quad c_y = \frac{1}{l} \int_{t_0}^T y(t) \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt, \quad (10)$$

где l — длина кривой.

Из теоремы 1 получаем

Следствие 1. *Если кривая имеет ось симметрии и однородна, то ее центр тяжести лежит на этой оси.*

Доказательство. Сделаем ось симметрии кривой осью ординат. Тогда из теоремы 1 следует, что $M_y = 0$, а первая из формул (6) дает $c_x = 0$.

Следствие 2. *Если кривая имеет две оси симметрии и однородна, то ее центр тяжести лежит на пересечении этих осей.*

Пример 2. *Центром тяжести однородного стержня является его середина.*

Решение. Стержень имеет две оси симметрии: на одной он лежит, а вторая перпендикулярна стержню и проходит через его середину. Их пересечение и дает центр тяжести.

Пример 3. *Центр окружности есть и ее центр тяжести.*

Решение. Любая прямая, проходящая через центр окружности, является ее осью симметрии.

Теорема 3. *Центр тяжести нескольких кривых является центром тяжести их центров тяжести, если считать, что в последних сосредоточены массы кривых.*

Доказательство см. в Приложении⁸⁾.

Первая теорема Гульдина. *Площадь S поверхности, образованной вращением однородной плоской кривой около некоторой, не пересекающей ее оси, равна длине l этой кривой, умноженной на длину окружности радиуса R , описанной центром тяжести кривой:*

$$S = l \cdot 2\pi R.$$

Доказательство. Совместим ось вращения кривой с осью абсцисс и следующим образом перепишем второе равенство в (10):

$$l \cdot 2\pi c_y = 2\pi \int_{t_0}^T y(t) \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt.$$

В правой части имеем площадь поверхности вращения[†], а в левой — длину кривой, умноженную на длину окружности, описанной центром тяжести. \square

Эта теорема может использоваться как для вычисления координат центра тяжести, если известна площадь поверхности вращения, так и для нахождения площади поверхности вращения, если известны координаты центра тяжести.

Пример 4. *Найти центр тяжести половины окружности $x^2 + y^2 = R^2$.*

Решение. Заданная кривая симметрична относительно оси ординат, поэтому $c_x = 0$. Вращая кривую относительно оси абсцисс, получим сферу, площадь поверхности которой равна $4\pi R^2$. По первой теореме Гульдина та же площадь равна $l \cdot 2\pi c_y$, где $l = \pi R$ — длина половины окружности. Следовательно, $4\pi R^2 = \pi R \cdot 2\pi c_y$, откуда получаем $c_y = \frac{4\pi R^2}{2\pi^2 R} = \frac{2R}{\pi}$. Таким образом, центром тяжести полуокружности является точка (рис. 2)

$$C \left(0; \frac{2R}{\pi} \right).$$

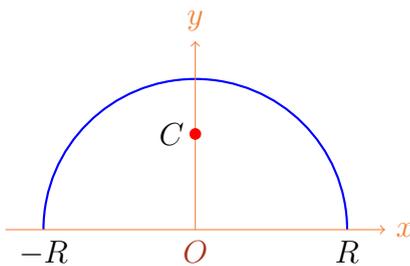


Рис. 2. К примеру 4.

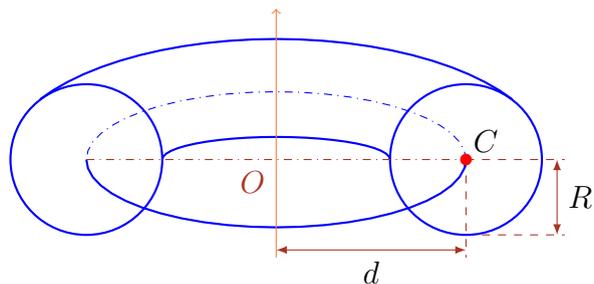


Рис. 3. Тор.

[†]Лекция «Геометрические приложения определенного интеграла».

Пример 5. Вычислить площадь поверхности тора[†] (рис. 3).

Решение. Данная тороидальная поверхность образована вращением окружности радиуса R вокруг вертикальной оси. Так как центр тяжести окружности совпадает с ее центром $(d, 0)$, то по первой теореме Гульдина получаем, что

$$S = 2\pi R \cdot 2\pi d = 4\pi^2 R d.$$

4 Статические моменты и центр тяжести плоской фигуры

Рассмотрим фигуру, изображенную на рис. 4. Сверху она ограничена кривой $y = f_2(x)$, снизу — кривой $y = f_1(x)$, $a \leq x \leq b$. Предположим, что эта

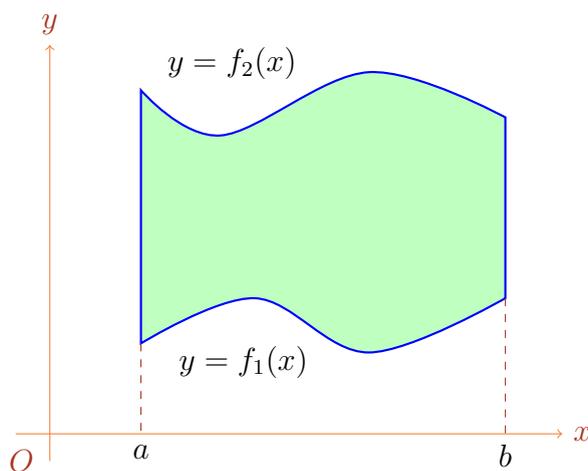


Рис. 4.

