Ротор и дивергенция

Волченко Ю.М.

Содержание лекции

Интегральные теоремы векторного анализа. Формула Грина для связной и многосвязной области. Формула Стокса. Ротор. Его инвариантное определение и вычисление. Формула Остроградского. Дивергенция. Ее инвариантное определение и вычисление.

Анимация превращения односвязной области в многосвязную.
Анимация работает только в программе Acrobat Reader!

Вычисление локальных характеристик поля в системе *Mathematica*.

23 июля 2015 г.

Нам предстоит рассмотреть и доказать несколько формул, имеющих важное значение для теории векторных полей, в частности, для теории электромагнитного поля. Из этих формул, как из шкатулки волшебника, вдруг появляются новые понятия, например, ротора и дивергенции, без которых сегодня невозможно представить львиную долю рассуждений в любых прикладных областях векторного анализа. Формулы Грина, Стокса и Остроградского, а это о них идет речь, имеют и практическое значение, часто облегчая расчет векторных полей.

1 Формула Грина

Формула Грина связывает циркуляцию плоского векторного поля

$$\mathbf{F} = F_1\,\mathbf{i} + F_2\,\mathbf{j}$$

по контуру $\mathcal{L}^+$, ограничивающему некоторую плоскую область D, с двойным интегралом по этой области:

$$\boxed{Ц = \int\limits_{\mathcal{L}^+} \mathbf{F}\,d\mathbf{r} = \iint\limits_{D} \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)\,dx\,dy.} \tag{1}$$

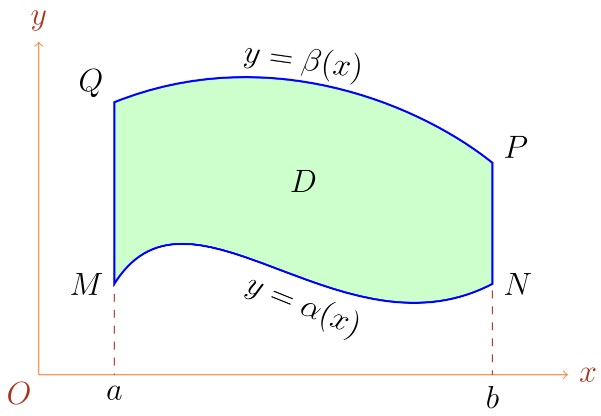


Рис. 1.

В Приложении[1)] доказательство этой формулы приведено для области, изображенной на рис. 1, причем, $\mathcal{L}^+ = \mathcal{MNPQM}$.

Формула Грина показывает, что вычисление двойного интеграла по некоторой области может быть сведено к вычислению криволинейного интеграла по границе этой области.

Эта формула справедлива и для более общих областей D, чем рассмотренная. Каких же именно? Для этого введем новые понятия.

Область D называется ***связной***, или ***односвязной***, если любой лежащий в ней контур γ ограничивает область D_γ, целиком принадлежащую области D. В противном случае область называется ***многосвязной***. Односвязная область изображена на рис. 2, а многосвязная – на рис. 3. Границей ∂D многосвязной области является объединение кривых $\partial D = \Gamma + \gamma_1 + \ldots + \gamma_n$. На рис. 3 показана и положительная ориентация такой границы: внешняя часть границы проходится против часовой стрелке, а ее внутренние части – в противоположном направлении, так как только в этом случае область D будет при обходе оставаться слева.

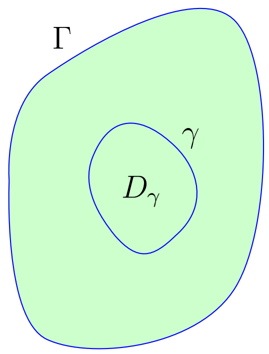


Рис. 2. Связная (односвязная) область.

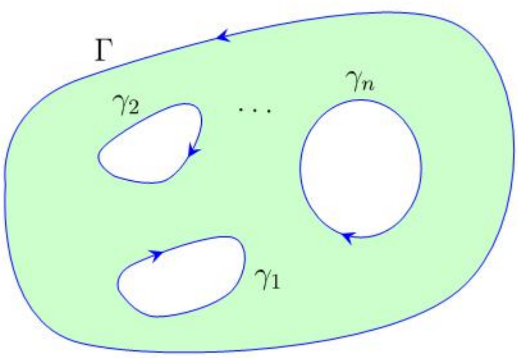


Рис. 3. Многосвязная область.

Представляет интерес степень связности области, которая определяется с помощью разрезов. ***Разрезом*** какой-либо области по данной кусочно-гладкой кривой, лежащей в этой области, назовем удаление из области точек этой кривой. Область называется ***n-связной***, если минимальное число разрезов, которое необходимо провести в области для того, чтобы она стала односвязной, равно $n-1$. Щелкнув мышкой на рис. 3 можно увидеть как разрезы (прямые красного цвета) превращают многосвязную область в односвязную.

