

Интегралы по мере

Волченко Ю.М.

Содержание лекции

Мера множества и интеграл по мере. Поверхности и тела в n -мерном пространстве. Теорема существования интеграла по мере. Теорема о среднем. Измеримые множества и n -кратный интеграл, его вычисление. Замена переменных в n -кратном интеграле.

Анимация внутренней и внешней мер множества, аппроксимаций дельта-функции.

Анимация работает только в программе Acrobat Reader!

Вычисление n -кратных интегралов и возможности использования дельта-функции в системе *Mathematica*.

7 апреля 2015 г.

Мы с вами изучили множество интегралов различных типов: определенный интеграл, двойной, тройной, криволинейный и поверхностный. Все эти интегралы имеют между собой много общего, начиная от схемы определения[†] и заканчивая условиями существования, свойствами и теоремой о среднем.

На сегодняшней лекции нам предстоит перенести рассмотренные понятия и схемы на многомерное пространство и на этой основе получить определения как интеграла по мере, так и n -кратного интеграла. Интеграл по мере является обобщением определенного и криволинейного интегралов (интегралов по длине), двойного и поверхностного (интегралов по площади) и тройного интеграла (интеграла по объему). В свою очередь, n -кратный интеграл обобщает понятия двойного и тройного интегралов для измеримых множеств в пространстве \mathbb{R}^n . В результате мы приобретем возможность в компактном виде представлять формулы геометрии и физические законы и решать задачи в пространстве произвольной размерности. В Приложении к лекции в качестве примеров получены формула объема n -мерного шара и закон Кулона для двух тел произвольной формы, выраженный с помощью шестикратного интеграла.

[†]Лекция «Двойной интеграл I».

1 Мера множества и интеграл

Чтобы выполнить поставленную задачу, прежде всего договоримся, что мы будем считать мерой геометрического объекта. Если сравнить определения длины, площади и объема с определением, например, отрезка, то мы увидим, что эти определения имеют одно существенное отличие. Отрезок нам представляется в чем-то более наглядным, так что его можно даже нарисовать (хотя то, что нарисовано, поскольку имеет толщину, вовсе не является отрезком). Но вот нарисовать длину отрезка почему-то не получается. Тем более, что понятие длины приложимо не только к отрезкам, но и к кривым, как плоским, так и пространственным, которые не очень-то похожи на отрезок. Видимо, длина является более абстрактным понятием, и, видимо, поэтому ее определение дается как описание ее свойств: если некоторая величина имеет такие-то и такие-то свойства, то эту величину можно признать длиной. Интересно, что точно такие же свойства, как у длины, имеются у площади и объема.

Поэтому, обобщая понятия длины, площади и объема, мы введем понятие меры, описав свойства последней: любая величина с такими свойствами будет считаться мерой. А именно, **мерой** множества A назовем действительную функцию $\mu(A)$, которая обладает следующими свойствами:

- 1) $\mu(A) \geq 0$,
- 2) $\mu(A_1 \cup A_2) = \mu(A_1) + \mu(A_2)$, если $A = A_1 \cup A_2$, $A_1 \cap A_2 = \emptyset$.

Первое свойство говорит о том, что мера множества выражается действительным неотрицательным числом. Второе свойство означает, что мера множества, разбитого на две непересекающиеся части A_1 и A_2 , равна сумме мер этих частей. Очевидно, что длина, площадь и объем удовлетворяют перечисленным условиям и потому являются мерами в смысле введенного определения. Докажите самостоятельно¹⁾, что $\mu(A) \leq \mu(B)$, если $A \subset B$.

Предположим теперь, что множество $G \subset \mathbb{R}^n$ имеет меру $\mu(G)$ и произвольным образом разбито на части G_1, G_2, \dots, G_n , которые мы будем называть ячейками. Пусть каждая ячейка G_i имеет меру $\mu(G_i)$ и в каждой ячейке произвольным образом выбрана точка P_i . Предположим, что на G задана функция точки $f(P)$, $P(x_1, \dots, x_n) \in G$.

Составим сумму

$$S_n = \sum_{i=1}^n f(P_i) \mu(G_i), \quad (1)$$

которую будем называть **интегральной**. **Диаметром** множества $A \subset \mathbb{R}^n$

назовем величину

$$\text{diam } A = \max_{B, C \in A} \rho(B, C),$$

где $\rho(B, C) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$ — расстояние между двумя точками $B(x_1, \dots, x_n)$ и $C(y_1, \dots, y_n)$ в \mathbb{R}^n .

Интегралом по мере (I рода) от функции f по множеству G называется предел

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max_i \text{diam } G_i \rightarrow 0}} S_n = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max_i \text{diam } G_i \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n f(P_i) \mu(G_i),$$

если он существует и не зависит от способа разбиения множества G на ячейки и выбора в них точек P_i . Будем обозначать такой интеграл

$$\int_G f(P) d\mu.$$

Функцию f естественно назвать **подынтегральной**, так же как выражение $f(P) d\mu$ — **подынтегральным**.

Очевидно, что определения изученных нами интегралов укладываются в эту схему. Свойства тоже аналогичны:

$$1) \int_G (f + g) d\mu = \int_G f d\mu + \int_G g d\mu,$$

$$2) \int_G kf d\mu = k \int_G f d\mu,$$

$$3) \int_{G_1 \cup G_2} f d\mu = \int_{G_1} f d\mu + \int_{G_2} f d\mu, \text{ если } G_1 \cap G_2 = \emptyset.$$

Чтобы сформулировать теорему о существовании интеграла по мере, введем следующие определения.

Прежде всего нам понадобится новый вид окрестности точки. Пусть $U(M)$ — некоторая окрестность точки M из множества $D \subset \mathbb{R}^n$. Назовем **окрестностью** этой **точки M во множестве D** множество $U_D(M) \triangleq U(M) \cap D$ (рис. 1). Например, окрестностью точки M на окружности в \mathbb{R}^2 будет дуга этой окружности (без своих концов), причем, точка M будет располагаться в середине дуги (рис. 2). Точку N множества D будем называть **внутренней во множестве D** , если она принадлежит этому множеству вместе с некоторой своей окрестностью $U_D(N)$. Множество всех внутренних в нем точек множества назовем его **внутренностью**.

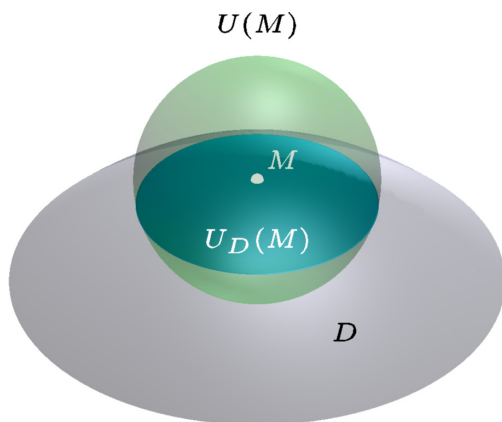


Рис. 1. Окрестность во множестве.