фигура однородна, то есть ее поверхностная плотность γ (масса, отнесенная к единице площади) постоянна и даже равна 1. Тогда величины⁹⁾

$$M_x = \frac{1}{2} \int_a^b [f_2^2(x) - f_1^2(x)] dx, \quad M_y = \int_a^b x [f_2(x) - f_1(x)] dx. \quad (11)$$

называют **статическими моментами плоской фигуры** относительно осей Ox и Oy , соответственно.

Теорема 4. Если плоская фигура симметрична относительно оси ординат и однородна, то ее статический момент $M_y = 0$.

Доказательство. Если фигура симметрична относительно оси ординат, то функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ четны, а тогда подынтегральная функция во второй из формул (11) нечетна. Далее следует применить (1). \square

[†]Лекция «Функция II».

Аналогично теореме 2 доказываемся

Теорема 5. *Статический момент нескольких плоских фигур равен сумме их статических моментов.*

Центр тяжести плоской фигуры находят по формулам (6). Для рассматриваемой нами фигуры его координаты выражаются равенствами

$$c_x = \frac{1}{S} \int_a^b x [f_2(x) - f_1(x)] dx, \quad c_y = \frac{1}{2S} \int_a^b [f_2^2(x) - f_1^2(x)] dx, \quad (12)$$

где $S = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)] dx$ — площадь фигуры[†].

Следствия 1, 2 и теорема 3 становятся справедливыми и для плоских фигур, если в них слово «кривая» заменить выражением «плоская фигура».

Поэтому центром тяжести ромба является точка пересечения его диагоналей, а круга — его центр. Докажите, что центром тяжести треугольника является точка пересечения его медиан¹⁰⁾.

Теорема 6. *Центр тяжести нескольких плоских фигур является центром тяжести их центров тяжести, если считать, что в последних сосредоточены массы фигур.*

Доказательство аналогично доказательству теоремы 3.

Вторая теорема Гульдина. *Объем V тела, образованного вращением однородной плоской фигуры около некоторой, не пересекающей ее оси, равен площади S этой фигуры, умноженной на длину окружности радиуса R , описанной центром тяжести фигуры:*

$$V = S \cdot 2\pi R.$$

Доказательство. Совместим ось вращения с осью Oy и умножим обе части второго равенства в (12) на $2\pi S$:

$$S \cdot 2\pi c_y = \pi \int_a^b [f_2^2(x) - f_1^2(x)] dx.$$

Видим, что в правой части получился объем тела вращения, а в левой — произведение площади фигуры на длину окружности, которую описывает центр тяжести.

Пример 6. *Найти центр тяжести полукруга $x^2 + y^2 \leq R^2$.*

Решение. В силу симметрии полукруга относительно оси Oy получаем, что $c_x = 0$. Вращая полукруг вокруг оси абсцисс, получим сферу, объем которой равен $\frac{4}{3}\pi R^3$. По второй теореме Гульдина тот же объем равен $S \cdot 2\pi c_y$, где $S = \pi R^2/2$ — площадь

[†]Лекция «Геометрические приложения определенного интеграла».

полукруга. Следовательно, $\frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{\pi R^2}{2} \cdot 2\pi c_y$, $c_y = \frac{4}{3}\pi R^3 / (\pi^2 R^2) = \frac{4R}{3\pi}$. Таким образом, центром тяжести полукруга является точка

$$C \left(0; \frac{4R}{3\pi} \right).$$

Пример 7. Найти объем тора, рис. 3.

Решение. Центром тяжести круга, образующего тор при вращении, является, как было выяснено в примере 5, точка $(d; 0)$, а площадь этого круга равна $S = \pi R^2$. По второй теореме Гульдина

$$V = \pi R^2 \cdot 2\pi d = 2\pi^2 R^2 d.$$

5 Моменты инерции

Как известно, при поступательном движении мерой инертности тела является масса. Другими словами, согласно второму закону Ньютона, чем больше масса тела, тем большую силу надо приложить, чтобы сообщить ему заданное ускорение. Или можно сказать, чем больше масса тела, тем меньшее ускорение оно приобретет под действием одной и той же силы.

Аналогичную роль играет момент инерции во вращательном движении.

Моментом инерции I материальной точки массы m **относительно** некоторой **точки**, именуемой **полюсом**, называется произведение этой массы на квадрат расстояния d от нее до полюса: $I = md^2$. На плоскости **моментом инерции системы материальных точек** с массами m_1, m_2, \dots, m_n **относительно полюса**, называется сумма моментов инерции отдельных точек относительно полюса: $M = \sum_{i=1}^n m_i d_i^2$, где d_i — расстояние от i -й точки до полюса.