Теперь можно сформулировать утверждения, обосновывающие справедливость формулы Грина.

Теорема 1. *Формула Грина справедлива для связной области D, ограниченной кусочно гладким контуром, и векторного поля, компоненты которого непрерывны вместе со своими частными производными $\partial F_1/\partial y$ и $\partial F_2/\partial x$.*

Теорема 2. *Формула Грина остается справедливой и для многосвязной области с границей*

$$\partial D^+ = \Gamma^+ + \gamma_1^+ + \dots + \gamma_n^+,$$

где Γ — внешняя граница области, а $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ — ее внутренние границы, при условии выполнения остальных предположений предыдущей теоремы.

Доказательство. Соединим каждый внутренний контур многосвязной области гладким разрезом с внешним контуром (см. рис. 3 с разрезами), после чего область станет односвязной. Обозначим l_i^+ проход от внешнего контура по разрезу к контуру γ_i, а в противоположном направлении $-\ l_i^-$, $i = \overline{1,n}$. Тогда границу полученной односвязной области можно представить в виде

$$\partial D^+ = \Gamma^+ + \sum_{i=1}^{n} \left(l_i^+ + \gamma_i^+ + l_i^-\right) = \Gamma^+ + \sum_{i=1}^{n} \gamma_i^+ + \sum_{i=1}^{n} \left(l_i^+ + l_i^-\right).$$

Обозначим $\mathcal{L}^+ = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i^+$. Используя формулу Грина для односвязной области, запишем циркуляцию:

$$\text{Ц} = \int\limits_{\partial D^+} \mathbf{F}\, d\mathbf{r} = \int\limits_{\Gamma^+ + \mathcal{L}^+} \mathbf{F}\, d\mathbf{r} + \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{l_i^+ + l_i^-} \mathbf{F}\, d\mathbf{r} = \iint\limits_{D} \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dx\, dy.$$

Но интегралы по разрезам равны нулю

$$\int\limits_{l_i^+ + l_i^-} \mathbf{F}\, d\mathbf{r} = \int\limits_{l_i^+} \mathbf{F}\, d\mathbf{r} + \int\limits_{l_i^-} \mathbf{F}\, d\mathbf{r} = \int\limits_{l_i^+} \mathbf{F}\, d\mathbf{r} - \int\limits_{l_i^+} \mathbf{F}\, d\mathbf{r} = 0,$$

поэтому

$$Ц = \int\limits_{\Gamma^+ + \mathcal{L}^+} \mathbf{F}\, d\mathbf{r} = \iint\limits_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx\, dy.$$

Замечание 1. *Вычисление циркуляции по формуле Грина можно провести без интегрирования, если*

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \equiv C = \mathrm{const},$$

так как тогда

$$Ц = \int\limits_{\mathcal{L}^+} \mathbf{F}\, d\mathbf{r} = \iint\limits_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx\, dy = C \cdot D.$$

Пример 1. *Найти циркуляцию векторного поля*

$$\mathbf{B} = B_1\, \mathbf{i} + B_2\, \mathbf{j} = \left(B_0 + \frac{\beta y}{x^2 + y^2} \right) \mathbf{i} - \frac{\beta x}{x^2 + y^2}\, \mathbf{j},$$

из примера 3 лекции «Работа и циркуляция» по контуру $\mathcal{L}$, не охватывающему начала координат, используя формулу Грина.

Решение. Данное поле не существует в начале координат, поэтому для применения формулы Грина и требуется, чтобы контур не охватывал эту точку. Найдем частные производные компонент поля:

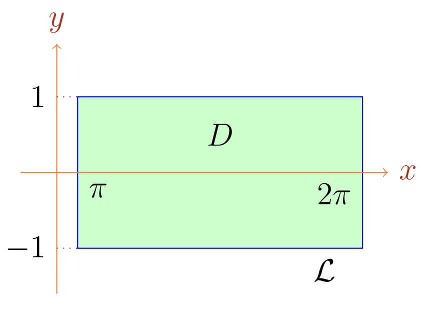
$$\frac{\partial B_2}{\partial x} = -\beta\, \frac{x^2 + y^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \beta\, \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}, \qquad \frac{\partial B_1}{\partial y} = \beta\, \frac{x^2 + y^2 - 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \beta\, \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Вычитая эти производные, получим нуль. Следовательно,

$$Ц = \int\limits_{\mathcal{L}^+} \mathbf{B}\, d\mathbf{r} = \iint\limits_D \left(\frac{\partial B_2}{\partial x} - \frac{\partial B_1}{\partial y} \right) dx\, dy = 0.$$

Таким образом, циркуляция по любому контуру, не охватывающему начало координат, равна нулю. На упомянутой лекции была найдена циркуляция этого поля по окружности с центром в начале координат, и она оказалась ненулевой.