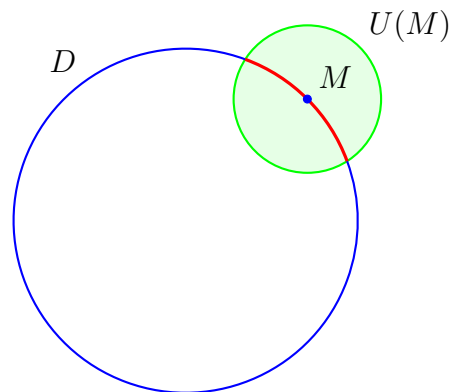


Рис. 2. Окрестность на окружности.

По аналогии с градиентами[†] в \mathbb{R}^2 и \mathbb{R}^3 определим **градиент** многомерной функции f в произвольной точке $P(x_1, \dots, x_n)$:

$$\nabla f(P) = \nabla f(x_1, \dots, x_n) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)^T.$$

Пусть множество $G \subset \mathbb{R}^n$ имеет непустую внутренность, определяется системой уравнений

$$\begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_n, t_1, \dots, t_m) = 0, \\ \dots \\ f_s(x_1, \dots, x_n, t_1, \dots, t_m) = 0, \end{cases}$$

где f_1, \dots, f_s — некоторые непрерывно дифференцируемые функции, и ранг якобиана

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1(P)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1(P)}{\partial x_n} & \frac{\partial f_1(P)}{\partial t_1} & \dots & \frac{\partial f_1(P)}{\partial t_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_s(P)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_s(P)}{\partial x_n} & \frac{\partial f_s(P)}{\partial t_1} & \dots & \frac{\partial f_s(P)}{\partial t_m} \end{vmatrix}$$

равен $l \geq m$. Тогда G называется $(n + m - l)$ -мерной **гладкой поверхностью в пространстве \mathbb{R}^n** .

Часть k -мерной гладкой поверхности также будем считать k -мерной гладкой поверхностью, если внутренность этой части не пуста.

k -мерная поверхность называется **кусочно гладкой**, если после удаления из нее конечного числа гладких поверхностей размерности не выше $k - 1$, она распадается на гладкие k -мерные поверхности.

[†]Лекция «Полный дифференциал».

Например, при $m = 0$ и $s = k$ получим систему уравнений

$$\begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_n) = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f_k(x_1, \dots, x_n) = 0, \end{cases}$$

которая в соответствии с нашим определением описывает $(n - k)$ -мерную поверхность, если ранг якобиана равен $k \leq n - 1$. Можно показать, что равенство ранга якобиана числу k равносильно линейной независимости градиентов $\nabla f_1(P), \dots, \nabla f_k(P)$ в каждой точке $P \in G$. Линейная независимость градиентов обеспечивает отсутствие на поверхности особых точек (например, грани, ребра и вершины куба делают его негладкой поверхностью).

Уравнение $f_1 = x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$ дает пример двумерной поверхности (сферы) в \mathbb{R}^3 , так как левая часть уравнения непрерывно дифференцируема, а якобиан

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x & 2y & 2z \end{vmatrix}$$

имеет нулевой ранг только в точке $(0, 0, 0)$, но она не принадлежит сфере. Часть сферы, имеющая непустую внутренность, например, полусфера, тоже будет двумерной поверхностью в \mathbb{R}^3 .

Если сфера радиуса R задана в сферических координатах:

$$f_1 = x - R \cos \varphi \sin \theta = 0, f_2 = y - R \sin \varphi \sin \theta = 0, f_3 = z - R \cos \theta = 0,$$

то якобиан имеет вид

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} & \frac{\partial f_1}{\partial \varphi} & \frac{\partial f_1}{\partial \theta} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} & \frac{\partial f_2}{\partial \varphi} & \frac{\partial f_2}{\partial \theta} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial y} & \frac{\partial f_3}{\partial z} & \frac{\partial f_3}{\partial \varphi} & \frac{\partial f_3}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & R \sin \varphi \sin \theta & -R \cos \varphi \cos \theta \\ 0 & 1 & 0 & -R \cos \varphi \sin \theta & -R \sin \varphi \cos \theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 & R \sin \theta \end{vmatrix}$$

и, значит, его ранг равен $l = 3$. Так как $n = 3$, $m = 2$, то снова убеждаемся, что сфера — $(3 + 2 - 3) = 2$ -мерная поверхность в \mathbb{R}^3 .

Примером кривой в пространстве может служить пересечение эллиптического параболоида $f_1 = x^2 + y^2 - z = 0$ с плоскостью $f_2 = z - 1 = 0$. Эта кривая является одномерной поверхностью в трехмерном пространстве, так как соответствующий якобиан

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x & 2y & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

имеет ранг 2 (точка $(0; 0)$ не принадлежит кривой).

Если заменить уравнение $z - 1 = 0$ уравнением $z = 0$, то в точке O якобиан уже будет иметь ранг 1 и, следовательно, такая поверхность будет нульмерной (точка).

Если же заменить уравнение $z - 1 = 0$ уравнением $z + 1 = 0$, то получим пустое множество, которое вообще не будет поверхностью.

n -мерную поверхность в \mathbb{R}^n будем также называть **телом** в \mathbb{R}^n . Например, двумерной поверхностью, или телом в \mathbb{R}^2 является круг $f_1 = x^2 + y^2 + t^2 - R^2 = 0, t \in [0; R]$, где R — радиус круга, поскольку якобиан

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial t} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x & 2y & 2t \end{vmatrix}$$

имеет ранг 1 (точка $(0; 0; 0)$ не удовлетворяет уравнению $f_1 = 0$). В данном случае $n = 2, m = 1, l = 1$ и поэтому круг $(2 + 1 - 1) = 2$ -мерная поверхность в \mathbb{R}^2 .

Система уравнений с параметрами $f_1 = x^2 + y^2 + t^2 - 1 = 0, f_2 = z - \tau = 0$, дает цилиндрическое тело в \mathbb{R}^3 , так как

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} & \frac{\partial f_1}{\partial t} & \frac{\partial f_1}{\partial \tau} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} & \frac{\partial f_2}{\partial t} & \frac{\partial f_2}{\partial \tau} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x & 2y & 0 & 2t & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

имеет ранг $l = 2$ (одновременное выполнение равенств $x = 0, y = 0, t = 0$ невозможно в силу первого уравнения), и, поскольку $n = 3, m = 2$ делаем вывод, что цилиндрическое тело является $(3 + 2 - 2) = 3$ -мерной поверхностью в \mathbb{R}^3 .