Аналогично определяются **моменты инерции точек относительно** некоторой **оси**; надо только считать d, d_1, \dots, d_n расстояниями от точек до оси.

Нетрудно видеть, что в случае, когда полюс служит началом координат, момент инерции точек (x_i, y_i) , $i = \overline{1, n}$, относительно полюса выражается формулой

$$I_O = \sum_{i=1}^n m_i (x_i^2 + y_i^2).$$

Моменты инерции I_x и I_y материальных точек относительно координатных осей Ox и Oy , соответственно, определяются равенствами

$$I_x = \sum_{i=1}^n m_i y_i^2, \quad I_y = \sum_{i=1}^n m_i x_i^2. \quad (13)$$

Мы видим, что

$$I_O = I_x + I_y. \quad (14)$$

Момент инерции кривой $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$, $t_0 \leq t \leq T$, расположенной на плоскости xOy , **относительно начала координат** можно найти по формуле

$$I_O = \int_{t_0}^T \gamma(t) [x^2(t) + y^2(t)] \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt,$$

где $\gamma(x)$ — линейная плотность кривой. Доказательство вполне аналогично доказательству формулы для статического момента плоской кривой.

Точно так же доказывается, что **момент инерции кривой**, заданной вектором $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$, $t_0 \leq t \leq T$, **относительно координатных осей** определяется равенствами

$$I_x = \int_{t_0}^T \gamma(t) y^2(t) \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt, \quad I_y = \int_{t_0}^T \gamma(t) x^2(t) \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt. \quad (15)$$

Если кривая задана явным уравнением $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, формулы для моментов инерции принимают вид

$$I_O = \int_a^b \gamma(t) [x^2 + f^2(x)] \sqrt{1 + f'^2(x)} dx, \\ I_x = \int_a^b \gamma(t) f^2(x) \sqrt{1 + f'^2(x)} dx, \quad I_y = \int_a^b \gamma(t) x^2 \sqrt{1 + f'^2(x)} dx. \quad (16)$$

Снова замечаем, что выполняется (14).

Пример 8. Найти моменты инерции четверти окружности радиуса R (рис. 5), линейная плотность которой равна 1.

Решение. Используем формулы (15), для чего зададим четверть окружности в параметрической форме $x = R \cos t$, $y = R \sin t$, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$. Получим

$$I_x = \int_0^{\pi/2} R^3 \sin^2 t dt = \frac{R^3}{2} \int_0^{\pi/2} (1 - \cos 2t) dt = \frac{R^3}{2} \left(t - \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi R^3}{4}.$$

В силу симметрии $I_y = I_x = \frac{\pi R^3}{4}$, а $I_O = I_x + I_y = \frac{\pi R^3}{2}$. □

Моменты инерции плоской фигуры, изображенной на рис. 4, выражаются формулами¹¹⁾

$$I_x = \frac{1}{3} \int_a^b [f_2^3(x) - f_1^3(x)] dx, \quad I_y = \int_a^b x^2 [f_2(x) - f_1(x)] dx, \quad (17)$$

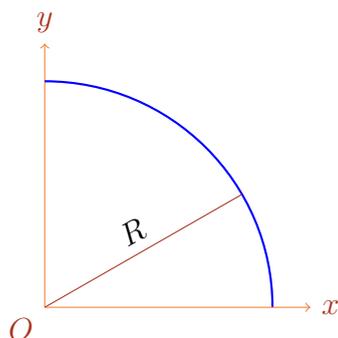


Рис. 5. К примеру 8.

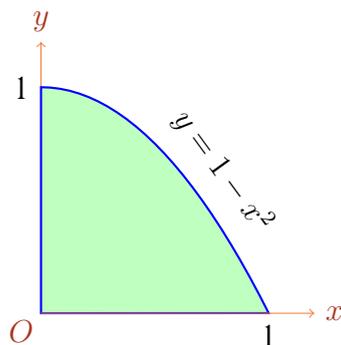


Рис. 6. К примеру 9.

$$I_O = \int_a^b \left\{ x^2 [f_2(x) - f_1(x)] + \frac{f_2^3(x) - f_1^3(x)}{3} \right\} dx. \quad (18)$$

И в этом случае справедливо (14).

Пример 9. Найти моменты инерции фигуры, изображенной на рис. 6, поверхностная плотность которой равна 1.

Решение. В данном случае $f_1(x) \equiv 0$, $f_2(x) = 1 - x^2$, поэтому применяя формулы (17), получаем

$$\begin{aligned} I_x &= \frac{1}{3} \int_0^1 (1 - x^2)^3 dx = \frac{1}{3} \int_0^1 (1 - 3x^2 + 3x^4 - x^6) dx = \\ &= \frac{1}{3} \left(x - x^3 + \frac{3}{5} x^5 - \frac{1}{7} x^7 \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{3} \left(\frac{3}{5} - \frac{1}{7} \right) = \frac{16}{105}, \\ I_y &= \int_0^1 x^2 (1 - x^2) dx = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \right) \Big|_0^1 = \frac{2}{15}, \\ I_O &= I_x + I_y = \frac{16}{105} + \frac{2}{15} = \frac{2}{7}. \end{aligned}$$

□

С другими применениями определенного интеграла мы встретимся при дальнейшем изучении курса высшей математики.

