Интегрирование иррациональных функций

Волченко Ю.М.

Содержание лекции

Интегрирование простейших иррациональностей. Подстановки Эйлера. Интеграл от дифференциального бинома. Интегрирование иррациональностей с помощью тригонометрических и гиперболических подстановок.

Интегрирование иррациональных функций в системе *Mathematica*.

6 апреля 2013 г.

На этой лекции мы продолжим и закончим знакомство с методами интегрирования. Будем интегрировать функции, содержащие радикалы, в основном вновь стараясь получить интеграл от дробно-рациональной функции (ДРФ), который (как вы помните!) всегда берется.

1 Интегрирование простейших иррациональностей

1.1 Интеграл вида $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$

Такой интеграл можно вычислить, выделяя полный квадрат в подкоренном выражении:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \int \frac{dx}{\sqrt{a\left(x^2+\frac{b}{2a}\cdot 2x+\frac{b^2}{4a^2}\right)+c-\frac{b^2}{4a}}} = \\ = \int \frac{dx}{\sqrt{a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+c-\frac{b^2}{4a}}} = \int \frac{dt}{\sqrt{at^2+d}},$$

где $t = x+\frac{b}{2a}$, $d = c-\frac{b^2}{4a}$. Последний интеграл не берется в действительной области, только если $a<0$, $d<0$. В остальных случаях он сводится к одному из табличных интегралов.

Пример 1. *Вычислить интеграл*

$$\int \frac{dx}{\sqrt{-5x^2+6x-1}}.$$

Решение. Выделим полный квадрат в знаменателе:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{-5x^2+6x-1}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \int \frac{dx}{\sqrt{-\left(x^2-\frac{6}{5}x+\frac{9}{25}\right)+\frac{9}{25}-\frac{1}{5}}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{4}{25}-\left(x-\frac{3}{5}\right)^2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \arcsin \frac{x-\frac{3}{5}}{\frac{2}{5}} + C = \frac{1}{\sqrt{5}} \arcsin \frac{5x-3}{2} + C.$$

1.2 Интеграл вида $\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\, dx$

Этот интеграл вычисляется подобно тому, как находится интеграл от простейшей ДРФ III типа: сначала в числителе выделяется производная подкоренного выражения, а затем интеграл разбивается на сумму двух интегралов. Один из них берется сразу, а второй относится к уже рассмотренному в предыдущем п. виду интегралов и интегрируется соответственно:

$$\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\, dx = \int \frac{\frac{A}{2a}(2ax+b)+B-\frac{Ab}{2a}}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\, dx =$$

$$= \frac{A}{2a} \int \frac{2ax+b}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\, dx + \left(B-\frac{Ab}{2a}\right) \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

Второй интеграл, как уже говорилось, относится к рассмотренному ранее виду интегралов, а первый берется заменой:

$$\int \frac{2ax+b}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\, dx = \left\langle t = ax^2+bx+c,\ dt = (2ax+b)\, dx \right\rangle = \int \frac{dt}{\sqrt{t}} =$$

$$= 2\sqrt{t} + C = 2\sqrt{ax^2+bx+c} + C.$$

Пример 2. *Найти интеграл*

$$\int \frac{3x-1}{\sqrt{2x^2+5x-2}}\, dx.$$

Решение. Выделим в числителе подынтегральной функции производную подкоренного выражения:

$$\int \frac{3x-1}{\sqrt{2x^2+5x-2}}\, dx = \int \frac{\frac{3}{4}(4x+5)-\frac{19}{4}}{\sqrt{2x^2+5x-2}}\, dx =$$

$$= \frac{3}{4} \int \frac{4x+5}{\sqrt{2x^2+5x-2}}\, dx - \frac{19}{4\sqrt{2}} \int \frac{1}{\sqrt{\left(x+\frac{5}{4}\right)^2-\frac{41}{16}}}\, dx =$$

$$= \left\langle t = 2x^2+5x-2,\ dt = (4x+5)\, dx \right\rangle =$$

$$= \frac{3}{4}\int \frac{dt}{\sqrt{t}} - \frac{19}{4\sqrt{2}} \ln\left| x + \frac{5}{4} + \sqrt{\left(x+\frac{5}{4}\right)^2 - \frac{41}{16}} \right| =$$

$$= \frac{3}{2}\sqrt{t} - \frac{19}{4\sqrt{2}} \ln\left| x + \frac{5}{4} + \sqrt{x^2 + \frac{5}{2}x - 1} \right| + C =$$

$$= \frac{3}{2}\sqrt{2x^2+5x-2} - \frac{19\sqrt{2}}{8} \ln\left|4x+5+2\sqrt{4x^2+10x-4}\right| + C.$$

2 Интегралы вида $\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) dx,\ a \neq 0.$

Здесь и далее $R(x_1, x_2, \dots, x_k)$ означает ДРФ нескольких аргументов.