Точно так же прямоугольник, заданный уравнениями

$$x_1 - t_1 a_1 - (1 - t_1) b_1 = 0, x_2 - t_2 a_2 - (1 - t_2) b_2 = 0, t_1, t_2 \in [0; 1],$$

является двумерной поверхностью в \mathbb{R}^2 . Из уравнений видно, что прямоугольник можно описать и с помощью неравенств $a_1 \leq x_1 \leq b_1, a_2 \leq x_2 \leq b_2$.

По аналогии с прямоугольником в \mathbb{R}^2 и отрезком в \mathbb{R} **n -мерным прямоугольником** в \mathbb{R}^n называется тело, удовлетворяющее неравенствам

$$a_1 \leq x_1 \leq b_1, \dots, a_n \leq x_n \leq b_n, a_i, b_i \in \mathbb{R}.$$

Теорема 1 (существования интеграла по мере). *Если функция $f(M)$ непрерывна на ограниченном замкнутом множестве $G \subset \mathbb{R}^n$, представляющем собой k -мерную поверхность в \mathbb{R}^n с кусочно-гладкой границей, за исключением конечного числа поверхностей размерности не выше $k-1$, то интеграл по мере существует.*

Чтобы сформулировать дальнейшее утверждение, введем еще одно понятие.

Поверхность в \mathbb{R}^n называется **связной**, если любые две ее точки можно соединить одномерной поверхностью (кривой), целиком лежащей на поверхности. Кривая, соединяющая две точки, P и Q в \mathbb{R}^n , может быть задана, например, системой уравнений:

$$\begin{cases} f_1 [Pt + Q(1-t)] = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f_{n-1} [Pt + Q(1-t)] = 0, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Теорема 2 (о среднем). Пусть функция $f(P)$ непрерывна на ограниченном замкнутом связном множестве G . Тогда найдется точка $M \in G$, для которой выполняется равенство

$$\int_G f(P) d\mu = f(M) \mu(G).$$

Понятно, что сформулированное понятие интеграла по мере позволяет описать все изученные нами интегралы. Но мы пойдем дальше и введем понятие кратного, или n -кратного интеграла в \mathbb{R}^n . Для этого нам понадобится только задать в \mathbb{R}^n меру n -мерной поверхности, удовлетворяющую перечисленным выше свойствам меры 1) и 2).

2 n -кратный интеграл

Сначала зададим эту меру для n -мерного прямоугольника Π в \mathbb{R}^n . По аналогии с длиной отрезка, площадью обычного прямоугольника и объемом параллелепипеда **мерой прямоугольника** Π в \mathbb{R}^n назовем величину

$$\mu(\Pi) = (b_1 - a_1) \dots (b_n - a_n).$$

Если n -мерные прямоугольники Π_1, \dots, Π_m не пересекаются, то мерой их объединения будем называть сумму их мер:

$$\mu(\Pi_1 \cup \dots \cup \Pi_m) = \mu(\Pi_1) + \dots + \mu(\Pi_m).$$

Введенная таким образом мера для n -мерных прямоугольников обладает свойствами 1) и 2) меры.

Пусть в \mathbb{R}^n задано тело G . Проведем гиперплоскости $x_i = k_i h$; $k_i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$; $h = 2^{-m}$, $m \in \mathbb{N}$, которые задают в \mathbb{R}^n **решетку**, причем, h

Рис. 3. ● внутренняя и ●● внешняя меры множества, — его граница

называется **шагом решетки**. Очевидно, что решетка разбивает пространство на непересекающиеся n -мерные квадраты, которые мы будем называть ячейками. Совокупность ячеек-квадратов, целиком принадлежащих G , назовем **внутренним телом** G и обозначим \check{G}_m . Если к внутреннему телу G добавить ячейки, которые содержат как точки G , так и точки, ему не принадлежащие, получим **внешнее тело** G , которое обозначим \hat{G}_m . Все это для случая двумерного пространства изображено на рис. 3. Щелкая на нем мышкой, можно увидеть, как увеличение m улучшает точность приближения к множеству G множеств \check{G}_m и \hat{G}_m .

Очевидно, что $\mu(\check{G}_m) \leq \mu(\hat{G}_m)$, причем, если $\check{G}_m = \emptyset$, то считают, что $\mu(\check{G}_m) = 0$. Ясно также, что при $m < n$ имеем $\check{G}_m \subset \check{G}_n$ и $\hat{G}_n \subset \hat{G}_m$; следовательно, $\mu(\check{G}_m) \leq \mu(\check{G}_n)$ и $\mu(\hat{G}_n) \leq \mu(\hat{G}_m)$. Таким образом, справедлива цепочка неравенств

$$\mu(\check{G}_1) \leq \mu(\check{G}_2) \leq \dots \leq \mu(\check{G}_m) \leq \mu(\hat{G}_m) \leq \mu(\hat{G}_{m-1}) \leq \dots \leq \mu(\hat{G}_1). \quad (2)$$

Так как величины $\mu(\check{G}_m)$ возрастают и ограничены сверху числом $\mu(\hat{G}_1)$, то существует конечный предел

$$\mu(\check{G}) \triangleq \lim_{m \rightarrow \infty} \mu(\check{G}_m),$$

который называется **внутренней мерой** множества G .

Величины $\mu(\hat{G}_m)$, наоборот, убывают и ограничены снизу числом $\mu(\check{G}_1)$, поэтому существует конечный предел

$$\mu(\hat{G}) \triangleq \lim_{m \rightarrow \infty} \mu(\hat{G}_m),$$

называемый **внешней мерой** множества G .

Из цепочки неравенств (2) следует, что эти меры связаны неравенством

$$\mu(\check{G}) \leq \mu(\hat{G}).$$

Множество G называется **измеримым**, если $\mu(\check{G}) = \mu(\hat{G})$, а его **мерой** тогда называется величина

$$\mu(G) \triangleq \mu(\check{G}) = \mu(\hat{G});$$

в противном случае множество G называется **неизмеримым**. Можно показать, что мера $\mu(G)$ обладает свойствами 1) и 2) меры.

Обозначим ∂G границу множества G . Совокупность покрывающих ее ячеек имеет меру $\mu(\hat{G}_m) - \mu(\check{G}_m)$, поэтому

$$\mu(\partial G) = \lim_{m \rightarrow \infty} \mu(\hat{G}_m) - \lim_{m \rightarrow \infty} \mu(\check{G}_m) = \mu(\hat{G}) - \mu(\check{G}).$$

Следовательно, множество G измеримо тогда и только тогда, когда его граница имеет меру, равную 0.