Приложение

1) Выполним преобразование интеграла, стоящего в левых частях равенств:

$$\begin{aligned} \int_{-a}^a f(x) dx &= \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx = \langle u = -x, du = -dx \rangle = \\ &= - \int_a^0 f(-u) du + \int_0^a f(x) dx = \int_0^a f(-x) dx + \int_0^a f(x) dx. \end{aligned}$$

Если $f(x)$ нечетна, то $f(-x) = -f(x)$, и мы получаем равенство (1). Если же $f(x)$ четна, то $f(-x) = f(x)$, и мы приходим к равенству (2).

Рис. 7 иллюстрирует лемму. Если функция нечетна, то соответствующие ей криволинейные трапеции для отрезков $[-a; 0]$ и $[0; a]$ имеют одинаковые площади, но эти площади следует брать с противоположными знаками, так что в сумме получается 0. Для четной функции площадь криволинейной трапеции для отрезка $[-a, a]$ равна удвоенной площади криволинейной трапеции для отрезка $[0, a]$.

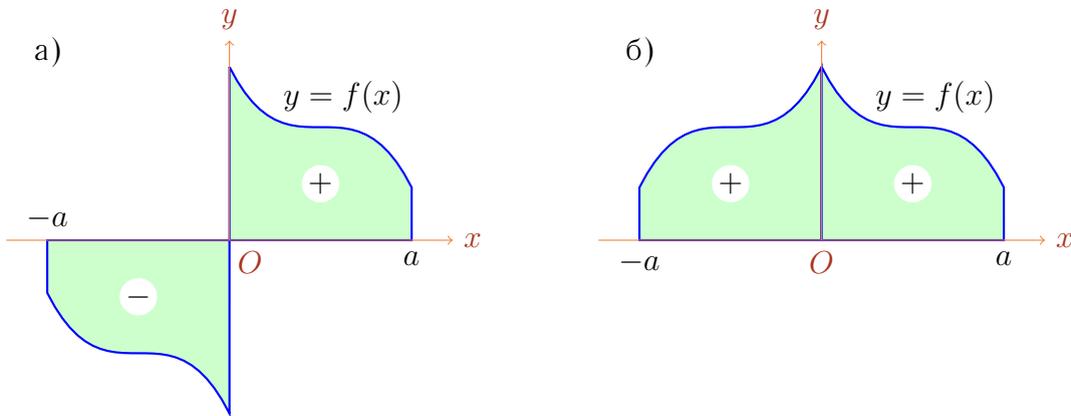


Рис. 7. Интегрирование а) нечетной и б) четной функций.

2) Разобьем отрезок $[t_0, T]$ произвольным образом на части точками $t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = T$, которым на кривой будут отвечать точки $A_0 = A, A_1, \dots, A_{n-1}, A_n = B$ и на каждом частичном отрезке $[t_{i-1}, t_i]$ произвольным образом выберем точки τ_i . В дальнейшем будем такое разбиение называть **интегральным** с точками t_i и τ_i . При достаточно малой длине дуги $A_{i-1}A_i$ действие силы на ней можно приближенно принять постоянным и равным ее значению $\mathbf{F}(\tau_i)$, $t_{i-1} \leq \tau_i \leq t_i$. Кроме того, движение вдоль этой дуги можно приближенно заменить движением вдоль вектора $\mathbf{A}_{i-1}A_i$, рис. 8. В результате работа силы вдоль дуги $A_{i-1}A_i$ кривой выразится приближенной зависимостью

$$A_i \approx \mathbf{F}(\tau_i) \mathbf{A}_{i-1}A_i = F_1(\tau_i) \Delta x_i + F_2(\tau_i) \Delta y_i + F_3(\tau_i) \Delta z_i, \quad (\text{П1})$$

где $\Delta x_i = x(t_i) - x(t_{i-1})$, $\Delta y_i = y(t_i) - y(t_{i-1})$, $\Delta z_i = z(t_i) - z(t_{i-1})$. Применяя к этим разностям теорему Лагранжа, запишем их в виде $\Delta x_i = x'(\theta_{i,1}) \Delta t_i$, $\Delta y_i = y'(\theta_{i,2}) \Delta t_i$, $\Delta z_i = z'(\theta_{i,3}) \Delta t_i$, где $\theta_{i,1}, \theta_{i,2}, \theta_{i,3} \in (t_{i-1}, t_i)$, $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$. Подставим все это в формулу (П1):

$$A_i \approx [F_1(\tau_i) x'(\theta_{i,1}) + F_2(\tau_i) y'(\theta_{i,2}) + F_3(\tau_i) z'(\theta_{i,3})] \Delta t_i.$$

