Несобственные интегралы

Волченко Ю.М.

Содержание лекции

Понятие несобственного интеграла с бесконечными пределами. Несобственный интеграл от разрывной функции. Сходимость интегралов. Сходимость абсолютная и условная. Теоремы сравнения. Замена переменной и интегрирование по частям для несобственных интегралов.

Анимация сходимости и расходимости несобственных интегралов.
Анимация работает только в программе Acrobat Reader!

Вычисление несобственных интегралов в системе *Mathematica*.

4 апреля 2014 г.

Мы видели, что использование понятия бесконечности в дифференциальном исчислении приводит к весьма полезным результатам: мы могли исследовать поведение функции при неограниченном уменьшении или увеличении ее аргумента, находить асимптоты ее графика. С помощью предела при $x \to \infty$ мы пришли к числу e, роль которого в высшей математике трудно переоценить.

Развивая понятие определенного интеграла, математики и его в конце концов снабдили бесконечностью. Где же последняя может появиться в интеграле? Только в пределах интегрирования и в подынтегральной функции — ничего больше определенный интеграл не содержит. Значит, разрешив подынтегральной функции иметь точки разрыва II рода, а пределам интегрирования принимать бесконечные значения, мы и введем бесконечность в конструкцию интеграла.

Что же мы получим? Просто экзотические интегралы или новый инструмент для инженерной работы? Оказывается, как раз для вашей специальности такие интегралы имеют огромное значение. Без них определение частотных характеристик сигналов, получение спектральных плотностей, применение операционного исчисления для исследования линейных систем и многое другое попросту невозможны.

Итак, ***несобственным*** называется определенный интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$, для которого выполняется хотя бы одно из двух условий: 1) промежуток интегрирования $[a,b]$ бесконечен, 2) подынтегральная функция имеет точки разрыва II рода. Обычный определенный интеграл на конечном отрезке $[a,b]$ с интегрируемой на нем подынтегральной функцией теперь будем называть ***собственным***.

1 Интегралы с бесконечными пределами

1.1 Сходимость и расходимость

Пусть функция $f\left(x\right)$ на промежутке $[a,\infty)$ определена и интегрируема на каждом отрезке $[a,b]$, $a<b<\infty$. ***Несобственным интегралом с бесконечным верхним пределом*** называется величина

$$\int_a^\infty f\left(x\right)\,dx \triangleq \lim_{b\to\infty}\int_a^b f\left(x\right)\,dx. \tag{1}$$

Пусть функция $f\left(x\right)$ на промежутке $(-\infty,b]$ определена и интегрируема на каждом отрезке $[a,b]$, $-\infty<a<b$. ***Несобственным интегралом с бесконечным нижним пределом*** называется величина

$$\int_{-\infty}^b f\left(x\right)\,dx \triangleq \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f\left(x\right)\,dx. \tag{2}$$

Если предел (1) или (2) существует и конечен, то говорят, что соответствующий интеграл ***сходится***. Если предел не существует или бесконечен, говорят, что несобственный интеграл ***расходится***.

Если функция $f\left(x\right)$ определена на всей числовой оси и интегрируема на каждом отрезке $[a,b]$, $-\infty<a<b<\infty$, то ***несобственным интегралом с бесконечными пределами*** называется сумма

$$\int_{-\infty}^\infty f\left(x\right)\,dx \triangleq \int_{-\infty}^c f\left(x\right)\,dx + \int_c^\infty f\left(x\right)\,dx.$$

Этот интеграл ***сходится***, если сходятся оба интеграла в правой части равенства, и ***расходится***, если расходится хотя бы один из них.

Пример 1. *Исследовать на сходимость интеграл* $(a>0)$

$$\int_a^\infty \frac{dx}{x^p}\,dx.$$

Решение. В зависимости от значения параметра p получим два различных выражения для заданного интеграла:

$$\int_a^\infty \frac{dx}{x^p}\,dx = \begin{cases} \lim\limits_{b\to\infty} \ln|x|\Big|_a^b, & p = 1; \\ \lim\limits_{b\to\infty} \dfrac{1}{(1-p)\,x^{p-1}}\Bigg|_a^b, & p \neq 1. \end{cases}$$

Они свидетельствуют, что при $p \le 1$ интеграл расходится, а при $p > 1$ сходится и имеет конечное значение

$$\frac{1}{(p-1)\,a^{p-1}}.$$

□

Анимация рис. 1 демонстрирует сходимость интегралов вида $\int_a^\infty f(x)\,dx$. Если интеграл сходится, площадь криволинейной трапеции (отмечена зеленым цветом), которая выражается интегралом $\int_a^b f(x)\,dx$ с переменным верхним пределом b, при $b \to \infty$ стремится к некоторому числу (в первом клипе к $1/2$), что́ демонстрирует соседний график; если же интеграл расходится, площадь неограниченно увеличивается. Так как рис. состоит из двух клипов, то мышкой на нем надо щелкать дважды.