Теперь введенное нами понятие интеграла по мере можно применить к любому измеримому в пространстве \mathbb{R}^n множеству G . Полученный таким способом интеграл называется **кратным**, или **n -кратным** интегралом по множеству G и обозначается (далее фигурную скобку будем опускать)

$$\overbrace{\int \cdots \int}_G^n f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n. \quad (3)$$

Приравнивая для этого случая интеграл по мере n -кратному интегралу, приходим к равенству

$$\int_G f(P) d\mu = \int_G \cdots \int_G f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n. \quad (4)$$

3 Вычисление n -кратного интеграла

Остается по аналогии с двойным и тройным интегралами научиться вычислять n -кратный интеграл. Пусть область интегрирования задана в виде системы неравенств

$$G = \{(x_1, \dots, x_n) : a \leq x_1 \leq b, \varphi_2(x_1) \leq x_2 \leq \psi_2(x_1), \dots, \\ \varphi_n(x_1, \dots, x_{n-1}) \leq x_n \leq \psi_n(x_1, \dots, x_{n-1})\}.$$

Тогда справедлива формула

$$\int \cdots \int_G f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n =$$

$$= \int_a^b dx_1 \int_{\varphi_2(x_1)}^{\psi_2(x_1)} dx_2 \dots \int_{\varphi_n(x_1, \dots, x_{n-1})}^{\psi_n(x_1, \dots, x_{n-1})} f(x_1, \dots, x_n) dx_n,$$

если существуют все интегралы в ее левой и правой частях. Интеграл справа называется **повторным** и вычисляется последовательно: сначала находится самый внутренний интеграл по переменной x_n , а остальные переменные считаются временно постоянными; затем берется интеграл по x_{n-1} и т. д.; последним вычисляется интеграл по переменной x_1 .

4 Замена переменных

Предположим, что для упрощения вычисления n -кратного интеграла мы хотим ввести новые переменные. Пусть это будут переменные t_1, \dots, t_n , принимающие значения из области $G' \subset \mathbb{R}^n$. Предположим, что новые переменные связаны с переменными x_1, \dots, x_n соотношениями

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1(t_1, \dots, t_n), \\ x_2 &= x_2(t_1, \dots, t_n), \\ &\dots\dots\dots \\ x_n &= x_n(t_1, \dots, t_n), \end{aligned}$$

причем, правые части равенств являются непрерывно дифференцируемыми функциями, осуществляющими взаимно однозначное отображение области G' на область G . Если якобиан этого отображения

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial t_1} & \dots & \frac{\partial x_1}{\partial t_n} \\ \dots\dots\dots \\ \frac{\partial x_n}{\partial t_1} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial t_n} \end{vmatrix}$$

отличен от нуля в области G' , то n -кратный интеграл можно вычислить по формуле

$$\int \cdots \int_G f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n =$$

$$= \int \cdots \int_{G'} f[x_1(t_1, \dots, t_n), \dots, x_n(t_1, \dots, t_n)] |J| dt_1 \dots dt_n.$$

Примеры применения полученных формул см. в Приложении²⁾. Там же³⁾ показано, как вычислять кратные интегралы в системе *Mathematica*.

Приложение

1) Вспоминая свойства множеств[†] и используя свойства меры, докажем сначала формулу

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B).$$

Поскольку $B = B \cap U = B \cap (A \cup \bar{A}) = (A \cap B) \cup (B \cap \bar{A})$, то по второму свойству меры, так как множества $A \cap B$ и $B \cap \bar{A}$ не пересекаются, имеем $\mu(B) = \mu(A \cap B) + \mu(B \cap \bar{A})$, и, значит,

$$\mu(B \cap \bar{A}) = \mu(B) - \mu(A \cap B). \quad (\text{П1})$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} A \cup B &= (A \cup B) \cap U = (A \cup B) \cap (A \cup \bar{A}) = \\ &= (A \cap A) \cup (A \cap B) \cup (A \cap \bar{A}) \cup (B \cap \bar{A}) = A \cup (A \cap B) \cup (B \cap \bar{A}) = \\ &= A \cup (B \cap \bar{A}) \end{aligned} \quad (\text{П2})$$

и снова-таки по второму свойству меры $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B \cap \bar{A})$. Подставляя в полученное равенство вместо $\mu(B \cap \bar{A})$ его выражение из (П1), получаем доказываемую формулу.

Если $A \subset B$, то из (П2) имеем $B = B \cup A = A \cup (B \cap \bar{A})$. Поэтому

$$\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \cap \bar{A}),$$

откуда

$$\mu(B - A) = \mu(B) - \mu(A).$$

Так как $\mu(B - A) \geq 0$, то

$$A \subset B \implies \mu(A) \leq \mu(B).$$

2) Объем n -мерного шара

По аналогии с кругом в пространстве \mathbb{R}^2 (см. выше) n -мерный шар радиуса R можно определить как n -мерную поверхность в пространстве \mathbb{R}^n , описываемую уравнением

$$x_1^2 + \dots + x_n^2 + t^2 - R^2 = 0.$$

Из этого следует, что такой шар можно описать и неравенством

$$x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq R^2.$$

При $n = 1$ шар является отрезком $[-R, R]$, при $n = 2$ — кругом на плоскости, при $n = 3$ — обычным шаром. Найдем объем n -мерного шара.

Из теоремы о среднем при $f \equiv 1$ следует, что n -кратный интеграл (3) равен объему тела. Поэтому объем n -мерного шара выражается формулой

$$V_n = \int \dots \int_{x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq R^2} dx_1 \dots dx_n.$$

Если в ней сделать замену переменных $x_i = R z_i$, $dx_i = R dz_i$, $i = \overline{1, n}$, получим, что

$$V_n = R^n \int \dots \int_{z_1^2 + \dots + z_n^2 \leq 1} dz_1 \dots dz_n = C_n R^n, \quad (\text{П3})$$

[†]Лекция «Логика и множества».