Пример 2. *Заряд q с небольшой постоянной скоростью v движется вдоль оси Oz декартовой системы координат. Создаваемое им в плоскости xOy магнитное поле имеет в момент времени $t = 0$ напряженность*



$$\mathbf{H} = H_1\, \mathbf{i} + H_2\, \mathbf{j} = \frac{qv}{cR^3} \left(-y\, \mathbf{i} + x\, \mathbf{j} \right),$$

где $R = \sqrt{x^2 + y^2}$, c — скорость света в пустоте. Применяя формулу Грина, найти циркуляцию $\mathbf{H}$ по контуру $\mathcal{L}$, образованному линиями $x = \pi$, $x = 2\pi$, $y = -1$, $y = 1$.

Решение. Поскольку $R'_x = x/R$, $R'_y = y/R$, вычисляя частные производные, получим

$$\frac{\partial H_2}{\partial x} = \frac{qv}{c} \cdot \frac{R^3 - 3R^2x^2/R}{R^6} = \frac{qv}{c} \cdot \frac{R^2 - 3x^2}{R^5}, \; \frac{\partial H_1}{\partial y} = -\frac{qv}{c} \cdot \frac{R^2 - 3y^2}{R^5},$$
$$\frac{\partial H_2}{\partial x} - \frac{\partial H_1}{\partial y} = \frac{qv}{c} \cdot \frac{2R^2 - 3\left(x^2 + y^2\right)}{R^5} = \frac{qv}{c} \cdot \frac{2R^2 - 3R^2}{R^5} = -\frac{qv}{c} \cdot \frac{1}{R^3}.$$

Интегрируя по области D (см. рис. 2), придем к повторному интегралу:

$$\text{Ц} = \int\limits_{\mathcal{L}^+} \mathbf{H}\, d\mathbf{r} = \iint\limits_{D} \left(\frac{\partial H_2}{\partial x} - \frac{\partial H_1}{\partial y}\right) dx\, dy = -\frac{qv}{c} \int_{\pi}^{2\pi} dx \int_{-1}^{1} \frac{dy}{R^3}.$$

Возьмем внутренний интеграл как интеграл от дифференциального бинома:

$$\int \frac{dy}{R^3} = \int \frac{dy}{\left(x^2 + y^2\right)^{3/2}} = \int \left(x^2 + y^2\right)^{-3/2} dy = \frac{1}{x^2} \int x^2 y^{-3} \left(1 + x^2 y^{-2}\right)^{-3/2} dy =$$
$$= \left\langle 1 + x^2 y^{-2} = t^2,\ -x^2 y^{-3} dy = t\, dt \right\rangle = -\frac{1}{x^2} \int t^{-3} t\, dt =$$
$$= \frac{1}{x^2 t} + C = \frac{1}{x^2 \sqrt{1 + x^2 y^{-2}}} + C = \frac{y}{x^2 \sqrt{x^2 + y^2}} + C.$$

Следовательно,

$$\text{Ц} = -\frac{qv}{c} \int_{\pi}^{2\pi} \left.\frac{y}{x^2 \sqrt{x^2 + y^2}}\right|_{-1}^{1} dx = -\frac{2qv}{c} \int_{\pi}^{2\pi} \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2 + 1}}.$$

Еше раз проэксплуатируем дифференциальный бином:

$$\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2 + 1}} = \int x^{-2} \left(x^2 + 1\right)^{-1/2} dx = \int x^{-3} \left(1 + x^{-2}\right)^{-1/2} dx =$$
$$= \left\langle 1 + x^{-2} = t^2,\ -x^{-3} dx = t\, dt \right\rangle = -\int t t^{-1} dt = -\int dt =$$
$$= -t + C = -\sqrt{1 + x^{-2}} + C = -\frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} + C.$$

Окончательно получим

$$\text{Ц} = \frac{2qv}{c} \cdot \left.\frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x}\right|_{\pi}^{2\pi} = \frac{qv}{\pi c} \left(\sqrt{4\pi^2 + 1} - 2\sqrt{\pi^2 + 1}\right).$$

2 Формула Стокса

Пусть $\mathbf{F} = F_1\, \mathbf{i} + F_2\, \mathbf{j} + F_3\, \mathbf{k}$ —векторное поле и σ — поверхность, ориентированная нормалью $\mathbf{n}$ и ограниченная контуром-краем λ, рис. 4.

Введем вектор $\operatorname{rot} \mathbf{F}$, называемый ***ротором*** векторного поля и записываемый в виде определителя, который затем раскрывается по элементам первой строки:

$$\operatorname{rot}\mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\right)\mathbf{i} - \left(\frac{\partial F_3}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial z}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)\mathbf{k}.$$

Символические частные производные при раскрытии определителя не умножаются на элементы третьей строки, а приписываются к ним спереди.