2.1 Первая подстановка Эйлера

Если $a > 0$, выполним одну из двух подстановок, отличающихся друг от друга знаком перед корнем в правой части равенства:

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm\sqrt{a}x + t. \tag{1}$$

Найдем из этого равенства x:

$$\cancel{ax^2} + bx + c = \cancel{ax^2} \pm 2t\sqrt{a}\,x + t^2,$$
$$\left(b \mp 2\sqrt{a}\,t\right)x = t^2 - c,$$
$$x = \frac{t^2-c}{b \mp 2\sqrt{a}\,t}. \tag{2}$$

Таким образом, x является ДРФ t, тогда из равенства (1) следует, что его левая часть также будет ДРФ t, а тогда и функция $R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)$ будет ДРФ t. Кроме того, производная правой части (2) тоже будет ДРФ t. Значит, в результате подстановок (1) подынтегральная функция станет ДРФ t.

Пример 3. *Найти интеграл*

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+5}}.$$

Решение. Выполним первую подстановку Эйлера:

$$\sqrt{x^2+2x+5} = -x + t,\ \cancel{x^2} + 2x + 5 = \cancel{x^2} - 2xt + t^2,\ 2(t+1)x = t^2 - 5,$$
$$x = \frac{t^2-5}{2(t+1)},\ dx = \frac{2t(t+1) - t^2 + 5}{2(t+1)^2}\,dt = \frac{t^2+2t+5}{2(t+1)^2}\,dt.$$

Следовательно,

$$\sqrt{x^2+2x+5} = -\frac{t^2-5}{2(t+1)} + t = \frac{t^2+2t+5}{2(t+1)}.$$

Подставим все это в интеграл:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+5}} = \int \frac{\cancel{2}\cancel{(t+1)}\cancel{(t^2+2t+5)}\,dt}{\cancel{(t^2+2t+5)}\cancel{2}\,(t+1)^{\cancel{2}}} = \int \frac{dt}{t+1} = \ln|t+1| + C =$$
$$= \ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+5}\right| + C.$$

2.2 Вторая подстановка Эйлера

Если $c>0$, то выполняются подстановки

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = xt \pm \sqrt{c}.$$

Снова выразим x через t:

$$ax^2+bx+\cancel{c} = x^2t^2 \pm 2\sqrt{c}xt + \cancel{c},$$
$$ax+b = xt^2 \pm 2\sqrt{c}\,t,$$
$$x = \frac{\pm 2\sqrt{c}\,t - b}{a-t^2}.$$

Вновь получили ДРФ от t, а, значит, рассуждая, как в предыдущем случае, опять придем к подынтегральной функции, представляющей собой ДРФ t.

Пример 4. *Найти интеграл:*

$$\int \frac{\left(1-\sqrt{1+x+x^2}\right)^2}{x^2\sqrt{1+x+x^2}}\,dx.$$

Решение. Сделаем вторую подстановку Эйлера:

$$\sqrt{1+x+x^2} = xt+1,\ \cancel{1}+x+x^2 = x^2t^2+2xt+\cancel{1},$$
$$1+x = xt^2+2t,\ x = \frac{2t-1}{1-t^2},$$
$$dx = \frac{2\left(1-t^2\right)+2t\,(2t-1)}{\left(1-t^2\right)^2}\,dt = \frac{2\left(t^2-t+1\right)}{\left(1-t^2\right)^2}\,dt.$$

Выразим через t другие составляющие подынтегрального выражения:

$$\sqrt{1+x+x^2} = \frac{2t-1}{1-t^2}\,t+1 = \frac{t^2-t+1}{1-t^2},$$
$$1-\sqrt{1+x+x^2} = 1-\frac{t^2-t+1}{1-t^2} = \frac{t\,(1-2t)}{1-t^2}.$$