Клип 1: сходимость

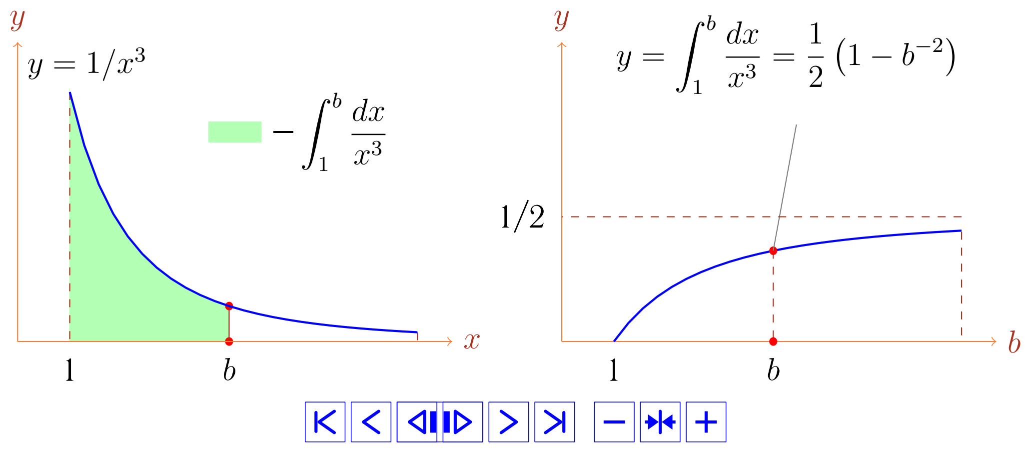


Рис. 1. Сходимость и расходимость интеграла с бесконечным верхним пределом.

Пример 2. *Найти площадь криволинейной трапеции, ограниченной кривой*

$$y = \frac{1}{1+x^2}$$

и осью Ox, рис. 2.

Решение. Можно вычислять несобственные интегралы, не записывая в явном виде символ lim, но при подстановке вместо x бесконечностей иметь в виду, что это на самом деле не подстановка, а переход к пределу:

$$S = \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx = \int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+x^2}\,dx + \int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx =$$

$$= \operatorname{arctg} x\Big|_{-\infty}^{0} + \operatorname{arctg} x\Big|_{0}^{\infty} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

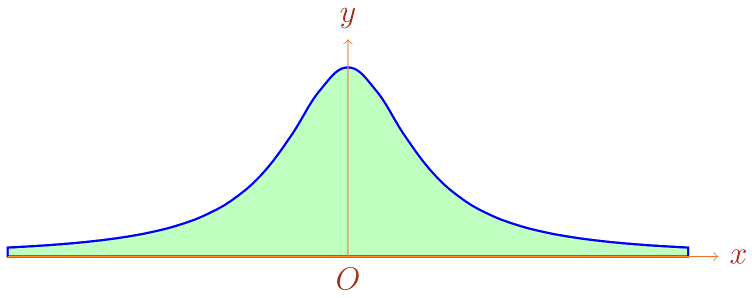


Рис. 2. К примеру 2.

1.2 Теоремы сравнения

Теорема 1. *Если при $x \geq A \geq a$ выполняется*

$$0 \leq f(x) \leq g(x), \tag{3}$$

то из сходимости интеграла $\int_a^\infty g(x)\ dx$ следует сходимость интеграла $\int_a^\infty f(x)\ dx$. Если же интеграл $\int_a^\infty f(x)\ dx$ расходится, то расходится и интеграл $\int_a^\infty g(x)\ dx$.

Доказательство. Так как для любой функции $h(x)$

$$\int_a^\infty h(x)\ dx = \int_a^A h(x)\ dx + \int_A^\infty h(x)\ dx$$

и первый интеграл в правой части собственный, то для выяснения вопросов сходимости достаточно рассмотреть второй интеграл.

Пусть интеграл $\int_a^\infty g(x)\ dx$ сходится и его значение равно I_g. В силу (3)

$$\int_A^b f(x)\ dx \leq \int_A^b g(x)\ dx \leq \int_A^\infty g(x)\ dx = I_g.$$

Поскольку $f(x) \geq 0$, то при возрастании b интеграл $\int_A^b f(x)\ dx$ тоже возрастает и ограничен сверху числом I_g, следовательно, при $b \to \infty$ этот интеграл имеет конечный предел, т. е. сходится.

Пусть интеграл $\int_A^\infty f(x)\ dx$ расходится. Тогда $\int_A^b f(x)\ dx$ при $b \to \infty$ неограниченно возрастает и выполняется неравенство $\int_A^b f(x)\ dx \leq \int_A^b g(x)\ dx$. Значит, интеграл $\int_A^b g(x)\ dx$ тоже неограниченно возрастает и тоже расходится. $\square$

Теорема справедлива также для интегралов вида $\int_{-\infty}^{b} f(x)\ dx$ и $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ dx$.