где C_n — объем n -мерного шара единичного радиуса. Эту величину можно представить следующим образом

$$C_n = \int \cdots \int_{z_1^2 + \dots + z_n^2 \leq 1} dz_1 \dots dz_n = \int_{-1}^1 dz_n \int \cdots \int_{z_1^2 + \dots + z_{n-1}^2 \leq 1 - z_n^2} dz_1 \dots dz_{n-1}.$$

Внутренний интеграл равен объему $(n-1)$ -мерного шара радиуса $\sqrt{1 - z_n^2}$ и, следовательно, по формуле (ПЗ) получаем

$$C_n = C_{n-1} \int_{-1}^1 (1 - z_n^2)^{\frac{n-1}{2}} dz_n.$$

Выполним еще одну замену переменной: $z_n = \sin \varphi$, $dz_n = \cos \varphi d\varphi$. Тогда

$$C_n = C_{n-1} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 - \sin^2 \varphi)^{\frac{n-1}{2}} \cos \varphi d\varphi = C_{n-1} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^n \varphi d\varphi,$$

или

$$C_n = C_{n-1} I_n, \quad (\text{П4})$$

где

$$I_n = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^n \varphi d\varphi.$$

Вычислим отдельно интеграл I_n . Прежде всего найдем, что

$$I_1 = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \varphi d\varphi = \sin \varphi \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = 2,$$

$$I_2 = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 \varphi d\varphi = \frac{1}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 + \cos 2\varphi) d\varphi = \frac{1}{2} \left(\varphi + \frac{1}{2} \sin 2\varphi \right) \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{\pi}{2}.$$

Кроме того, при $n \geq 2$ имеем

$$\begin{aligned} I_n &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^{n-1} \varphi \cos \varphi d\varphi = \\ &= \langle u = \cos^{n-1} \varphi, dv = \cos \varphi d\varphi, du = -(n-1) \cos^{n-2} \varphi \sin \varphi d\varphi, v = \sin \varphi \rangle = \\ &= \underbrace{\sin \varphi \cos^{n-1} \varphi \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2}}_0 + \\ &\quad + (n-1) \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2 \varphi \cos^{n-2} \varphi d\varphi = (n-1) \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 - \cos^2 \varphi) \cos^{n-2} \varphi d\varphi = \\ &= (n-1) \left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^{n-2} \varphi d\varphi - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^n \varphi d\varphi \right) = (n-1) (I_{n-2} - I_n). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}. \quad (\text{П5})$$

Используя эту зависимость, методом математической индукции докажем, что для нечетных $n = 2k + 1$ интеграл I_n вычисляется по формуле

$$I_{2k+1} = 2 \cdot \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}, \quad (\text{П6})$$

где $(2k)!! = 1 \cdot 2 \cdot 4 \dots \cdot 2k$, причем, $0!! = 1$, а $(2k + 1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \dots \cdot (2k + 1)$, причем, $1!! = 1$.

Для $n = 1$ ($k = 0$) доказываемая формула справедлива, так как мы уже нашли, что $I_1 = 2$, причем, это отвечает формуле (П6). Пусть последняя верна для некоторого $n = 2k + 1 \geq 1$, докажем ее справедливость для $n + 2 = 2k + 3$. Действительно, используя формулу (П5) и формулу (П6), справедливую по предположению индукции, получим

$$I_{2k+3} = \frac{2k+2}{2k+3} I_{2k+1} = \frac{2k+2}{2k+3} \cdot 2 \cdot \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!} = 2 \cdot \frac{(2k+2)!!}{(2k+3)!!}.$$

Это соответствует формуле (П6) при k , увеличенном на 1. Тем самым формула (П6) доказана.

Аналогичным образом доказывается формула

$$I_{2k} = \pi \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}. \quad (\text{П7})$$

Теперь покажем методом математической индукции, что

$$C_{2k} = \frac{(2\pi)^k}{(2k)!!}, \quad C_{2k+1} = 2 \cdot \frac{(2\pi)^k}{(2k+1)!!}. \quad (\text{П8})$$

Обе формулы справедливы при $k = 1$, так как C_2 — площадь круга единичного радиуса, равная π , а C_3 — объем обычного шара единичного радиуса, который равен $4\pi/3$.

Пусть формулы (П8) выполняются для некоторого $k \geq 1$, докажем их справедливость для $k + 1$. Из равенств (П4), (П7), (П6) и предположений индукции находим

$$C_{2k+2} = C_{2k+1} I_{2k+2} = 2 \cdot \frac{(2\pi)^k}{(2k+1)!!} \cdot \pi \frac{(2k+1)!!}{(2k+2)!!} = \frac{(2\pi)^{k+1}}{(2k+2)!!},$$

$$C_{2k+3} = C_{2k+2} I_{2k+3} = \frac{(2\pi)^{k+1}}{(2k+2)!!} \cdot 2 \cdot \frac{(2k+2)!!}{(2k+3)!!} = 2 \cdot \frac{(2\pi)^{k+1}}{(2k+3)!!},$$

что отвечает формулам (П8) при k , увеличенном на 1. Полученные выражения и формула (П3) дают искомый результат:

$$V_{2k} = \frac{(2\pi)^k}{(2k)!!} R^{2k}, \quad V_{2k+1} = 2 \cdot \frac{(2\pi)^k}{(2k+1)!!} R^{2k+1}.$$

Например,

$$V_{10} = \frac{(2\pi)^5}{10!!} R^{10} = \frac{2^5 \pi^5 R^{10}}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10} = \frac{\pi^5 R^{10}}{120}.$$

Закон Кулона для двух тел

Сначала запишем закон Кулона для двух точечных зарядов:

$$F = k \frac{q_1 q_2}{r^2}, \quad (\text{П9})$$

где F — сила взаимодействия зарядов q_1 и q_2 , k — коэффициент пропорциональности, r — расстояние между зарядами.

Пусть теперь в \mathbb{R}^3 имеются два тела, G и Γ , заряды которых определяются, соответственно, плотностями зарядов $\alpha(M)$ и $\beta(N)$, где $M(x_1, x_2, x_3)$ — точка из G , а $N(y_1, y_2, y_3)$ — точка из Γ . Пусть для некоторого $m \in \mathbb{N}$ множество \check{G}_m — внутреннее тело G , а $\check{\Gamma}_m$ — внутреннее тело Γ . Выберем в каждой ячейке $\Delta G_{i,m} \subset \check{G}_m$ произвольным образом точку $P_{i,m}$, а в каждой ячейке $\Delta \Gamma_{j,m} \subset \check{\Gamma}_m$ — произвольным образом точку $Q_{j,m}$. Приближенно можно считать,

что сила взаимодействия между ячейками $\Delta G_{i,m}$ и $\Delta \Gamma_{j,m}$ равна силе взаимодействия между точками $P_{i,m}$ и $Q_{j,m}$, если допустить, что в этих точках сосредоточены заряды $\alpha(P_{i,m})\mu_1(P_{i,m})$ и $\beta(Q_{j,m})\mu_2(Q_{j,m})$, соответственно, где μ_1 — мера множества G , а μ_2 — мера множества Γ . Тогда по формуле (П9) получим, что сила взаимодействия между ячейками $\Delta G_{i,m}$ и $\Delta \Gamma_{j,m}$ приближенно равна

$$F_{ij,m} \approx k \frac{\alpha(P_{i,m})\mu_1(P_{i,m})\beta(Q_{j,m})\mu_2(Q_{j,m})}{r^2(P_{i,m}, Q_{j,m})},$$

где $r^2(P_{i,m}, Q_{j,m})$ — расстояние между точками $P_{i,m}$ и $Q_{j,m}$. Суммируя силы взаимодействия $F_{ij,m}$ между всеми парами ячеек объектов G и Γ , приходим к приближенной формуле силы взаимодействия этих объектов

$$F \approx \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^l F_{ij,m} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^l k \frac{\alpha(P_{i,m})\beta(Q_{j,m})}{r^2(P_{i,m}, Q_{j,m})} \mu_1(P_{i,m})\mu_2(Q_{j,m}), \quad (\text{П10})$$

где n, l — число внутренних ячеек G и Γ , соответственно.