Подставим найденные выражения под знак интеграла:

$$\int \frac{\left(1-\sqrt{1+x+x^2}\right)^2}{x^2\sqrt{1+x+x^2}}\,dx = \int \frac{t^2\cancel{(1-2t)^2}}{\cancel{(1-t^2)^2}}\cdot\frac{\cancel{(1-t^2)^2}}{\cancel{(2t-1)^2}}\cdot\frac{\cancel{(1-t^2)}}{\cancel{t^2-t+1}}\cdot\frac{2\cancel{(t^2-t+1)}}{(1-t^2)^{\cancel{2}}}\,dt =$$
$$= 2\int \frac{t^2}{1-t^2}\,dt = 2\int \frac{(t^2-1)+1}{1-t^2}\,dt = 2\int \frac{1}{1-t^2}\,dt - 2\int dt =$$
$$= \ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| - 2t + C = \ln\left|\frac{x+\sqrt{1+x+x^2}-1}{x-\sqrt{1+x+x^2}+1}\right| - 2\frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x} + C.$$

2.3 Третья подстановка Эйлера

Если α, β — действительные корни трехчлена ax^2+bx+c, то можно выполнить следующую подстановку:

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = (x-\alpha)\,t.$$

Выразим x через t:

$$ax^2+bx+c = a\,(x-\alpha)\,(x-\beta) = (x-\alpha)^2\,t^2,\ a\,(x-\beta) = (x-\alpha)\,t^2,$$
$$ax - a\beta = t^2x - \alpha t^2,\ x = \frac{a\beta-\alpha t^2}{a-t^2}.$$

Повторяя предыдущие рассуждения, убеждаемся в том, что в результате такой замены получим ДРФ от t под знаком интеграла.

Пример 5. *Найти интеграл*

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+3x-4}}.$$

Решение. Корнями подкоренного трехчлена являются -4 и 1. Сделаем замену

$$\sqrt{x^2+3x-4} = \sqrt{(x+4)\,(x-1)} = (x+4)\,t.$$

Тогда

$$\cancel{(x+4)}\,(x-1) = (x+4)^{\cancel{2}}\,t^2,\ x-1 = (x+4)\,t^2,\ x = \frac{1+4t^2}{1-t^2},$$
$$dx = \frac{8t\,(1-t^2)+2t\,(4t^2+1)}{(1-t^2)^2}\,dt = \frac{10t}{(1-t^2)^2}\,dt,$$
$$\sqrt{x^2+3x-4} = \left(\frac{4t^2+1}{1-t^2}+4\right)t = \frac{5t}{1-t^2},$$
$$t = \sqrt{\frac{x-1}{x+4}}.$$

Подставим все это под интеграл:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+3x-4}} = \int \frac{\cancel{10t}^{\,2}\,\cancel{(1-t^2)}}{(1-t^2)^{\cancel{2}}\,\cancel{5t}}\,dt = \int \frac{2}{1-t^2}\,dt =$$
$$= \ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + C = \ln\left|\frac{\sqrt{x+4}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+4}-\sqrt{x-1}}\right| + C.$$

3 Интегралы вида $\int R\left(x, x^{\frac{m}{n}}, \ldots, x^{\frac{r}{s}}\right) dx$

Пусть $k = \text{НОК}(n, \ldots, s)$ (НОК — наименьшее общее кратное), или, что то же самое, k — общий знаменатель дробей $\frac{m}{n}, \ldots, \frac{r}{s}$. Чтобы рационализировать интеграл, производят замену $x = t^k$, $dx = kt^{k-1}dt$.

Пример 6. *Найти интеграл*

$$\int \frac{dx}{\left(\sqrt[4]{x}-1\right)\sqrt{x}}.$$

Решение. Интеграл имеет вид $\int R\left(x^{\frac{1}{4}}, x^{\frac{1}{2}}\right)\,dx$. Общий знаменатель дробей $1/4$ и $1/2$ есть 4, поэтому делаем замену $x = t^4$, $dx = 4t^3dt$, в результате которой интеграл становится таким:

$$\int \frac{dx}{\left(\sqrt[4]{x}-1\right)\sqrt{x}} = \int \frac{4t^{\cancel{3}}\,dt}{(t-1)\,\cancel{t^2}} = 4\int \frac{t}{t-1}\,dt = 4\int \frac{(t-1)+1}{t-1}\,dt =$$
$$= 4\int dt + 4\int \frac{dt}{t-1} = 4(t+\ln|t-1|)+C = 4\left(\sqrt[4]{x}+\ln\left|\sqrt[4]{x}-1\right|\right)+C.$$

4 Интегралы вида $\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m}{n}}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{r}{s}}\right) dx$

Делается подстановка $t^k = \frac{ax+b}{cx+d}$, где $k = \text{НОК}(n, \ldots, s)$, и подынтегральная функция становится ДРФ от t.