Пример 3. *Исследовать сходимость интеграла Пуассона*

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx.$$

Решение. Разобьем данный интеграл на сумму двух интегралов:

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \int_0^1 e^{-x^2} dx + \int_1^\infty e^{-x^2} dx. \tag{4}$$

Первый интеграл собственный и, следовательно, конечен. Для выяснения сходимости второго отметим, что для промежутка $[1;\infty)$ справедливо неравенство

$$e^{-x^2} = \frac{1}{e^{x^2}} \le \frac{1}{e^x} = e^{-x}.$$

Но интеграл от e^{-x} сходится, так как

$$\int_1^\infty e^{-x}\, dx = \left. -e^{-x} \right|_1^\infty = \frac{1}{e}$$

Тогда сходится и интеграл $\int_1^\infty e^{-x^2} dx$, а, значит, в силу (4) и интеграл $\int_0^\infty e^{-x^2} dx$.

Следствие 1. *Пусть для достаточно больших x функция $f(x)$ имеет вид*

$$f(x) = \frac{\varphi(x)}{x^p},\ p > 0.$$

Тогда: 1) если $p > 1$ и $0 \le \varphi(x) \le c < \infty$, то $\int_a^\infty f(x)\ dx$ сходится; 2) если $p \le 1$ и $\varphi(x) \ge c > 0$, то интеграл расходится.

Доказательство приведено в Приложении[1)].

Пример 4. *Исследовать на сходимость интеграл*

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}.$$

Решение. Для промежутка $[1;\infty)$ справедливо неравенство

$$\frac{1}{x\sqrt{1+x^2}} \le \frac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}} = \frac{1/\sqrt{1+x^{-2}}}{x^3} = \frac{\varphi(x)}{x^3},$$

где

$$\varphi(x) = 1/\sqrt{1+x^{-2}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} \le 1.$$

Так как $p = 3 > 1$, то заданный интеграл сходится.

Теорема 2. *Если функции $f(x)$ и $g(x)$ положительны и существует предел*

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=K,\ 0<K<\infty,$$

то интегралы

$$\int_a^\infty f(x)\,dx \text{ и } \int_a^\infty g(x)\,dx$$

сходятся или расходятся одновременно.

Доказательство см. в Приложении[2)].

Пример 5. *Исследовать сходимость интеграла*

$$\int_1^\infty \frac{x^2+1}{x^4}\,dx.$$

Решение. Интеграл $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$ сходится и

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^4}:\frac{1}{x^2}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{x^2}=1,$$

следовательно, сходится и заданный интеграл.

1.3 Абсолютная и условная сходимости

Теорема 3. *Если интеграл $\int_a^\infty |f(x)|\,dx$ сходится, то сходится и интеграл $\int_a^\infty f(x)\,dx$.*

Доказательство см. в Приложении[3)].

Если интеграл $\int_a^\infty |f(x)|\,dx$ сходится, то говорят, что интеграл $\int_a^\infty f(x)\,dx$ ***сходится абсолютно***. Если же $\int_a^\infty f(x)\,dx$ сходится, а $\int_a^\infty |f(x)|\,dx$ расходится, то говорят, что интеграл $\int_a^\infty f(x)\,dx$ ***сходится условно***.

Пример 6. *Исследовать на сходимость интеграл*

$$\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^2}\,dx.$$

Решение. Так как

$$\left|\frac{\sin x}{x^2}\right|\le\frac{1}{x^2}$$

и интеграл $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$ сходится, то сходится интеграл $\int_1^\infty \left|\frac{\sin x}{x^2}\right|\,dx$, а с ним — и заданный интеграл, причем, абсолютно.

1.4 Интегрирование подстановкой и по частям

Применение этих методов интегрирования рассмотрим на примере.

Пример 7. *Исследовать на сходимость интеграл*

$$\int_a^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx.$$

Решение. Применим интегрирование по частям:

$$\int_a^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \left\langle u = 1/x,\ dv = \sin x\,dx,\ du = -dx/x^2,\ v = -\cos x\right\rangle =$$
$$= -\frac{\cos x}{x}\Big|_a^\infty - \int_a^\infty \frac{\cos x}{x^2}\,dx = \frac{\cos a}{a} - \int_a^\infty \frac{\cos x}{x^2}\,dx.$$

Но последний интеграл сходится, поскольку

$$\frac{\cos x}{x^2} \le \frac{|\cos x|}{x^2} \le \frac{1}{x^2}$$

и интеграл $\int_a^\infty \frac{dx}{x^2}$ сходится. Значит, интеграл $\int_a^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$ сходится. Сходится ли он абсолютно? Для выяснения этого вопроса рассмотрим интеграл

$$\int_a^\infty \frac{|\sin x|}{x}\,dx \ge \int_a^\infty \frac{\sin^2 x}{x}\,dx = \int_a^\infty \frac{1-\cos 2x}{2x}\,dx =$$
$$= \frac{1}{2}\int_a^\infty \frac{dx}{x} - \frac{1}{2}\int_a^\infty \frac{\cos 2x}{x}\,dx.$$

Интеграл $\int_a^\infty \frac{dx}{x}$ расходится, и поэтому интеграл $\int_a^\infty \frac{|\sin x|}{x}\,dx$ тоже расходится. Следовательно, интеграл $\int_a^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$ сходится условно.