Формула Стокса

$$\boxed{Ц = \int\limits_{\lambda} \mathbf{F}d\mathbf{r} = \iint\limits_{\sigma} \operatorname{rot}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma} \tag{2}$$

обобщает формулу Грина на случай трехмерного векторного поля и кривой поверхности и доказывается в Приложении[2)] для случая, когда поверхность σ однозначно проектируется на одну из координатных плоскостей.

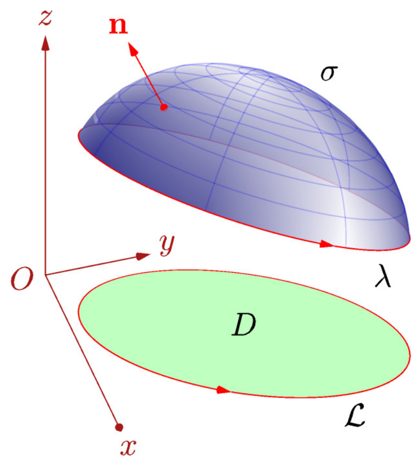


Рис. 4.

Формула Стокса имеет следующую интерпретацию: *циркуляция векторного поля по контуру, ограничивающему ориентированную поверхность, равна потоку ротора через эту поверхность.*

Оператор $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$, введенный ранее[†] и называемый *оператором Гамильтона* или *оператором набла*, позволяет представить ротор в виде

$$\operatorname{rot}\mathbf{F} = \nabla\times\mathbf{F}.$$

Так что формулу (2) можно записать еще двумя способами:

$$Ц = \int\limits_{\lambda} \mathbf{F}d\mathbf{r} = \iint\limits_{\sigma} (\nabla\times\mathbf{F})\cdot\mathbf{n}\,d\sigma = \iint\limits_{\sigma} (\nabla, \mathbf{F}, \mathbf{n})\;d\sigma,$$

где $(\nabla, \mathbf{F}, \mathbf{n})$ – смешанное произведение векторов.

Достаточно общие условия справедливости формулы Стокса дает

Теорема 3. *Пусть компоненты векторного поля непрерывны и имеют непрерывные частные производные, а поверхность σ связна, кусочно*

[†]Лекция «Скалярное поле».

гладка, ориентирована и допускает разбиение с помощью кусочно гладких кривых на конечное число гладких кусков, однозначно проектирующихся на все три координатные плоскости. Пусть ее край λ кусочно гладок. Тогда справедлива формула Стокса.

Формула Стокса позволяет дать инвариантное определение ротора. Пусть $\mathbf{n}$ — единичный вектор произвольного направления; λ — контур, окружающий некоторую точку M и лежащий в плоскости, перпендикулярной вектору $\mathbf{n}$; σ — плоская площадка (поверхность), ограниченная контуром λ и ориентированная с помощью вектора $\mathbf{n}$, рис. 5. Поскольку для потока, как и для других изученных вами интегралов, справедлива теорема о среднем, то найдется точка $P \in \sigma$ такая, что

$$\iint\limits_{\sigma} \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma = \sigma \operatorname{rot} \mathbf{F}\,(P)\, \mathbf{n}\,(P) = \int\limits_{\lambda} \mathbf{F}\, d\mathbf{r},$$

или

$$\mathrm{Pr}_{\mathbf{n}(P)} \operatorname{rot} \mathbf{F}\,(P) = \frac{\int\limits_{\lambda} \mathbf{F}\, d\mathbf{r}}{\sigma}.$$

Стягивая контур λ к точке M (при этом точка $P \to M$), получим, что

$$\mathrm{Pr}_{\mathbf{n}} \operatorname{rot} \mathbf{F}\,(M) = \lim_{\lambda \to M} \frac{\int\limits_{\lambda} \mathbf{F}\, d\mathbf{r}}{\sigma}. \tag{3}$$

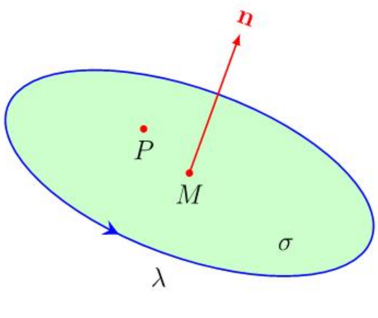


Рис. 5.

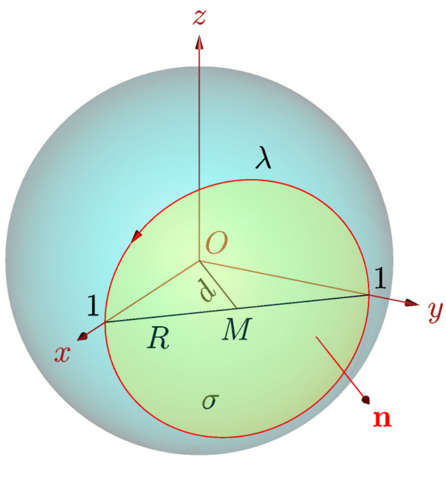


Рис. 6. К примеру 3.