Пример 7. *Взять интеграл*

$$\int \sqrt{\frac{x+1}{x+2}}\,dx.$$

Решение. Сделаем замену $t^2 = \frac{x+1}{x+2}$. Тогда

$$t^2\,(x+2) = x+1,\ \ x = \frac{1-2t^2}{t^2-1},$$
$$dx = \frac{-4t\,(t^2-1)-2t\,(1-2t^2)}{(t^2-1)^2} = \frac{2t}{(t^2-1)^2}\,dt.$$

Применим подстановку к интегралу:

$$\int \sqrt{\frac{x+1}{x+2}}\,dx = \int \frac{2t^2}{(t^2-1)^2}\,dt = 2\int \frac{t^2}{(t-1)^2\,(t+1)^2}\,dt.$$

Разложим подынтегральную функцию в сумму простейших ДРФ:

$$\frac{t^2}{(t-1)^2\,(t+1)^2} = \frac{A}{(t-1)^2}^{\backslash(t+1)^2} + \frac{B}{t-1}^{\backslash(t-1)(t+1)^2} + \frac{C}{(t+1)^2}^{\backslash(t-1)^2} + \frac{D}{t+1}^{\backslash(t-1)^2(t+1)}.$$

Найдем неизвестные числители дробей:

$t=-1$	$4C=1$	$C=\frac{1}{4}$	
$t=1$	$4A=1$	$A=\frac{1}{4}$	
t^3	$B+D=0$	$B+D=0$	$D=-\frac{1}{4}$
t^0	$A-B+C+D=0$	$-B+D=-\frac{1}{2}$	$B=\frac{1}{4}$

Продолжим вычисление интеграла:

$$2\int\frac{t^2}{(t-1)^2(t+1)^2}\,dt=\frac{1}{2}\left[\int\frac{dt}{(t-1)^2}+\int\frac{dt}{t-1}+\int\frac{dt}{(t+1)^2}-\int\frac{dt}{t+1}\right]=$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-t}-\frac{1}{t+1}+\ln|t-1|-\ln|t+1|\right)+C=$$
$$=\frac{t}{1-t^2}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C=\frac{\sqrt{\frac{x+1}{x+2}}}{1-\frac{x+1}{x+2}}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{\frac{x+1}{x+2}}-1}{\sqrt{\frac{x+1}{x+2}}+1}\right|+C=$$
$$=\sqrt{(x+1)(x+2)}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}}\right|+C.$$

5 Интеграл от дифференциального бинома

Таким интегралом называется следующий:

$$\int x^m\left(a+bx^n\right)^p\,dx,$$

где m, n, p — рациональные числа. Как доказал П. Л. Чебышев, интеграл от дифференциального бинома выражается в элементарных функциях только в трех случаях.

1) Если p — целое число, интеграл берется подстановкой $x=t^s$, где s — НОК знаменателей дробей m и n.

2) Если $\frac{m+1}{n}$ — целое число, то интеграл позволяет вычислить замена $a+bx^n=t^s$, где s — знаменатель дроби p.

3) Если $\frac{m+1}{n}+p$ — целое число, то выполняют замену $ax^{-n}+b=t^s$, где s — знаменатель дроби p.