2 Несобственный интеграл от разрывной функции

2.1 Сходимость и расходимость

Пусть функция $f(x)$ непрерывна в каждом интервале $[a,c)$, $a < c < b < \infty$, и имеет разрыв II рода при $x = b$. Тогда предел,

$$\int_a^b f(x)\,dx \triangleq \lim_{c\to b-0}\int_a^c f(x)\,dx,$$

если он существует, называется ***несобственным интегралом от разрывной функции***.

Аналогично, если функция $f(x)$ непрерывна в каждом интервале $(c,b]$, $-\infty < a < c < b$, и имеет разрыв II рода при $x = a$, то таким интегралом называется предел

$$\int_a^b f(x)\,dx \triangleq \lim_{c\to a+0}\int_c^b f(x)\,dx. \tag{5}$$

Если рассмотренные пределы существуют, то говорят, что несобственные интегралы ***сходятся***, в противном случае говорят, что они ***расходятся***.

Наконец, если функция $f(x)$ непрерывна в интервале $(a, b]$ и имеет разрывы II рода и при $x = a$, и при $x = b$, то интеграл

$$\int_a^b f(x)\,dx \triangleq \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx,$$

$a < c < b$, тоже называется ***несобственным интегралом от разрывной функции***. Считают, что этот интеграл ***сходится***, если сходятся оба интеграла в правой части равенства. Если же хотя бы один из интегралов в правой части расходится, то говорят, что и интеграл в левой части ***расходится***.

Пример 8. *Исследовать на сходимость интеграл*

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^p}.$$

Решение. Вычисление интеграла разветвляется в зависимости от значения p:

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^p} = \begin{cases} \lim_{c\to a+0} \ln|x-a|\Big|_c^b, & p = 1; \\ \lim_{c\to a+0} \frac{1}{(1-p)(x-a)^{p-1}}\Big|_c^b, & p \neq 1; \end{cases} = \begin{cases} -\infty, & p \geq 1; \\ \frac{(b-a)^{1-p}}{1-p}, & p < 1. \end{cases}$$

Таким образом, при $p < 1$ интеграл сходится, а при $p \geq 1$ он расходится.

То же самое относится к интегралу

$$\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^p}.$$

□

На анимационном рис. 3 проиллюстрирована сходимость интеграла вида $\int_0^1 f(x)\,dx$ для подынтегральной функции, имеющей разрыв II рода в нуле. Если такой интеграл сходится, площадь $\int_c^1 f(x)\,dx$ криволинейной трапеции при $c \to 0+0$ стремится к конечному числу (к 2 в первом клипе); если расходится (второй клип), площадь стремится к бесконечности.

Пример 9. *Вычислить интеграл*

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Решение. Подынтегральная функция на отрезке интегрирования разрывна в точке $x = 1$, поэтому используем формулу (5):

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x\Big|_0^1 = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}.$$

Здесь в явном виде не показан переход к пределу, но при подстановке вместо x единицы необходимо помнить, что на самом деле выполняется не подстановка, а именно переход к пределу: $\lim_{c\to 1-0} \arcsin x|_0^c$.

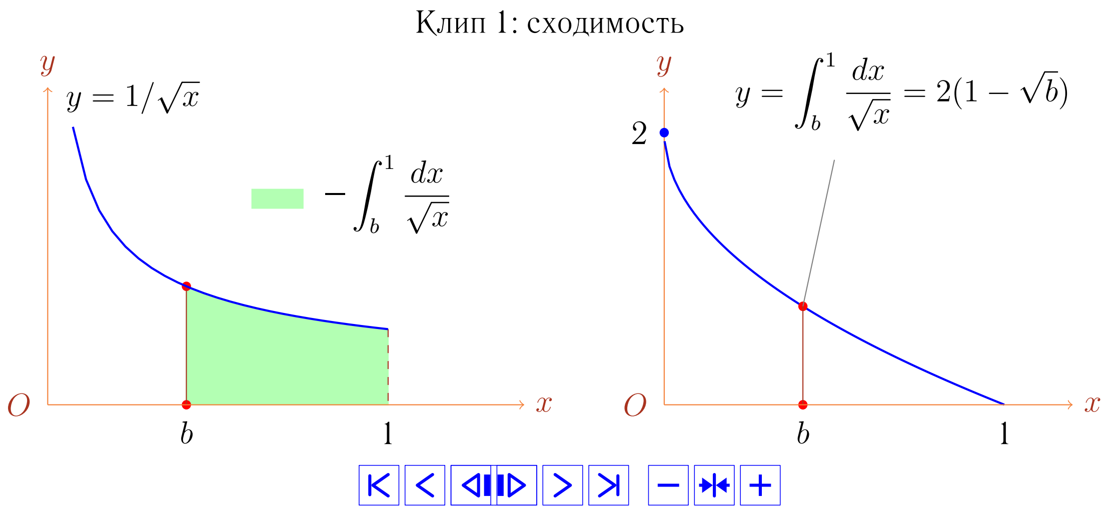


Рис. 3. Сходимость и расходимость интеграла от разрывной функции.