Если правую часть равенства назвать *плотностью циркуляции (ориентированной вектором* $\mathbf{n}$*) векторного поля в точке* M, то ротор поля можно определить как *векторное поле, проекция которого на любой единичный вектор в данной точке равна плотности циркуляции поля в этой точке*. Таким образом, равенство (3) дает проекции ротора на любые три некомпланарных направления, то есть определяет ротор в любой координатной системе.

Из формулы Стокса видно, что при $\operatorname{rot}\mathbf{F} \equiv \mathbf{0}$ циркуляция векторного поля по любому контуру равна нулю.

Если $\operatorname{rot}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n} \equiv \mathrm{const}$, то циркуляция равна $Ц = \sigma \operatorname{rot}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}$.

Пример 3. *Найти циркуляцию векторного поля $F = 2y\,\mathbf{i} - x\,\mathbf{j} + y\,\mathbf{k}$ по контуру $\lambda : x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ x + y = 1$ (рис. 6).*

Решение. Чтобы воспользоваться формулой Стокса, возьмем в качестве поверхности σ часть плоскости $x + y = 1$, заключенную внутри контура λ. Выберем направление нормали $\mathbf{n}$ к этой поверхности таким, чтобы она образовывала острые углы с осями Ox и Oy. Так как уравнение σ можно записать в виде $y = g(x, z) = 1 - x$, то единичная нормаль выражается формулой

$$\mathbf{n} = \frac{-g'_x\mathbf{i} + \mathbf{j} - g'_z\mathbf{k}}{\sqrt{1 + g'^2_x + g'^2_y}} = \frac{(1; 1; 0)}{\sqrt{2}}.$$

Найдем ротор векторного поля:

$$\operatorname{rot}\mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 2y & -x & y \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial x}{\partial z}\right)\mathbf{i} - \left(\frac{\partial x}{\partial y} - \frac{2\partial y}{\partial z}\right)\mathbf{j} + \left(-\frac{\partial x}{\partial x} - \frac{2\partial y}{\partial y}\right)\mathbf{k} =$$
$$= \mathbf{i} - 3\,\mathbf{k};$$

тогда $\operatorname{rot}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n} = 1/\sqrt{2}$. По формуле Стокса

$$Ц = \iint\limits_{\sigma} \operatorname{rot}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma = \frac{\sigma}{\sqrt{2}},$$

но σ — площадь круга радиуса $R = \sqrt{1 - d^2}$, где d — расстояние от точки O до центра круга M. Это расстояние определим по формуле аналитической геометрии

$$d = \frac{|Ax + By + Cz + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

где x, y, z — координаты начала координат; A, B, C, D — коэффициенты уравнения плоскости $x + y - 1 = 0$. Получим

$$d = \frac{|1\cdot 0 + 1\cdot 0 + 0\cdot 0 - 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Значит, $R^2 = 1 - d^2 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ и тогда циркуляция равна

$$Ц = \frac{\sigma}{\sqrt{2}} = \frac{\pi R^2}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}.$$

3 Формула Остроградского

Пусть снова задано векторное поле $\mathbf{F} = F_1\,\mathbf{i} + F_2\,\mathbf{j} + F_3\,\mathbf{k}$ и пусть σ — замкнутая поверхность, ограничивающая объем V и ориентированная своей внешней нормалью $\mathbf{n}$, рис. 7.

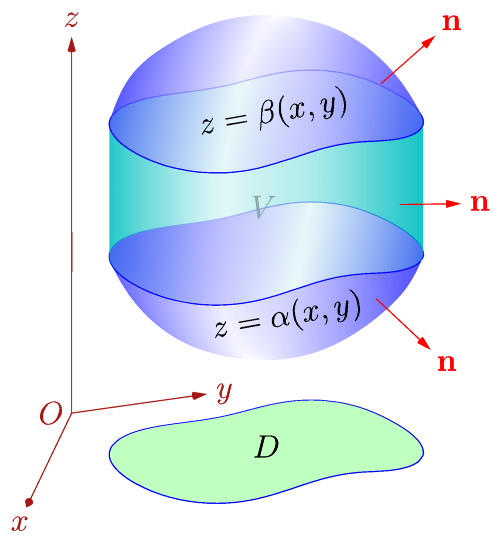


Рис. 7.

Введем скалярную величину

$$\operatorname{div}\mathbf{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} = \nabla \cdot \mathbf{F},$$

называемую ***дивергенцией*** векторного поля. Она является второй, после ротора, важнейшей локальной характеристикой поля.

При определенных условиях выполняется равенство

$$\boxed{\Pi = \iint\limits_{\sigma} \mathbf{F}\mathbf{n}\, d\sigma = \iiint\limits_{V} \operatorname{div}\mathbf{F}\, dV,} \tag{4}$$

которое носит название ***формулы Остроградского***. В сокращенном варианте она гласит, что *поток векторного поля через замкнутую ограниченную поверхность, ориентированную в направлении внешней нормали, равен тройному интегралу от дивергенции поля по объему, который ограничивает поверхность.*

В Приложении[3)] формула Остроградского доказана для поверхности, изображенной на рис. 7, а более общий случай сформулирован в следующей теореме.