Пример 8. *Найти интеграл*

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x}\left(\sqrt[4]{x}+1\right)^{10}}.$$

Решение. Представим интеграл в виде

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x}\left(\sqrt[4]{x}+1\right)^{10}}=\int x^{-1/2}\left(1+x^{1/4}\right)^{-10}\,dx.$$

Таким образом, это — интеграл от дифференциального бинома с параметрами $m=-1/2$, $n=1/4$, $p=-10$. Так как p —целое число, то выполняем замену $x=t^4$. Тогда $dx=4t^3dt$ и интеграл преобразуется следующим образом:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x}\left(\sqrt[4]{x}+1\right)^{10}}=\int t^{-2}(1+t)^{-10}\,4t^3\,dt=4\int\frac{t}{(t+1)^{10}}\,dt=4\int\frac{(t+1)-1}{(t+1)^{10}}\,dt=$$
$$=4\int\frac{dt}{(t+1)^9}-4\int\frac{dt}{(t+1)^{10}}=-\frac{1}{2(t+1)^8}+\frac{4}{9(t+1)^9}+C=$$

$$= -\frac{1}{2\left(\sqrt[4]{x}+1\right)^8} + \frac{4}{9\left(\sqrt[4]{x}+1\right)^9} + C.$$

Пример 9. *Найти интеграл*

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{\left(1-x^2\right)^3}}\, dx.$$

Решение. Перепишем интеграл так:

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{\left(1-x^2\right)^3}}\, dx = \int x^3 \left(1-x^2\right)^{-3/2} dx.$$

Снова имеем интеграл от дифференциального бинома с $m = 3$, $n = 2$, $p = -3/2$. В данном случае p не является целым числом, но $\frac{m+1}{n}$ — целое, поэтому делаем замену $1 - x^2 = t^2$, $-2x\, dx = 2t\, dt$, $x^2 = 1 - t^2$. В результате получаем

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{\left(1-x^2\right)^3}}\, dx = -\int \frac{1-t^2}{t^3}\, t\, dt = \int dt - \int \frac{1}{t^2}\, dt = t + \frac{1}{t} + C =$$

$$= \sqrt{1-x^2} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + C.$$

Пример 10. *Найти интеграл*

$$\int \frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^2}}.$$

Решение. Перейдем к дробным степеням в подынтегральной функции:

$$\int \frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^2}} = \int x^{-4}\left(1+x^2\right)^{-1/2} dx.$$

Это — интеграл от дифференциального бинома с параметрами $m = -4$, $n = 2$, $p = -1/2$. Числа p и $\frac{m+1}{n} = -\frac{3}{2}$ не являются целыми, но $\frac{m+1}{n} + p = -\frac{3}{2} - \frac{1}{2} = -2$ — целое. Следовательно, имеем интеграл от дифференциального бинома третьего типа. Делаем замену $x^{-2} + 1 = t^2$, $-2x^{-3}\, dx = 2t\, dt$, $x^{-3}\, dx = -t\, dt$ и преобразовываем интеграл:

$$\int x^{-2}\left(x^{-2}+1\right)^{-1/2} x^{-3}\, dx = -\int \left(t^2-1\right) t^{-1} t\, dt = -\int \left(t^2-1\right)\, dt =$$

$$= t - \frac{t^3}{3} + C = \sqrt{x^{-2}+1} - \frac{\sqrt{\left(x^{-2}+1\right)^3}}{3} + C = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} - \frac{\sqrt{\left(x^2+1\right)^3}}{3x^3} + C =$$

$$= \frac{\left(2x^2-1\right)\sqrt{x^2+1}}{3x^3} + C.$$

6 Тригонометрические и гиперболические подстановки

Вернемся к интегралам вида

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)\, dx, \tag{3}$$

$a \neq 0$, $c - \frac{b^2}{4a} \neq 0$.

Представим квадратный трехчлен в виде суммы или разности квадратов двух величин:

$$ax^2+bx+c = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + \left(c-\frac{b^2}{4a}\right) = au^2+m,$$

где $u = x + \frac{b}{2a}$, $m = c - \frac{b^2}{4a}$.

Исключим из рассмотрения отрицательные параметры $a < 0$, $m < 0$, влекущие за собой отрицательность подкоренного выражения, которая выводит нас из действительной области. Разберем остальные сочетания знаков a и m.

6.1 $a > 0$, $m > 0$

Интеграл (3) принимает вид

$$\int R\left(u, \sqrt{au^2+r^2}\right)\, du,$$

где $r^2 = m$.