Пример 10. *Найти интеграл*

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2}.$$

Решение. Подынтегральная функция не существует в нуле. Поэтому заданный интеграл разбиваем на сумму двух интегралов:

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2} = \int_{-1}^{0-0} \frac{dx}{x^2} + \int_{0+0}^{1} \frac{dx}{x^2}. \tag{6}$$

Вычислим первый интеграл в правой части:

$$\int_{-1}^{0-0} \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\Big|_{-1}^{0-0} = \infty.$$

Интеграл расходится, следовательно, расходится и заданный интеграл вне зависимости от того, сходится или расходится второй интеграл в правой части (6). Формальное интегрирование ведет к ошибке:

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\Big|_{-1}^{1} = -1-1 = -2 < 0,$$

что противоречит положительности подынтегральной функции.

2.2 Теоремы сравнения

Теорема 4. *Пусть выполняется неравенство* $0 \le f(x) \le g(x)$, $x \in [a, b]$, *и функции* $f(x)$ *и* $g(x)$ *либо не определены, либо разрывны при* $x = b$. *Если интеграл* $\int_a^b g(x)\,dx$ *сходится, то сходится и интеграл* $\int_a^b f(x)\,dx$; *если интеграл* $\int_a^b f(x)\,dx$ *расходится, то расходится и интеграл* $\int_a^b g(x)\,dx$.

Доказательство приведено в Приложении[4)].

Замечание 1. *Аналогии этой и следующих теорем применимы и к другим типам интегралов от разрывных функций.*

Пример 11. *Исследовать на сходимость интеграл*

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt{1-x^4}}.$$

Решение. Подынтегральная функция имеет разрыв при $x = 1$. Для $x \in [0;1)$ выполняется неравенство:

$$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^4}} \leq \frac{1}{\sqrt{1-x}},$$

так как

$$\frac{-x^3-x^2-1}{(1+x)(1+x^2)} \leq 0 \Longrightarrow \frac{x}{(1+x)(1+x^2)} - 1 \leq 0$$
$$\Longrightarrow \frac{x}{(1+x)(1+x^2)} \leq 1 \Longrightarrow \frac{x}{1-x^4} \leq \frac{1}{1-x}.$$

Но $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = -2\sqrt{1-x}\Big|_0^1 = 2$, и поэтому заданный интеграл сходится.

Следствие 2. *Пусть для достаточно близких к b значений x функция $f(x)$ имеет вид*

$$f(x) = \frac{\varphi(x)}{(b-x)^p},\ p > 0.$$

Тогда: 1) если $p < 1$ и $0 \leq \varphi(x) \leq c < \infty$, то $\int_a^\infty f(x)\,dx$ сходится; 2) если $p \geq 1$ и $\varphi(x) \geq c > 0$, то интеграл расходится.

Доказательство аналогично доказательству следствия 1.

Теорема 5. *Пусть интегралы $\int_a^b f(x)\,dx$ и $\int_a^b g(x)\,dx$ имеют единственную точку разрыва $x = b$, подынтегральная функция положительна и существует конечный предел*

$$\lim_{x\to b} \frac{f(x)}{g(x)} = K,\ 0 < K < \infty.$$

Тогда эти интегралы сходятся или расходятся одновременно.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 2.

Пример 12. *Исследовать на сходимость интеграл*

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sin x}.$$

Решение. В силу того, что $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, возьмем для сравнения функцию $1/x$. Поскольку $\int_0^1 \frac{dx}{x} = \ln x\big|_{0+0}^1 = \infty$, то заданный интеграл расходится.

2.3 Абсолютная и условная сходимости

Теорема 6. *Если интеграл $\int_a^b |f(x)|\,dx$ сходится, то сходится и интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$, имеющий особенность при $x = b$.*

Доказательство аналогично доказательству теоремы 3.

Если интеграл $\int_a^b |f(x)|\,dx$ сходится, то говорят, что интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ ***сходится абсолютно***. Если же интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ сходится, а интеграл $\int_a^b |f(x)|\,dx$ расходится, то говорят, что интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ ***сходится условно***.

Пример 13. *Исследовать на сходимость интеграл*

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,dx.$$

Решение. Так как

$$\frac{|\sin x|}{\sqrt{x}} \le \frac{1}{\sqrt{x}},$$

а интеграл от правой части неравенства сходится:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}\Big|_0^1 = 2,$$

то сходится и интеграл $\int_0^1 \frac{|\sin x|}{\sqrt{x}}\,dx$. Значит, заданный интеграл абсолютно сходится.