При малой длине дуги $A_{i-1}A_i$ выполняется $\theta_{i,1} \approx \tau_i$, $\theta_{i,2} \approx \tau_i$, $\theta_{i,3} \approx \tau_i$, поэтому

$$A_i \approx [F_1(\tau_i) x'(\tau_i) + F_2(\tau_i) y'(\tau_i) + F_3(\tau_i) z'(\tau_i)] \Delta t_i = \mathbf{F}(\tau_i) \mathbf{r}'(\tau_i) \Delta t_i.$$

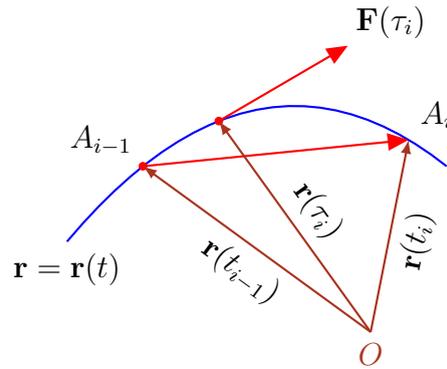


Рис. 8. Работа переменной силы вдоль кривой.

Вся же работа вдоль кривой \mathcal{AB} приближенно равна сумме таких работ:

$$A \approx \sum_{i=1}^n \mathbf{F}(\tau_i) \mathbf{r}'(\tau_i) \Delta t_i.$$

Переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$ и $\max_i \Delta t_i \rightarrow 0$, получим точное значение работы (3).

3) Вот этот

Пример П1. Найти работу силы, являющейся равнодействующей всех приложенных к материальной точке сил.

Решение. Для такой силы справедлив второй закон Ньютона $\mathbf{F}(t) = m\mathbf{a}(t) = m\mathbf{v}'(t)$, где $\mathbf{a}(t) = \mathbf{v}'(t) = \mathbf{r}''(t)$ — ускорение, а $\mathbf{v}(t) = (v_1(t), v_2(t), v_3(t))^T = \mathbf{r}'(t)$ — скорость точки в момент времени t . Следовательно, в соответствии с формулой (3) работа силы равна

$$\begin{aligned} A &= m \int_{t_0}^T \mathbf{v}'(t) \mathbf{v}(t) dt = m \int_{t_0}^T \sum_{k=1}^3 v'_k(t) v_k(t) dt = m \sum_{k=1}^3 \int_{t_0}^T v'_k(t) v_k(t) dt = \\ &= m \sum_{k=1}^3 \int_{t_0}^T v_k dv_k = \frac{m}{2} \sum_{k=1}^3 v_k^2 \Big|_{t_0}^T = \frac{m\mathbf{v}^2}{2} \Big|_{t_0}^T = \frac{m\mathbf{v}^2(T)}{2} - \frac{m\mathbf{v}^2(t_0)}{2}. \end{aligned}$$

Как известно, $m\mathbf{v}^2/2$ — кинетическая энергия материальной точки. Используя это понятие, полученный результат можно сформулировать так: *работа силы по перемещению точки вдоль пути \mathcal{AB} , равна приращению кинетической энергии точки на этом пути.* \square

4) отождествим стержень с отрезком $[a, b]$ оси абсцисс и положим $\gamma = \gamma(x)$. Выполним интегральное разбиение отрезка $[a, b]$ с точками x_i и c_i . Приближенно можно считать, что на каждом таком отрезке линейная плотность постоянна и равна $\gamma(c_i)$. Тогда масса части стержня $[x_{i-1}, x_i]$ приближенно равна $m_i = \gamma(c_i) \Delta x_i$, где $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, а масса всего стержня

$$m \approx \sum_{i=1}^n \gamma(c_i) \Delta x_i.$$

Переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$ и $\max_i \Delta x_i \rightarrow 0$, получим точное значение массы стержня (4).

5) Произведем интегральное разбиение отрезка $[t_0, T]$ с точками t_i и τ_i и будем приближенно считать на отрезке $[t_{i-1}, t_i]$ линейную плотность постоянной, равной $\gamma(\tau_i)$, а дугу $\mathcal{A}_{i-1}\mathcal{A}_i$

заменяем отрезком $A_{i-1}A_i$. Тогда масса части стержня $A_{i-1}A_i$ будет приближенно равна (см. обозначения при выводе формулы работы)

$$\begin{aligned} m_i &\approx \gamma(\tau_i) A_{i-1}A_i = \gamma(\tau_i) \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2 + \Delta z_i^2} = \\ &= \gamma(\tau_i) \sqrt{x'^2(\theta_{i,1}) + y'^2(\theta_{i,2}) + z'^2(\theta_{i,3})} \Delta t_i \approx \\ &\approx \gamma(\tau_i) \sqrt{x'^2(\tau_i) + y'^2(\tau_i) + z'^2(\tau_i)} \Delta t_i. \end{aligned}$$

Отсюда и следует формула (5).