В этом случае выполняют либо тригонометрическую подстановку

$$u = \frac{r}{\sqrt{a}}\operatorname{tg} t,\ du = \frac{r}{\sqrt{a}}\cdot\frac{dt}{\cos^2 t},\ t = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{a}u}{r},$$

которая приводит интеграл к виду

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)\, dx = \frac{r}{\sqrt{a}}\int R\left(\frac{r}{\sqrt{a}}\operatorname{tg} t, \sqrt{\cancel{a}\frac{r^2}{\cancel{a}}\operatorname{tg}^2 t + r^2}\right)\frac{dt}{\cos^2 t} =$$

$$= \frac{r}{\sqrt{a}}\int R\left(\frac{r}{\sqrt{a}}\operatorname{tg} t, \frac{r}{\cos t}\right)\frac{dt}{\cos^2 t} = \int R_1\left(\sin t, \cos t\right)\, dt,$$

где R_1 – ДРФ двух аргументов; либо гиперболическую подстановку

$$u = \frac{r}{\sqrt{a}}\operatorname{sh} t,\ du = \frac{r}{\sqrt{a}}\operatorname{ch} t\, dt,\ t = \operatorname{arsh}\frac{\sqrt{a}u}{r},$$

которая превращает интеграл в следующий:

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)\, dx = \frac{r}{\sqrt{a}}\int R\left(\frac{r}{\sqrt{a}}\operatorname{sh} t, \sqrt{\cancel{a}\frac{r^2}{\cancel{a}}\operatorname{sh}^2 t + r^2}\right)\operatorname{ch} t\, dt =$$

$$= \frac{r}{\sqrt{a}} \int R\left(\frac{r}{\sqrt{a}} \operatorname{sh} t, r \operatorname{ch} t\right) \operatorname{ch} t \, dt = \int R_2 (\operatorname{sh} t, \operatorname{ch} t)\, dt.$$

Оба полученных типа интегралов мы изучали на предыдущей лекции и знаем, что они всегда интегрируются в элементарных функциях методами, рассмотренными на той же лекции.

6.2 $a > 0,\ m < 0$

При этих условиях интеграл можно записать в виде

$$\int R\left(u, \sqrt{au^2 - r^2}\right) du,$$

где $r^2 = -m$.

Задачу решает либо тригонометрическая подстановка

$$u = \frac{r}{\sqrt{a} \cos t},\ du = \frac{r}{\sqrt{a}} \cdot \frac{\operatorname{tg} t}{\cos t}\, dt,\ t = \arccos \frac{r}{\sqrt{a} u},$$

либо гиперболическая

$$u = \frac{r}{\sqrt{a}} \operatorname{ch} t,\ du = \frac{r}{\sqrt{a}} \operatorname{sh} t\, dt,\ t = \operatorname{arch} \frac{\sqrt{a} u}{r}$$

(доказать самостоятельно).

6.3 $a < 0,\ m > 0$

Интеграл принимает вид

$$\int R\left(u, \sqrt{r^2 - |a| u^2}\right) du,$$

где $r^2 = m$.

В этом случае используется тригонометрическая подстановка

$$u = \frac{r}{\sqrt{|a|}} \sin t,\ du = \frac{r}{\sqrt{|a|}} \cos t\, dt,\ t = \arcsin \frac{\sqrt{|a|} u}{r},$$

которая приводит интеграл к виду, поддающемуся интегрированию в элементарных функциях (доказать самостоятельно).

Пример 11. *Найти интеграл*

$$\int \frac{\sqrt{4x - x^2 - 3}}{(x-2)^2}\, dx.$$

Решение. Преобразуем интеграл:

$$\int \frac{\sqrt{4x-x^2-3}}{(x-2)^2}\,dx = \int \frac{\sqrt{1-(x-2)^2}}{(x-2)^2}\,dx = \langle u = x-2,\; du = dx \rangle = \int \frac{\sqrt{1-u^2}}{u^2}\,du.$$

Мы видим, что $m = 1 > 0$, $a = -1 < 0$, поэтому выполним подстановку

$$u = \sin t,\; du = \cos t\,dt,\; t = \arcsin u.$$

Получим

$$\int \frac{\sqrt{4x-x^2-3}}{(x-2)^2}\,dx = \int \frac{\sqrt{1-\sin^2 t}}{\sin^2 t}\cos t\,dt = \int \frac{\cos^2 t}{\sin^2 t}\,dt = \int \frac{1-\sin^2 t}{\sin^2 t}\,dt =$$
$$= \int \frac{1}{\sin^2 t}\,dt - \int dt = -\operatorname{ctg} t - t + C = -\sqrt{\frac{1-\sin^2 t}{\sin^2 t}} - t + C =$$
$$= -\sqrt{\frac{1-u^2}{u^2}} - \arcsin u + C = \frac{\sqrt{4x-x^2-3}}{2-x} + \arcsin(2-x) + C.$$

□

В заключение отметим, что в помощь инженеру и студенту существуют специальные справочники, в которых имеются обширные таблицы неопределенных интегралов [3, 4, 5]. После приведения вычисляемого интеграла к одному из них, можно немедленно получить ответ.