3 Общее свойство несобственных интегралов

Если $a < b$, то

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Если не обязательно $a < b$, то

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \left|\int_a^b |f(x)|\,dx\right|.$$

Доказательство получается из свойства 9° определенного интеграла[†] с помощью соответствующего предельного перехода.

В Приложении рассмотрено использование системы *Mathematica* для вычисления и применения несобственных интегралов[5)].

[†]Лекция «Определенный интеграл».

Приложение

[1] Пусть $p > 1$ и $0 \le \varphi(x) \le c < \infty$, тогда

$$f(x) = \frac{\varphi(x)}{x^p} \le \frac{c}{x^p}.$$

Но интеграл

$$\int_a^\infty \frac{c}{x^p}\,dx = c\int_a^\infty \frac{1}{x^p}\,dx \tag{П1}$$

сходится при $p > 1$, значит, по теореме 1 сходится и интеграл $\int_a^\infty f(x)\,dx$.

Пусть $p \le 1$ и $\varphi(x) \ge c > 0$. В этом случае интеграл (П1) расходится и справедливо неравенство

$$f(x) = \frac{\varphi(x)}{x^p} \ge \frac{c}{x^p}.$$

Следовательно, по той же теореме 1 интеграл $\int_a^\infty f(x)\,dx$ расходится.

[2] Обозначим $F = \int_a^\infty f(x)\,dx$, $G = \int_a^\infty g(x)\,dx$. Пусть последний интеграл сходится, тогда G – конечное число. Кроме того, из существования и конечности предела следует, что при достаточно больших x отношение $f(x)/g(x)$ должно быть близко к числу K; например, для достаточно малого $\varepsilon > 0$

$$0 < K - \varepsilon \le \frac{f(x)}{g(x)} \le K + \varepsilon,$$

откуда

$$(K-\varepsilon)g(x) \le f(x) \le (K+\varepsilon)g(x). \tag{П2}$$

Так как интеграл G сходится, то сходится и интеграл от функции $(K+\varepsilon)g(x)$, а тогда по теореме 1 и из правого неравенства в (П2) следует, что сходится интеграл F. Если интеграл F расходится, то по той же теореме и из того же неравенства получаем, что расходится интеграл от функции $(K+\varepsilon)g(x)$. Но тогда расходится и интеграл G.

Аналогично из левого неравенства в (П2) выясняем, что сходимость F влечет за собой сходимость G, а расходимость G влечет за собой расходимость F.

[3] Рассмотрим функции (рис. 4)

$$f^+(x) = \begin{cases} f(x), & f(x) \ge 0; \\ 0, & f(x) < 0; \end{cases} \quad f^-(x) = \begin{cases} 0, & f(x) \ge 0; \\ -f(x), & f(x) < 0. \end{cases}$$

Тогда $|f(x)| = f^+(x) + f^-(x)$. Так как интеграл $\int_a^\infty |f(x)|\,dx$ сходится и $|f(x)| \ge f^+(x) \ge 0$, то $\int_a^\infty f^+(x)\,dx$ сходится. По аналогичной причине сходится и $\int_a^\infty f^-(x)\,dx$. Но

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \int_a^\infty f^+(x)\,dx - \int_a^\infty f^-(x)\,dx,$$

следовательно, интеграл $\int_a^\infty f(x)\,dx$ сходится.

[4] Из условия теоремы следует, что для $a < c < b$ справедливо неравенство

$$\int_a^c f(x)\,dx \le \int_a^c g(x)\,dx. \tag{П3}$$

Если интеграл $\int_a^b g(x)\,dx$ сходится, то его значением ограничена правая, а, значит, и левая части неравенства (П3). Так как левая часть к тому же возрастает с ростом переменной c, то она имеет конечный предел при $c \to b - 0$ и, таким образом, интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ сходится.

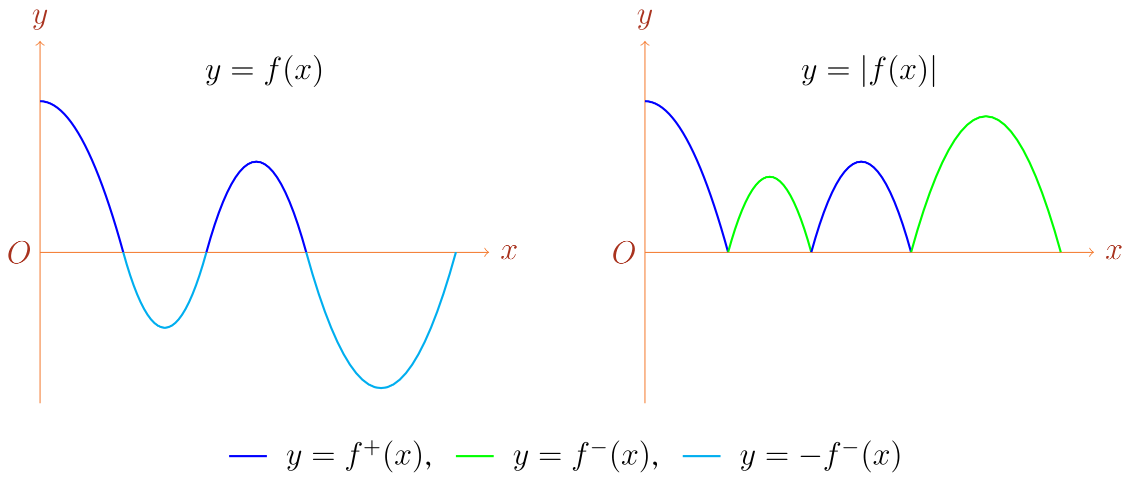


Рис. 4.