Теорема 4. *Пусть векторное поле F имеет компоненты, непрерывные вместе со своими частными производными, а тело V ограничено кусочно гладкой замкнутой поверхностью, ориентированной внешней нормалью. Тогда справедлива формула Остроградского.*

Замечание 2. *Если условия теоремы нарушаются, то формула Остроградского становится неверной. Например, если вычислить поток через куб с одной выброшенной гранью, мы получим такой же результат, как и для куба с невыброшенной гранью, потому что формула Остроградского дает полный поток через куб (с невыброшенными гранями).*

Запишем инвариантное определение дивергенции, которое лучше передает ее смысл. Для этого рассмотрим точку M, расположенную внутри объема V, ограниченного поверхностью σ, а точка M_1 пусть удовлетворяет теореме о среднем для тройного интеграла; тогда формулу Остроградского можно представить в виде

$$\iint\limits_{\sigma} \mathbf{F}\mathbf{n}\, d\sigma = \operatorname{div}\mathbf{F}\,(M_1)\, V,$$

или

$$\operatorname{div}\mathbf{F}\left(M_1\right)=\frac{\iint\limits_{\sigma}\mathbf{Fn}\,d\sigma}{V}.$$

Стягивая объем V к точке M (при этом точка $M_1 \to M$), получим:

$$\operatorname{div}\mathbf{F}\left(M\right)=\lim_{V\to M}\frac{\iint\limits_{\sigma}\mathbf{Fn}\,d\sigma}{V}. \tag{5}$$

Правую часть равенства можно назвать плотностью потока в точке M. Поэтому полученную формулу можно прочитать так: *дивергенция – это плотность потока векторного поля в точке*.

Из формулы Остроградского можно сделать важные выводы.

Если $\operatorname{div}\mathbf{F}\equiv 0$, то $\Pi=0$.

Если $\operatorname{div}\mathbf{F}\equiv \mathrm{const}$, то $\Pi=V\operatorname{div}\mathbf{F}$.

Для более существенных выводов введем следующие понятия. ***Источником*** векторных линий называется точка пространства, в которой векторные линии начинаются. ***Стоком*** называется точка пространства, в которой векторные линии заканчиваются.

Если дивергенция положительна, то из формулы Остроградского можно заключить, что в объеме V мощность источников векторных линий превосходит мощность стоков.

Если дивергенция отрицательна, то стоки мощнее источников.

Если дивергенция равна нулю, то либо в объеме V нет ни источников, ни стоков, либо их мощности одинаковы и тем самым компенсируют друг друга.

Определение (5) характеризует дивергенцию как плотность разности мощностей источников и стоков в точке.

Пример 4. *Найти поток векторного поля из примера 2 через ограниченную замкнутую поверхность, если $R=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.*

Решение. Найдем дивергенцию заданного векторного поля:

$$\frac{\partial H_1}{\partial x}=\frac{qv}{c}\cdot\frac{\frac{3}{2}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{1/2}2xy}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^3}=\frac{qv}{c}\cdot\frac{3xy}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{5/2}}=$$
$$=\frac{3qv}{c}\cdot\frac{xy}{R^5},\ \frac{\partial H_2}{\partial y}=-\frac{3qv}{c}\cdot\frac{xy}{R^5},\ \frac{\partial H_2}{\partial z}=0.$$

Поскольку сумма этих производных (дивергенция поля) равна нулю, то поток через любую поверхность, не охватывающую начало координат, в котором поле не существует, тоже равен нулю. □

Познакомившись с тремя основными теоремами векторного анализа, обратим внимание на следующее. Формулу Ньютона-Лейбница для функции $f\left(x\right)$

можно записать в виде

$$\int_a^b f'(x)\ dx = f(b) - f(a)$$

и переосмыслить теперь так, что интегрирование и дифференцирование «погашают» друг друга и в результате вычисление интеграла по отрезку превращается в вычисления на его концах, то есть на его границе, так как для отрезка границей как раз и будут его концы.

Аналогичную ситуацию нам демонстрируют и рассмотренные на лекции теоремы. Интегралы по различным областям (по плоской области, поверхности, телу) превращаются в интегралы по границам этих областей. Что же здесь взаимно «погашается»? Очевидно, что и в данном случае интегрирование (правда, уже многомерное) компенсируется дифференцированием, которое теперь выражается частными производными, ротором или дивергенцией.

Таким образом, формулы Грина, Стокса и Остроградского могут рассматриваться как обобщения на многомерный случай формулы Ньютона-Лейбница, той формулы, на которой покоится вся вычислительная мощь интегрального исчисления.

В Приложении[4)] рассмотрены расчеты векторных полей с помощью их локальных характеристик в системе *Mathematica*.