И, конечно, весьма серьезными помощниками являются системы символьных вычислений *Mathematica*, *Maple*, *MathCAD* и другие.

Мы с вами изучаем только первую из них, в связи с чем естественно обратиться к Приложению[1)], чтобы познакомиться с особенностями интегрирования иррациональных функций в системе *Mathematica*.

Приложение

[1]) Следуя сложившейся традиции, решим лекционные примеры в системе *Mathematica*, чтобы изучить особенности интегрирования иррациональных функций в этой системе.

В первых двух примерах *Mathematica* не демонстрирует ответов, отличных от лекционных:

$$\int \frac{1}{\sqrt{-5x^2+6x-1}}\,dx$$

$$-\frac{\text{ArcSin}\left[\frac{1}{2}(3-5x)\right]}{\sqrt{5}}$$

$$\int \frac{3x-1}{\sqrt{2x^2+5x-2}}\,dx$$

$$\frac{1}{8}\left(12\sqrt{-2+5x+2x^2}-19\sqrt{2}\,\text{Log}\left[5+4x+2\sqrt{-4+10x+4x^2}\right]\right)$$

В следующем примере появляется отличие:

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+5}}\,dx$$

$$\text{ArcSinh}\left[\frac{1+x}{2}\right]$$

Преобразуем полученный ответ, используя оператор **TrigToExp**:

```
TrigToExp[%]
```

$$\text{Log}\left[\frac{1+x}{2}+\sqrt{1+\frac{1}{4}(1+x)^2}\right]$$

Этот ответ только постоянным слагаемым, $\ln 2$, отличается от лекционного, что не противоречит определению первообразной.

Продолжим далее:

$$\int \frac{\left(1-\sqrt{1+x+x^2}\right)^2}{x^2\sqrt{1+x+x^2}}\,dx$$

$$\frac{2}{x}-\frac{2\sqrt{1+x+x^2}}{x}+\text{ArcSinh}\left[\frac{1+2x}{\sqrt{3}}\right]$$

```
TrigToExp[%]
```

$$\frac{2}{x}-\frac{2\sqrt{1+x+x^2}}{x}+\text{Log}\left[\frac{1+2x}{\sqrt{3}}+\sqrt{1+\frac{1}{3}(1+2x)^2}\right]$$

Ответы отличаются логарифмами. Сначала преобразуем логарифм, полученный компьютером:

$$\ln\left(\frac{1+2x}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{4x^2+4x+4}\right)=\ln\left(1+2x+2\sqrt{1+x+x^2}\right)-\ln\sqrt{3}.$$

Теперь преобразуем логарифм, полученный на лекции:

$$\ln\left|\frac{x+\sqrt{1+x+x^2}-1}{x-\sqrt{1+x+x^2}+1}\right|=\ln\left|\frac{\left[(x-1)+\sqrt{1+x+x^2}\right]\left[(x+1)+\sqrt{1+x+x^2}\right]}{\left[(x+1)-\sqrt{1+x+x^2}\right]\left[(x+1)+\sqrt{1+x+x^2}\right]}\right|=$$

$$=\ln\left|\frac{x^2-1+2x\sqrt{1+x+x^2}+1+x+x^2}{(x+1)^2-1-x-x^2}\right|=\ln\left|\frac{2x^2+x+2x\sqrt{1+x+x^2}}{x}\right|=$$

$$= \ln\left|2x+1+2\sqrt{1+x+x^2}\right|.$$

Как видим, они отличаются на постоянное слагаемое. Так что ответ, выданный компьютером, и ответ, полученный на лекции, равносильны.