Если интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ расходится, то предел левой части (П3) при $c \to b-0$ равен ∞, а тогда и предел правой части равен ∞. Значит, интеграл $\int_a^b g(x)\,dx$ расходится.

[5)] Для вычисления несобственных интегралов *Mathematica* использует уже известный вам оператор `Integrate`, в котором подынтегральная функция может иметь разрывы II рода, а пределы могут быть бесконечностями. Например, эта система в состоянии найти площадь бесконечной криволинейной трапеции из примера 2:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{dx}}{1+\mathrm{x}^2}$$

$$\pi$$

Допустимо задавать довольно общие конструкции для определения области сходимости несобственного интеграла, указав ограничения на используемые в конструкции параметры. Решим пример 1:

$$\mathtt{Assuming}\left[\mathrm{a} > 0 \,\&\&\, \mathrm{p} \in \mathtt{Reals},\ \int_{\mathrm{a}}^{\infty} \frac{1}{\mathrm{x}^{\mathrm{p}}}\,\mathrm{dx}\right]$$

$$\mathtt{ConditionalExpression}\left[\frac{\mathrm{a}^{1-\mathrm{p}}}{-1+\mathrm{p}},\ \mathrm{p} > 1\right]$$

В ответе сказано, что интеграл сходится при выполнении условия $p > 1$ и приведено его значение в этом случае.

Точно так же *Mathematica* справляется с интегралом от разрывной функции (пример 8):

$$\mathtt{Assuming}\left[\mathrm{a} > 0 \,\&\&\, \mathrm{b} > 0 \,\&\&\, \mathrm{a} < \mathrm{b} \,\&\&\, \mathrm{p} \in \mathtt{Reals},\ \int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}} \frac{1}{(\mathrm{x}-\mathrm{a})^{\mathrm{p}}}\,\mathrm{dx}\right]$$

$$\mathtt{ConditionalExpression}\left[\frac{(-\mathrm{a}+\mathrm{b})^{1-\mathrm{p}}}{1-\mathrm{p}},\ \mathrm{p} < 1\right]$$

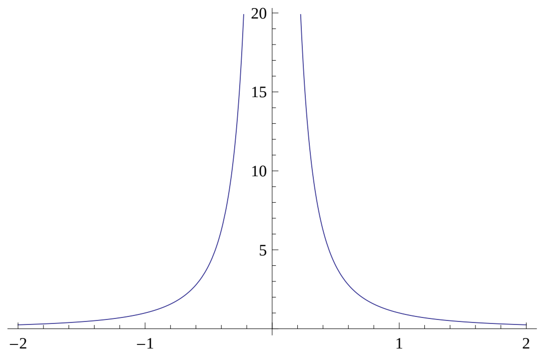
А сможет *Mathematica* решить «хитрый» пример 10? Проверим это, заодно построив график подынтегральной функции:

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\mathrm{x}^2}\,\mathrm{dx}$$

$\mathtt{Integrate::idiv:Integral\ of}\ \frac{1}{\mathrm{x}^2}\ \mathtt{does\ not\ converge\ on}\ \{-1,1\}.$ ≫

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\mathtt{x}^2}\,\mathtt{dx}$$

```
Plot[1/x^2, {x, -2, 2}]
```



Результат удовлетворительный: система сообщает, что заданный ей интеграл на отрезке $[-1;1]$ расходится.

Mathematica не спасует перед интегралом, у которого и подынтегральная функция разрывна, и один из пределов равен бесконечности:

$$\int_{0}^{\infty} \frac{1}{(1+\mathtt{x}^2)\sqrt{x}}\,\mathtt{dx}$$

$$\frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

Рассмотрим решение ряда технических задач с помощью системы *Mathematica*.

Пример П1. *Энергия E электрического сигнала $x(t)$ вычисляется по формуле ($t > 0$ — время)*

$$E = \int_{0}^{\infty} x^2(t)\,dt. \tag{П4}$$

Найти энергию сигнала

$$x(t) = e^{-t}\sin at,\ a > 0,$$

представляющего собой затухающие колебания.