6) Выполним интегральное разбиение отрезка $[t_0, T]$ с точками t_i и τ_i и каждую дугу $A_{i-1}A_i$ кривой станем считать в некотором роде материальной точкой массы $\gamma(\tau_i) A_{i-1}A_i$, находящейся на расстоянии $x(\tau_i)$ от оси ординат и на расстоянии $y(\tau_i)$ от оси абсцисс. Приближенно статический момент кривой относительно оси Ox выразится формулой (выкладки аналогичны предыдущим)

$$M_x \approx \sum_{i=1}^n \gamma(\tau_i) A_{i-1}A_i y(\tau_i) = \sum_{i=1}^n \gamma(\tau_i) y(\tau_i) \sqrt{x'^2(\tau_i) + y'^2(\tau_i)} \Delta t_i,$$

что и дает после предельного перехода первую из формул (8). Вторая доказывается аналогично.

7) Пусть кривые заданы векторами $\mathbf{r}_j(t)$, $t_{0,j} \leq t_j \leq T_j$, $j = \overline{1, k}$, а их статические моменты относительно оси абсцисс равны, соответственно, $M_{x,1}, \dots, M_{x,k}$. Зададим в параметрической форме $\mathbf{r}(t)$ кривую, состоящую из этих кривых, положив, что параметр t поочередно пробегает отрезки $[t_{0,j}, T_j]$, $j = \overline{1, k}$, а вектор $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_j(t)$ на этих отрезках. Тогда в силу аддитивности определенного интеграла статический момент M_x для кривой $\mathbf{r}(t)$, вычисляемый по первой из формул (8), будет равен сумме моментов $M_{x,1}, \dots, M_{x,k}$. Доказательство для M_y аналогично.

8) Рассмотрим кривые, введенные при доказательстве теоремы 2. Пусть $(c_{x,i}, c_{y,i})$ — их центры тяжести. Сосредоточим в точке $(c_{x,i}, c_{y,i})$ массу i -й кривой m_i . По первой из формул (7) центром тяжести этих точек будет точка с абсциссой

$$c_x = \frac{\sum_{i=1}^k c_{x,i} m_i}{m},$$

где $m = m_1 + \dots + m_k$. Но по упомянутой теореме

$$c_x = \frac{\sum_{i=1}^k c_{x,i} m_i}{m} = \frac{\sum_{i=1}^k \frac{M_{y,i}}{m_i} m_i}{m} = \frac{\sum_{i=1}^k M_{y,i}}{m} = \frac{M_y}{m},$$

где $M_{x,i}$ — статический момент i -й кривой, M_x — статический момент всей совокупности кривых. Так что c_x есть и абсциссой центра тяжести совокупности кривых. Аналогичное равенство справедливо для ординаты центра тяжести.

9) Произведем интегральное разбиение отрезка $[a, b]$ с точками x_i и c_i . Часть фигуры, расположенной над отрезком $[x_{i-1}, x_i]$ приближенно можно считать стержнем длины $f_2(c_i) - f_1(c_i)$, центр тяжести которого, как мы установили, совпадает с его серединой $[f_1(c_i) + f_2(c_i)]/2$, рис. 9. В центре тяжести (по определению последнего) статический момент стержня равен статическому моменту самого центра тяжести, имеющему массу стержня m . Но масса однородного стержня с $\gamma = 1$ равна его площади $[f_2(c_i) - f_1(c_i)] \Delta x_i$, где $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Следовательно, статический момент стержня относительно оси абсцисс будет приближенно равен

$$M_{x,i} \approx \frac{f_2(c_i) + f_1(c_i)}{2} [f_2(c_i) - f_1(c_i)] \Delta x_i = \frac{f_2^2(c_i) - f_1^2(c_i)}{2} \Delta x_i,$$

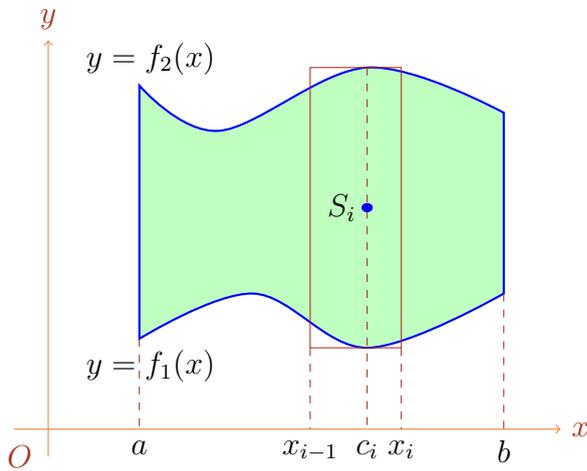


Рис. 9. $S_i \left(c_i, \frac{f_1(c_i)+f_2(c_i)}{2} \right)$.