Приложение

[1)] Найдем следующий двойной интеграл, переходя от него к определенному интегралу, а от того — к криволинейному:

$$\iint\limits_D \frac{\partial F_1}{\partial y}\,dx\,dy = \int_a^b dx \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \frac{\partial F_1}{\partial y}\,dy = \int_a^b \left[F_1\left(x,\beta\left(x\right)\right) - F_1\left(x,\alpha\left(x\right)\right)\right]\,dx =$$

$$= -\int_a^b F_1\left(x,\alpha\left(x\right)\right)\,dx - \int_b^a F_1\left(x,\beta\left(x\right)\right)\,dx =$$

$$= -\int\limits_{\mathcal{MN}} F_1\left(x,y\right)\,dx + \underbrace{\int\limits_{\mathcal{NP}} F_1\left(x,y\right)\,dx}_{0} - \int\limits_{\mathcal{PQ}} F_1\left(x,y\right)\,dx + \underbrace{\int\limits_{\mathcal{QM}} F_1\left(x,y\right)\,dx}_{0} =$$

$$= -\int\limits_{\mathcal{MNPQM}} F_1\left(x,y\right)\,dx = -\int\limits_{\mathcal{L}^+} F_1\left(x,y\right)\,dx,$$

где $\mathcal{L}^+ = \mathcal{MNPQM}$. Интегралы по вертикальным отрезкам NP и QM равны нулю, так как на этих отрезках $dx = 0$.

Аналогично доказывается, что

$$\iint\limits_D \frac{\partial F_2}{\partial x}\,dx\,dy = \int\limits_{\mathcal{L}^+} F_2\left(x,y\right)\,dy.$$

Вычитая из второго равенства первое и учитывая, что

$$\int\limits_{\mathcal{L}^+} F_1\,dx + \int\limits_{\mathcal{L}^+} F_2\,dy = \int\limits_{\mathcal{L}^+} F_1\,dx + F_2\,dy = \int\limits_{\mathcal{L}^+} \mathbf{F}\,d\mathbf{r},$$

где $d\mathbf{r} = (dx, dy)$, приходим к формуле Грина (1).

[2)] Пусть поверхность σ задана уравнением $z = f\left(x,y\right)$; это и означает, что она однозначно проектируется на плоскость xOy. Обозначим эту проекцию D, а ограничивающую ее кривую — $\mathcal{L}$, см. рис. 4.

Так как кривая λ однозначно проектируется в кривую $\mathcal{L}$, то значение функции $F_1\left(x,y,z\right)$ в точке $\left(x,y,z\right)$ на контуре λ равно значению $F_1\left(x,y,f(x,y)\right)$ в точке $\left(x,y\right)$ на контуре $\mathcal{L}$. Применим формулу Грина к полю $\mathbf{G} = F_1\,\mathbf{i} + 0\,\mathbf{j} + 0\,\mathbf{k}$:

$$\begin{aligned} I &= \int\limits_{\lambda} F_1\left(x,y,z\right)\,dx = \int\limits_{\mathcal{L}} F_1\left(x,y,f\left(x,y\right)\right)\,dx + 0\,dy = \\ &= -\iint\limits_D \left(\frac{\partial F_1}{\partial y} + \frac{\partial F_1}{\partial z}\cdot\frac{\partial f}{\partial y}\right)\,dx\,dy = -\iint\limits_{\sigma} \left(\frac{\partial F_1}{\partial y} + \frac{\partial F_1}{\partial z}\cdot\frac{\partial f}{\partial y}\right) n_3\,d\sigma. \end{aligned} \tag{П1}$$

Последнее выражение получено в результате перехода от двойного интеграла к потоку† для случая, когда поверхность σ однозначно проектируется на плоскость xOy. В данном случае нормаль $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$ выражается формулой

$$\mathbf{n} = \frac{-f'_x\,\mathbf{i} - f'_y\,\mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{1 + f'^2_x + f'^2_y}},$$

†Лекция «Поток векторного поля», формула (3).

поэтому $f'_y n_3 = -n_2$. Следовательно,

$$\int\limits_{\lambda} F_1\,dx = \iint\limits_{\sigma} \left(\frac{\partial F_1}{\partial z}\,n_2 - \frac{\partial F_1}{\partial y}\,n_3\right)\,d\sigma.$$

Аналогично получаем

$$\int\limits_{\lambda} F_2\,dy = \iint\limits_{\sigma} \left(\frac{\partial F_2}{\partial x}\,n_3 - \frac{\partial F_2}{\partial z}\,n_1\right)\,d\sigma,$$

$$\int\limits_{\lambda} F_3\,dz = \iint\limits_{\sigma} \left(\frac{\partial F_3}{\partial y}\,n_1 - \frac{\partial F_3}{\partial x}\,n_2\right)\,d\sigma.$$

Складывая полученные равенства, приходим к формуле

$$\int\limits_{\lambda} \mathbf{F} d\mathbf{r} = \iint\limits_{\sigma} \left[\left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\right) n_1 - \left(\frac{\partial F_3}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial z}\right) n_2 + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) n_3\right]\,d\sigma,$$

из которой и следует формула Стокса (2).