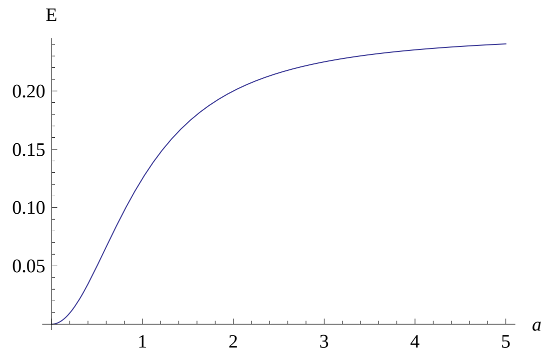
Решение. Используем формулу (П4) и систему *Mathematica*:

$$\mathtt{Assuming}\left[a > 0, \int_{0}^{\infty} \mathtt{e}^{-2\mathtt{t}}\,\mathtt{Sin[at]}^2\,\mathtt{dt}\right]$$

$$\frac{\mathtt{a}^2}{4+4\mathtt{a}^2}$$

Так как параметр a имеет физический смысл частоты колебаний сигнала, из полученной формулы для энергии видно, что увеличение частоты колебаний приводит к увеличению энергии сигнала, которая, впрочем, никогда не превзойдет $1/4$. График зависимости энергии от a наглядно демонстрирует это:

```
Plot[%, {a, 0, 5}, AxesLabel → {a, "E"}]
```



Пример П2. *Спектральной плотностью амплитуд четного сигнала $x(t)$ называют функцию $|F(\omega)|$, где*

$$F(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(t) \cos \omega t \, dt,$$

а ω имеет смысл частоты. Если для $\omega \in [\omega_1, \omega_2]$ функция $|F(\omega)|$ принимает относительно большие значения, можно говорить о существенном участии частот этого диапазона в колебаниях сигнала.

Найти спектральную плотность амплитуд для сигнала

$$x(t) = \frac{t^2}{1+t^4}.$$

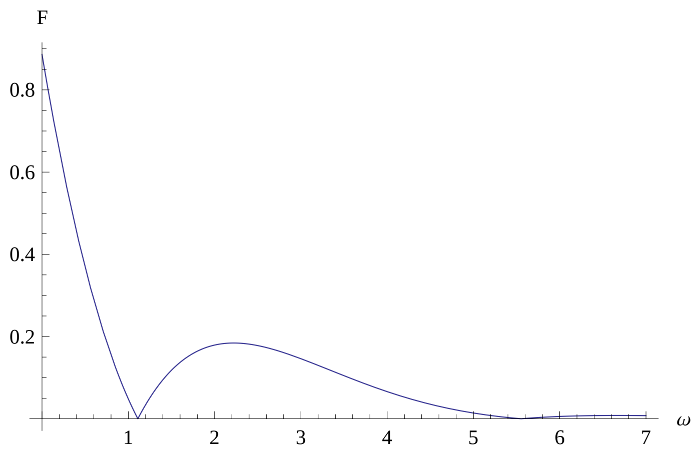
Решение. С помощью системы *Mathematica* сначала найдем функцию $F(\omega)$:

$$\texttt{Assuming}\left[\omega > 0, \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{\texttt{t}^2}{1+\texttt{t}^4} \texttt{Cos}[\omega \texttt{t}] \, \texttt{dt}\right]$$

$$\frac{1}{2} e^{-\frac{\omega}{\sqrt{2}}} \sqrt{\pi} \left(\texttt{Cos}\left[\frac{\omega}{\sqrt{2}}\right] - \texttt{Sin}\left[\frac{\omega}{\sqrt{2}}\right]\right)$$

а затем построим график спектральной плотности амплитуд:

```
Plot[Abs[%],{ω, 0, 7},PlotRange → All, AxesLabel → {ω,"F"}]
```



Поскольку нуль входит в диапазон существенных значений функции $|F(\omega)|$, то данный сигнал классифицируется как низкочастотные колебания.

Пример П3. *Емкость короткой цилиндрической поверхности выражается формулой*

$$C = \frac{4\pi r l \varepsilon}{\ln r} \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-s^2}} \, ds,$$

где $2l$ — *высота цилиндра,* r — *его радиус,* ε — *константа. Вычислить эту емкость.*

Решение. Совсем нетрудно расчеты произвести в уме, но нам надо убедиться, что и *Mathematica* справится с вычислением несобственного интеграла от функции, имеющей разрывы второго рода сразу на обоих концах отрезка интегрирования. Итак,

$$\frac{4\pi \mathtt{r}\mathtt{l}\varepsilon}{\mathtt{Log[r]}}\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-\mathtt{s}^2}}\,\mathtt{ds}$$

$$\frac{4\mathtt{l}\pi^2\mathtt{r}\varepsilon}{\mathtt{Log[r]}}$$

Все верно.

Литература

[1] Бугров Я.С., Никольский С.М. *Высшая математика. Дифференциальное и интегральное исчисление.* — М.: Наука, 1984, — с. 249-262.

[2] Письменный Д.Т. *Конспект лекций по высшей математике.* — М.: Рольф, 2000. Ч. 1. — с. 233-237.