Решим очередной пример:

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+3x-4}}\,dx$$

$$\mathtt{Log}\left[3+2x+2\sqrt{-4+3x+x^2}\,\right]$$

Покажем, что ответ, полученный на лекции, лишь на константу отличается от представленного системой *Mathematica*:

$$\ln\left|\frac{\sqrt{x+4}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+4}-\sqrt{x-1}}\right| = \ln\left|\frac{\left(\sqrt{x+4}+\sqrt{x-1}\right)^2}{\left(\sqrt{x+4}-\sqrt{x-1}\right)\left(\sqrt{x+4}+\sqrt{x-1}\right)}\right| =$$

$$= \ln\left|\frac{2x+3+2\sqrt{x+4}\sqrt{x-1}}{5}\right| = \ln\left|2x+3+2\sqrt{x^2+3x-4}\right| - \ln 5.$$

В следующем примере лекция и *Mathematica* солидарны:

$$\int \frac{\mathrm{dx}}{\left(\sqrt[4]{x}-1\right)\sqrt{x}}$$

$$4\,x^{1/4} + 4\,\mathtt{Log}\left[-1+x^{1/4}\right]$$

Далее, однако, чтобы получить приемлемый ответ, приходится повозиться:

$$\int \sqrt{\frac{x+1}{x+2}}\,\mathrm{dx}$$

$$\frac{\sqrt{\frac{1+x}{2+x}}\left(\sqrt{1+x}\,(2+x)-\sqrt{2+x}\,\mathtt{ArcSinh}\left[\sqrt{1+x}\,\right]\right)}{\sqrt{1+x}}$$

```
FullSimplify[%]
```

$$\sqrt{1+x}\sqrt{2+x}-\mathtt{ArcSinh}\left[\sqrt{1+x}\,\right]$$

```
TrigToExp[%]
```

$$\sqrt{1+x}\sqrt{2+x}-\mathtt{Log}\left[\sqrt{1+x}+\sqrt{2+x}\,\right]$$

Чтобы из последнего результата получить лекционный ответ, достаточно преобразовать логарифм:

$$-\ln\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}\right) = \ln\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}} = \ln\sqrt{\frac{1}{\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}\right)^2}} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}\right)\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}\right)}{\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}\right)^2}\right| =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}}\right|.$$

В следующем примере удается получить сравнимый с лекционным результат, если дополнительно применить оператор `Apart`:

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}\left(\sqrt[4]{x}+1\right)^{10}}\,\mathrm{dx}\ //\ \mathtt{Apart}$$

$$\frac{4}{9\left(1+\mathtt{x}^{1/4}\right)^9}-\frac{1}{2\left(1+\mathtt{x}^{1/4}\right)^8}$$

Далее ответы вновь отличаются:

$$\int\frac{\mathtt{x}^3}{\sqrt{(1-\mathtt{x}^2)^3}}\,d\mathtt{x}\,//\,\mathtt{Factor}$$

$$\frac{(-1+\mathtt{x})(1+\mathtt{x})(-2+\mathtt{x}^2)}{\sqrt{-(-1+\mathtt{x}^2)^3}}$$

поэтому применяем преобразование результата:

$$\frac{(1-x^2)\,(2-x^2)}{\sqrt{(1-x^2)^3}}=\frac{2-x^2}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{1+(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+\sqrt{1-x^2}.$$

При решении остальных примеров получаем практически те же ответы, что и на лекции:

$$\int\frac{1}{\mathtt{x}^4\sqrt{1+\mathtt{x}^2}}\,d\mathtt{x}\,//\,\mathtt{Simplify}$$

$$\frac{\sqrt{1+\mathtt{x}^2}\,(-1+2\mathtt{x}^2)}{3\,\mathtt{x}^3}$$

$$\int\frac{\sqrt{4\mathtt{x}-\mathtt{x}^2-3}}{(\mathtt{x}-2)^2}\,d\mathtt{x}$$

$$-\frac{\sqrt{1-(-2+\mathtt{x})^2}}{-2+\mathtt{x}}+\mathtt{ArcSin}\,[2-\mathtt{x}]$$

Литература

[1] Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика. *Дифференциальное и интегральное исчисление.* – М.: Наука, 1984, – с. 217-220.

[2] Письменный Д.Т. *Конспект лекций по высшей математике.* – М.: Рольф, 2000. Ч. 1. – с. 218–220.

[3] Двайт Г.Б. *Таблицы интегралов и другие математические формулы.* – М., Наука, 1977.

[4] Градштейн И.С., Рыжик И.М. *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений.* – М., Наука, 1971.

[5] Смолянский М.Л.*Таблицы неопределенных интегралов.* – М., Наука, 1971.