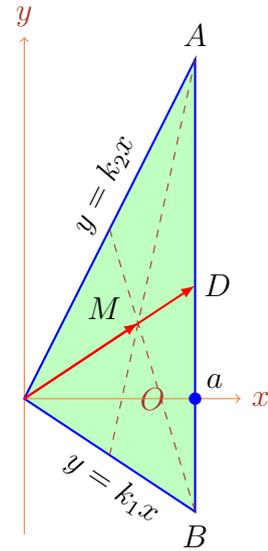


Рис. 10.

а для статического момента относительно оси ординат будем иметь

$$M_{y,i} \approx c_i [f_2(c_i) - f_1(c_i)] \Delta x_i.$$

Суммируя по всем отрезкам $[x_{i-1}, x_i]$ и переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$ и $\max_i \Delta x_i \rightarrow 0$, получим формулы (11).

¹⁰⁾ Расположим треугольник на координатной плоскости так, чтобы его вершина находилась в начале координат, а противоположная сторона была параллельна оси ординат (рис. 10). Пусть две другие стороны имеют уравнения $y = k_1x$ и $y = k_2x$, $k_2 > k_1$. Найдем площадь треугольника

$$S = \int_0^a (k_2x - k_1x) dx = (k_2 - k_1) \frac{x^2}{2} \Big|_0^a = \frac{k_2 - k_1}{2} a^2.$$

По формулам (12) вычислим координаты центра тяжести:

$$c_x = \frac{1}{S} \int_0^a x (k_2x - k_1x) dx = \frac{2(k_2 - k_1)}{(k_2 - k_1)a^2} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^a = \frac{2}{3} a,$$

$$c_y = \frac{1}{2S} \int_0^a (k_2^2x^2 - k_1^2x^2) dx = \frac{k_2^2 - k_1^2}{(k_2 - k_1)a^2} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^a = \frac{k_1 + k_2}{3} a.$$

Покажем, что такие же координаты имеет точка пересечения медиан. Действительно, серединой стороны AB является точка $D \left(a, \frac{k_1+k_2}{2} a \right)$. Радиус-вектор точки пересечения медиан OM связан с вектором OD равенством $OM = \frac{2}{3} OD = \left(\frac{2}{3} a, \frac{k_1+k_2}{3} a \right)$. Значит, такие же координаты имеет и точка M — точка пересечения медиан.

¹¹⁾ Сначала решим следующий

Пример П2. Найти моменты инерции однородного стержня, расположенного параллельно координатной оси.

Решение. Пусть стержень параллелен оси абсцисс: $y = c = \text{const} > 0$, $0 < a \leq x \leq b$, рис. 11, а). Так как он однороден, полагаем $\gamma(x) = \bar{\gamma} \equiv \text{const}$. Далее из формул (16) находим

$$I_x = \bar{\gamma} \int_a^b c^2 dx = \bar{\gamma} c^2 (b - a), \quad I_y = \bar{\gamma} \int_a^b x^2 dx = \bar{\gamma} \frac{x^3}{3} \Big|_a^b = \bar{\gamma} \frac{b^3 - a^3}{3},$$

$$I_O = I_x + I_y = \bar{\gamma} \left[c^2 (b - a) + \frac{b^3 - a^3}{3} \right].$$

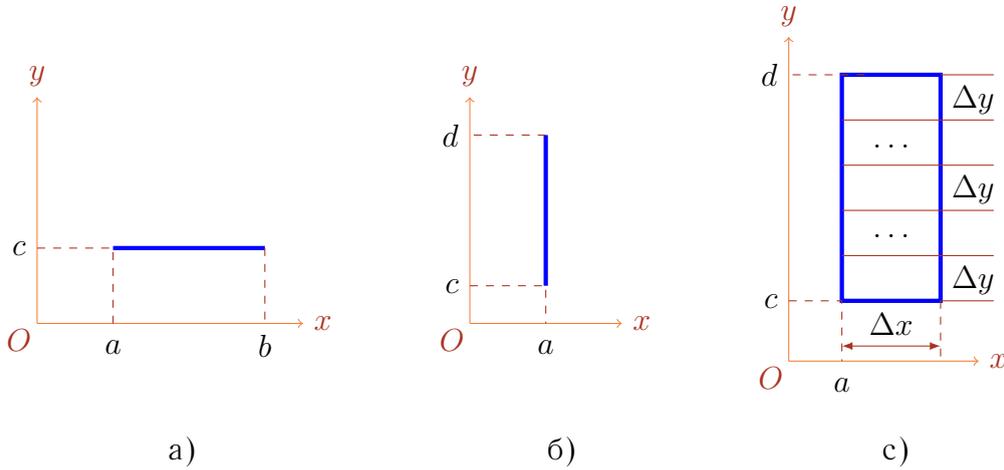


Рис. 11. К моментам инерции стержней и прямоугольника.