Рассмотрим тело $V = G \cup \Gamma$. Если считать его мерой функцию $\mu(P, Q) = \mu_1(P)\mu_2(Q)$, $P \in G, Q \in \Gamma$, то правая часть формулы (П10) представляет собой интегральную сумму для функции $k\alpha(P)\beta(Q)/r^2(P, Q)$ по множеству V . В результате, учитывая формулу (4), получаем как интеграл по мере, так и шестикратный интеграл, выражающие силу взаимодействия объектов G и Γ :

$$F = \int_V \frac{k\alpha(P)\beta(Q)}{r^2(P, Q)} d\mu = \iiint_V \iiint_V \frac{k\alpha(P)\beta(Q)}{r^2(P, Q)} dx_1 dx_2 dx_3 dy_1 dy_2 dy_3, \quad (\text{П11})$$

$d\mu(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3) = d\mu_1(x_1, x_2, x_3) d\mu_2(y_1, y_2, y_3)$, $(x_1, x_2, x_3) \in G, (y_1, y_2, y_3) \in \Gamma$.

Интересно, что эту формулу можно использовать не только для трехмерных тел, но и для двумерных поверхностей, кривых, отрезков и точек, если ввести в обиход так называемую дельта-функцию. Дельта-функция — это довольно странная функция, которую и функцией не хочется признавать, но куда деваться, если она упрощает решение множества задач! Обозначают ее $\delta(x)$, а определяют, например, физики, таким образом:

$$\delta(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0; \\ \infty, & x = 0; \end{cases} \quad , \quad \int_{-c}^d \delta(x) dx = 1; \quad c, d > 0. \quad (\text{П12})$$

Ну, с тем, что она принимает бесконечное значение в нуле еще можно смириться, тем более, что мы с вами уже используем расширенное множество действительных чисел $\overline{\mathbb{R}}$, в котором как раз имеется символ ∞ . Но вот то, что интеграл от такой «бесконечной функции» равен 1, это — как-то не укладывается... Но дело можно поправить следующими рассуждениями.

Возьмем равнобедренный треугольник высоты $1/h$, основание которого занимает положение отрезка $[-h, h]$ на оси Ox (анимационный рис. 4, а)), так что его площадь будет равна 1. Уменьшая h , мы будем получать треугольники со все большей высотой и все более узким основанием, причем все они будут иметь единичную площадь. Но, поскольку площадь выражается определенным интегралом, мы приходим в пределе при $h \rightarrow 0$ ко второй из формул (П12), в которой роль дельта-функции будет играть предел нашей функции-треугольника. Конечно, доказательством это трудно назвать, но некоторое прояснение в понимании может возникнуть. Кроме того, еще и график такого предельного устремления треугольника ввысь можно изобразить, как это выполнено на рис. 4, б). Да, вот такая красная стрелка и является

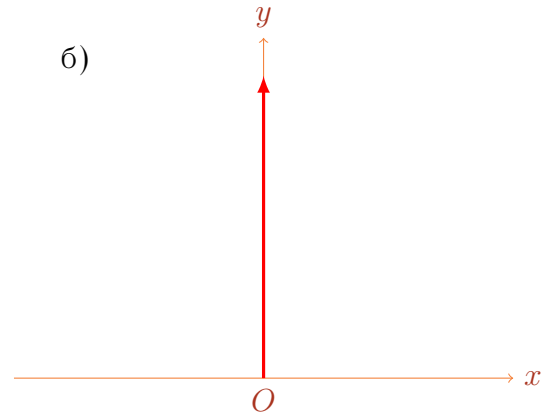


Рис. 4. Аппроксимация дельта-функции треугольниками.

изображением дельта-функции! Что ж, график тоже странен, но и к нему можно привыкнуть. Привыкли же мы к бесконечности, хоть и не понимаем, что это такое!

Кстати, надо заметить, что не только треугольники, но и любые другие фигуры, сохраняющие единичную площадь при своем изменении, могут образовывать дельта-функцию.

Можно обосновать введение дельта-функции и на основе единичной ступенчатой функции. Вначале вспомним, что такое единичная ступенчатая функция[†], а затем попытаемся приблизить ее семейством арктангенсов вида

$$g_\alpha(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \alpha x.$$

Анимационный рис. 5, а) показывает, как функция $g_\alpha(x)$ при увеличении α становится все более похожей на единичную ступенчатую функцию. Естественно считать, что предельная функция $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} g_\alpha(x)$ и будет единичной ступенчатой функцией, которую мы обозначим $H(x)$. Действительно,

$$H(x) = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} g_\alpha(x) = \begin{cases} 1, & x > 0; \\ \frac{1}{2}, & x = 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Не вдаваясь в вопросы правомерности следующих выкладок, найдем производную функции $H(x)$:

$$\begin{aligned} H'(x) &= \lim_{\alpha \rightarrow \infty} g'_\alpha(x) = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \alpha x \right)' = \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{\alpha}{\pi} \cdot \frac{1}{1 + \alpha^2 x^2} = \begin{cases} \infty, & x = 0; \\ 0, & x \neq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Мы видим, что дельта функция является «производной» единичной ступенчатой функции:

$$\delta(x) = H'(x).$$

Рис. 5, б) демонстрирует приближение функции $g'_\alpha(x)$ к $\delta(x)$ при $\alpha \rightarrow \infty$.

[†]Лекция «Непрерывность функции», Приложение.

Рис. 5. Еще одна аппроксимация дельта-функции.

«Докажем» вторую из формул (П12), учитывая, что $c, d > 0$:

$$\int_{-c}^d \delta(x) dx = \int_{-c}^d H'(x) dx = H(x) \Big|_{-c}^d = H(d) - H(-c) = 1 - 0 = 1.$$

Наиболее часто в приложениях используется формула

$$\int_c^d f(x) \delta(x - a) dx = f(a), \quad c < a < d, \quad (\text{П13})$$

где $f(x)$ — некоторая функция.