В случае параллельности стержня оси ординат: $x = a = \text{const} > 0$, $0 < c \leq y \leq d$, рис. 11, б), из соображений симметрии следует, что

$$I_x = \bar{\gamma} \frac{d^3 - c^3}{3}, \quad I_y = \bar{\gamma} a^2 (d - c), \quad I_O = \bar{\gamma} \left[a^2 (d - c) + \frac{d^3 - c^3}{3} \right].$$

□

Чтобы перейти к моментам инерции плоской фигуры, сначала найдем приближенно моменты инерции однородного прямоугольника $a \leq x \leq a + \Delta x$, $c \leq y \leq d$, рис. 11, с), с поверхностной плотностью $\gamma \equiv 1$. Для этого разобьем прямоугольник на k более мелких прямоугольников со сторонами Δx и $\Delta y = (d - c)/k$. Будем считать, что последние величины настолько малы, что малые прямоугольники можно заменить материальными точками с координатами $(a, c + j\Delta y)$, $j = \overline{1, k}$, и массой, равной $\Delta x \Delta y$, в силу того, что $\gamma \equiv 1$.

Обозначив $(\Delta y)^r = \Delta y^r$ и учитывая, что $k\Delta y = d - c$, из формул (13) получим

$$I_x \approx \sum_{j=1}^k (c + j\Delta y)^2 \Delta x \Delta y = \Delta x \sum_{j=1}^k (c^2 \Delta y + 2jc\Delta y^2 + j^2 \Delta y^3) =$$

$$= \left(c^2 k \Delta y + 2c \frac{k(k+1)}{2} \Delta y^2 + \frac{k(2k^2 + 3k + 1)}{6} \Delta y^3 \right) \Delta x = \quad (\text{П2})$$

$$= \left[c^2 (d - c) + c(d - c)^2 + c(d - c) \Delta y + \frac{1}{3} (d - c)^3 + \frac{1}{2} (d - c)^2 \Delta y + \frac{1}{6} (d - c) \Delta y^2 \right] \Delta x,$$

$$I_y \approx \sum_{j=1}^k a^2 \Delta x \Delta y = a^2 \Delta x \sum_{j=1}^k \Delta y = a^2 (d - c) \Delta x. \quad (\text{П3})$$

Здесь были использованы равенства

$$\sum_{j=1}^k 1 = k, \quad \sum_{j=1}^k j = \frac{k(k+1)}{2}, \quad \sum_{j=1}^k j^2 = \frac{k(2k^2 + 3k + 1)}{6}, \quad (\text{П4})$$

первое из которых очевидно, второе является формулой суммы арифметической прогрессии, а третье докажем методом математической индукции. При $k = 1$ третье равенство, очевидно, справедливо. Предполагая его справедливость при некотором $k \geq 1$, докажем его справедливость при $k + 1$. Найдем

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{k+1} j^2 &= \sum_{j=1}^k j^2 + (k+1)^2 = \frac{k(2k^2 + 3k + 1)}{6} + (k+1)^2 = \\ &= \frac{k(k+1)(2k+1) + 6(k+1)^2}{6} = \frac{(k+1)[k(2k+1) + 6(k+1)]}{6} = \\ &= \frac{(k+1)(2k^2 + 7k + 6)}{6}. \end{aligned}$$

Но это и есть третья из формул (П4) при k , увеличенном на единицу.

Пренебрегая в равенствах (П2), (П3) слагаемыми (в силу их малости), содержащими произведения Δx на Δy и Δy^2 , придем к следующим приближенным выражениям

$$I_x \approx (d-c) \frac{c^2 + cd + d^2}{3} \Delta x = \frac{d^3 - c^3}{3} \Delta x, \quad I_y \approx a^2 (d-c) \Delta x.$$

Отсюда следует, что

$$I_O \approx \left[a^2 (d-c) + \frac{d^3 - c^3}{3} \right] \Delta x.$$

Мы видим, что моменты инерции однородного «узкого» прямоугольника приближенно равны соответствующим моментам стержня, умноженным на «ширину» прямоугольника.

Найдем теперь моменты инерции фигуры, изображенной на рис. 9, предполагая, что ее поверхностная плотность равна 1. Произведем интегральное разбиение отрезка $[a, b]$ с точками x_i и $c_i = x_{i-1}$. Часть фигуры, расположенной над отрезком $[x_{i-1}, x_i]$, приближенно можно считать прямоугольником со сторонами Δx_i и $f_2(c_i) - f_1(c_i)$. Используя найденные формулы приближенного вычисления моментов инерции такого прямоугольника, для i -го прямоугольника получим

$$\begin{aligned} I_{x,i} &= \frac{f_2^3(c_i) - f_1^3(c_i)}{3} \Delta x_i, \quad I_{y,i} = c_i^2 [f_2(c_i) - f_1(c_i)] \Delta x_i, \\ I_{O,i} &= \left\{ c_i^2 [f_2(c_i) - f_1(c_i)] + \frac{f_2^3(c_i) - f_1^3(c_i)}{3} \right\} \Delta x_i. \end{aligned}$$

Переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$ и $\max_i \Delta x_i \rightarrow 0$, получим точные значения моментов инерции плоской фигуры (17), (18).

Литература

- [1] Письменный Д.Т. *Конспект лекций по высшей математике*. — М.: Рольф, 2000. Ч. 1. — с. 249-254, 245-248.