«Докажем» и ее, интегрируя по частям:

$$\begin{aligned} \int_c^d f(x) \delta(x - a) dx &= \langle t = x - a, dt = dx \rangle = \int_{c-a}^{d-a} f(t + a) \delta(t) dt = \\ &= \int_{c-a}^{d-a} f(t + a) H'(t) dt = \\ &= \langle u = f(t + a), dv = H'(t) dt, du = f'(t + a), v = H(t) \rangle = \\ &= f(t + a) H(t) \Big|_{c-a}^{d-a} - \int_{c-a}^{d-a} f'(t + a) H(t) dt = \\ &= f(d) H(d - a) - f(c) H(c - a) - \int_0^{d-a} f'(t + a) dt = \\ &= f(d) - f(t + a) \Big|_0^{d-a} = f(d) - f(d) + f(a) = f(a). \end{aligned}$$

Здесь было учтено, что $d - a > 0, c - a < 0$, и поэтому $H(d - a) = 1, H(c - a) = 0$.

Дельта-функция дает возможность записать плотность заряда q , сосредоточенного в точке $M(x_M, y_M, z_M)$, как $\gamma(x, y, z) \delta(x - x_M) \delta(y - y_M) \delta(z - z_M)$, где γ — плотность заряда в пространстве. Так как заряд выражается тройным интегралом от плотности, то, помещая точку M в параллелепипед $x_1 \leq x \leq x_2, y_1 \leq y \leq y_2, z_1 \leq z \leq z_2$, получим

$$q = \iiint_V \gamma(x, y, z) \delta(x - x_M) \delta(y - y_M) \delta(z - z_M) dV =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1}^{y_2} dy \int_{z_1}^{z_2} \gamma(x, y, z) \delta(x - x_M) \delta(y - y_M) \delta(z - z_M) dz = \\
&= \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1}^{y_2} \gamma(x, y, z_M) \delta(x - x_M) \delta(y - y_M) dy = \\
&= \int_{x_1}^{x_2} \gamma(x, y_M, z_M) \delta(x - x_M) dx = \gamma(x_M, y_M, z_M).
\end{aligned}$$

Таким образом, заряд точки равен пространственной плотности заряда в этой точке.

Точно так же, если требуется найти заряд q отрезка с концами $(p; s; 0)$ и $(p; -s; 0)$, зададим плотность заряда отрезка как $\gamma(x, y, z) \delta(x - p) \delta(z)$ и погрузим его в параллелепипед $x_1 \leq x \leq x_2$, $-s \leq y \leq s$, $-z_1 \leq z \leq z_1$, $z_1 > 0$. Далее найдем, что

$$\begin{aligned}
q &= \iiint_V \gamma(x, y, z) \delta(x - p) \delta(z) dV = \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{-s}^s dy \int_{-z_1}^{z_1} \gamma(x, y, z) \delta(x - p) \delta(z) dz = \\
& \hspace{15em} \text{(П14)} \\
&= \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{-s}^s \gamma(x, y, 0) \delta(x - p) dy = \int_{x_1}^{x_2} [\eta(x, s, 0) - \eta(x, -s, 0)] \delta(x - p) dx = \\
&= \eta(p, s, 0) - \eta(p, -s, 0),
\end{aligned}$$

где $\eta(p, y, 0)$ — первообразная для функции $\gamma(p, y, 0)$ по переменной y . Если взять ее в виде

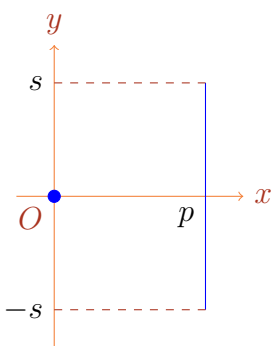
$$\eta(p, y, 0) = \int_{y_0}^y \gamma(p, t, 0) dt,$$

то при постоянной плотности заряда $\gamma(x, y, z) \equiv \bar{\gamma}$ получим

$$\eta(p, y, 0) = \int_{y_0}^y \bar{\gamma} dt = \bar{\gamma} \int_{y_0}^y dt = \bar{\gamma} (y - y_0).$$

Тогда из формулы (П14) найдем, что $q = \bar{\gamma} (s - y_0) - \bar{\gamma} (-s - y_0) = 2s\bar{\gamma}$.

Подобным же образом, исходя из объемной плотности заряда, можно вычислять заряды кривых и двумерных поверхностей, не являющихся трехмерными объектами.



Пример П1. Найти силу Кулона при взаимодействии точечного заряда q_1 , помещенного в начало координат, и заряженного отрезка с концами $(p; s; 0)$ и $(p; -s; 0)$, имеющего заряд $q_2 = 2s\bar{\gamma}$.

Решение. Обращаясь к формуле (П11), представим плотности зарядов точки («тело» G) и отрезка («тело» Γ) в виде выражений, записанных с помощью дельта-функций: $\alpha = q_1 \delta(x_1) \delta(x_2) \delta(x_3)$,

$\beta = 2s\bar{\gamma} \delta(y_1 - p) \delta(y_3)$. Погружая оба «тела» в шестимерный параллелепипед

$$-1 \leq x_1 \leq 1, -1 \leq y \leq 1, -1 \leq z \leq 1, p-1 \leq y_1 \leq p+1, -s \leq y_2 \leq s, -1 \leq y_3 \leq 1,$$

из формулы (П11) получаем

$$\begin{aligned}
F &= 2kq_1 s \bar{\gamma} \cdot \\
&\cdot \int_{-1}^1 dx_1 \int_{-1}^1 dx_2 \int_{-1}^1 dx_3 \int_{p-1}^{p+1} dy_1 \int_{-s}^s dy_2 \int_{-1}^1 \frac{\delta(x_1) \delta(x_2) \delta(x_3) \delta(y_1 - p) \delta(y_3)}{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2} dy_3 =
\end{aligned}$$

$$= 2kq_1 s \bar{\gamma} \int_{-s}^s \frac{1}{y_2^2 + p^2} dy_2 = \frac{2kq_1 s \bar{\gamma}}{p} \operatorname{arctg} \frac{y_2}{p} \Big|_{-s}^s = \frac{4kq_1 s \bar{\gamma}}{p} \operatorname{arctg} \frac{s}{p}.$$

□

3) Вообще говоря, *Mathematica* умеет вычислять n -кратные интегралы и при $n > 3$, но скорость вычислений и способность к вычислениям с ростом n заметно уменьшаются.

Удалось, например, вычислить аналитически объем 6-мерного тетраэдра вида

$$0 \leq x_1 \leq 1, 0 \leq x_2 \leq 1 - x_1, 0 \leq x_3 \leq 1 - x_1 - x_2, 0 \leq x_4 \leq 1 - x_1 - x_2 - x_3, \\ 0 \leq x_5 \leq 1 - x_1 - x_2 - x_3 - x_4, 0 \leq x_6 \leq 1 - x_1 - x_2 - x_3 - x_4 - x_5.$$

Выглядело это так:

$$\int_0^1 \int_0^{1-x_1} \int_0^{1-x_1-x_2} \int_0^{1-x_1-x_2-x_3} \int_0^{1-x_1-x_2-x_3-x_4} \int_0^{1-x_1-x_2-x_3-x_4-x_5} dx_6 dx_5 dx_4 dx_3 dx_2 dx_1 \\ \frac{1}{720}$$

Ответ наводит на мысль, что объем n -мерного тетраэдра, возможно, равен $1/n!$.

Затем была предпринята попытка найти по формуле (П11) силу притяжения двух трехмерных шаров. Один шар, единичного радиуса, помещался в начале координат, а второй, радиуса 2 – в точке (5; 0; 0). Были использованы сферические координаты:

$$x_1 = r_1 \operatorname{Cos}[f_1] \operatorname{Sin}[t_1]; \\ x_2 = r_1 \operatorname{Sin}[f_1] \operatorname{Sin}[t_1]; \\ x_3 = r_1 \operatorname{Cos}[t_1]; \\ y_1 = 5 + r_2 \operatorname{Cos}[f_2] \operatorname{Sin}[t_2]; \\ y_2 = r_2 \operatorname{Sin}[f_2] \operatorname{Sin}[t_2]; \\ y_3 = r_2 \operatorname{Cos}[t_2];$$

Из теории матриц известно, что якобиан такого преобразования равен произведению якобианов для функций x_1, x_2, x_3 и функций y_1, y_2, y_3 , вычисленных отдельно. Но поскольку мы этого «не проходили», то мы просто вычислим требуемый якобиан:

$$\operatorname{Det} \begin{bmatrix} \partial_{r_1} x_1 & \partial_{f_1} x_1 & \partial_{t_1} x_1 & \partial_{r_2} x_1 & \partial_{f_2} x_1 & \partial_{t_2} x_1 \\ \partial_{r_1} x_2 & \partial_{f_1} x_2 & \partial_{t_1} x_2 & \partial_{r_2} x_2 & \partial_{f_2} x_2 & \partial_{t_2} x_2 \\ \partial_{r_1} x_3 & \partial_{f_1} x_3 & \partial_{t_1} x_3 & \partial_{r_2} x_3 & \partial_{f_2} x_3 & \partial_{t_2} x_3 \\ \partial_{r_1} y_1 & \partial_{f_1} y_1 & \partial_{t_1} y_1 & \partial_{r_2} y_1 & \partial_{f_2} y_1 & \partial_{t_2} y_1 \\ \partial_{r_1} y_2 & \partial_{f_1} y_2 & \partial_{t_1} y_2 & \partial_{r_2} y_2 & \partial_{f_2} y_2 & \partial_{t_2} y_2 \\ \partial_{r_1} y_3 & \partial_{f_1} y_3 & \partial_{t_1} y_3 & \partial_{r_2} y_3 & \partial_{f_2} y_3 & \partial_{t_2} y_3 \end{bmatrix} // \operatorname{FullSimplify} \\ r_1^2 r_2^2 \operatorname{Sin}[t_1] \operatorname{Sin}[t_2]$$

Применение оператора `Integrate` результата не дало: расчеты по формуле (П11) *Mathematica* так затянула, что пришлось их прервать.

Далее был испытан оператор `NIntegrate`:

$$\operatorname{NIntegrate} \left[\frac{r_1^2 r_2^2 \operatorname{Sin}[t_1] \operatorname{Sin}[t_2]}{(x_1 - y_1)^3 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2}, \{r_1, 0, 1\}, \{f_1, 0, 2\pi\}, \{t_1, 0, \pi\}, \right. \\ \left. \{r_2, 0, 2\}, \{f_2, 0, 2\pi\}, \{t_2, 0, \pi\} \right]$$

5.7125

правда, прежде чем выдать ответ, *Mathematica* разразилась длинной тирадой о тех трудностях, которые ей пришлось преодолеть, выполняя расчеты, и в заключение дала понять, что не следует надеяться на хорошую точность результата.

Имеется в этой системе и своя дельта-функция, которая именуется `DiracDelta` (функция Дирака). В нуле она не считается равной бесконечности, а предполагается просто неопределенной:

```
DiracDelta[0]
DiracDelta[0]
```

Впрочем, все остальное совпадает с нашими представлениями, например, *Mathematica* знает вторую из формул (П12) и формулу (П13):

```
Assuming [c > 0 && d > 0, ∫-cd DiracDelta[x] dx]
1
Assuming [c < a < d, ∫cd f[x] DiracDelta[x-a] dx]
f[a]
```

Традиционная форма записи дельта-функции в системе *Mathematica* такая же, как у нас:

```
DiracDelta[x] // TraditionalForm
δ(x)
```

Интеграл от дельта-функции равен единичной ступенчатой функции:

```
∫ DiracDelta[x] dx
HeavisideTheta[x]
```

которая называется `HeavisideTheta` (тета-функция Хевисайда) и которая в отличие от использованной нами функции $H(x)$ не определена в нуле и в традиционной форме обозначается по-другому:

```
HeavisideTheta[0]
HeavisideTheta[0]
HeavisideTheta[x] // TraditionalForm
θ(x)
```

Тем не менее ее производная, как и положено, равна дельта-функции:

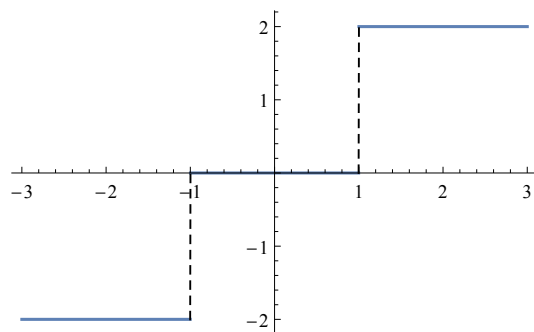
```
∂x HeavisideTheta[x]
DiracDelta[x]
```

Дельта-функция и функция Хевисайда позволяют записать разрывную функцию и ее производную едиными выражениями. Например,

```
f[x_] := 2 HeavisideTheta[x - 1] - 2 HeavisideTheta[-x - 1]
D[f[x], x]
2 DiracDelta[-1 + x] + 2 DiracDelta[1 + x]
```

Для наглядности построим график функции $f(x)$:

```
Plot[f[x], {x, -3, 3}]
```



Литература

- [1] Бугров Я.С., Никольский С.М. *Вышая математика. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного*. – М.: Наука, 1985, – с. 135-150, 453-458.