3) Пусть поверхность σ ограничена снизу поверхностью $\sigma_1 : z = \alpha(x,y)$, сверху – поверхностью $\sigma_2 : z = \beta(x,y)$, а с боков – цилиндрической поверхностью σ_3 с вертикальной направляющей, см. рис. 7. Нормаль к σ обозначим $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$. Найдем следующий тройной интеграл по области V:

$$\iiint\limits_{V} \frac{\partial F_3}{\partial z}\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_{D} \left(\int\limits_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} \frac{\partial F_3}{\partial z}\,dz\right) dx\,dy =$$

$$= \iint\limits_{D} \left\{F_3\left[x,y,\beta(x,y)\right] - F_3\left[x,y,\alpha(x,y)\right]\right\}\,dx\,dy =$$

$$= \iint\limits_{D} F_3\left[x,y,\beta(x,y)\right]\,dxdy - \iint\limits_{D} F_3\left[x,y,\alpha(x,y)\right]\,dx\,dy =$$

$$= \iint\limits_{\sigma_1} F_3(x,y,z)\,n_3\,d\sigma + \iint\limits_{\sigma_3} F_3(x,y,z)\,n_3\,d\sigma.$$

Переход от двойных интегралов к потокам обосновывается так же, как и переход в формуле (П1). Отметим, что минус перед вторым двойным интегралом становится плюсом перед вторым потоком из-за того, что нормаль на нижней стороне поверхности σ_3 образует тупой угол с осью аппликат. Фактически получен полный поток векторного поля $(0,0,F_3)$ через всю поверхность σ, так как такой поток через цилиндрическую поверхность σ_2 равен нулю в силу того, что нормаль к σ_2 перпендикулярна полю: $(0,0,F_3)\cdot(n_1,n_2,0) = 0$. В итоге имеем

$$\iiint\limits_{V} \frac{\partial F_3}{\partial z}\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_{\sigma} F_3(x,y,z)\,n_3\,d\sigma.$$

Точно так же можно показать, что

$$\iiint\limits_{V} \frac{\partial F_1}{\partial x}\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_{\sigma} F_1(x,y,z)\,n_1\,d\sigma,$$

$$\iiint\limits_V \frac{\partial F_2}{\partial y}\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_\sigma F_2\,(x,y,z)\,n_2\,d\sigma.$$

Складывая эти три равенства, получаем

$$\iiint\limits_V \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}\right) dV = \iint\limits_\sigma (F_1 n_1 + F_2 n_2 + F_3 n_3)\;d\sigma,$$

что́ и приводит к формуле Остроградского (4).

4) В системе *Mathematica* оператор `Curl[{F₁,F₂},{x,y}]` вычисляет ротор

$$\operatorname{rot}\mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & 0 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

плоского векторного поля $\mathbf{F} = F_1\,\mathbf{i} + F_2\,\mathbf{j}$. Понятно, что аргументами оператора являются компоненты векторного поля `{F₁,F₂}` и список переменных `{x,y}`.

Для трехмерного поля оператор ротора имеет вид `Curl[{F₁,F₂,F₃},{x,y,z}]`. Найдем, например, ротор векторного поля $\mathbf{F} = x^2 y\,\mathbf{i} - 3xz\,\mathbf{j} + xyz^2\,\mathbf{k}$:

```
Curl[{x^2 y,-3 x z,x y z^2},{x,y,z}]
{3 x+x z^2,-y z^2,-x^2-3 z}
```

Таким образом, $\operatorname{rot}\mathbf{F} = (3x + xz^2)\,\mathbf{i} - yz^2\,\mathbf{j} - (x^2 + 3z)\,\mathbf{k}$.

Для удобства ввода оператора `Curl` можно набрать `Esc`delx`Esc`, после чего появится шаблон $\nabla_\square \times \square$, в квадратик-индекс которого надо ввести список переменных, а в большой квадрат – список компонент поля. Предыдущий пример тогда перепишется так:

```
∇{x,y,z}× {x^2 y,-3 x z,x y z^2}
{3 x+x z^2,-y z^2,-x^2-3 z}
```

С помощью системы *Mathematica* можно обнаружить (но не доказать), что ротор градиента всякого скалярного поля равен нулевому вектору:

```
∇{x,y,z} × ∇{x,y,z} u[x,y,z]
{0,0,0}
```

Дивергенцию поля находит оператор `Div[{F₁,F₂,F₃},{x,y,z}}]`. Например, дивергенция поля, для которого был вычислен ротор, найдется так:

```
Div[{x^2 y,-3 x z,x y z^2},{x,y,z}]
%// Factor
2 x y+2 x y z
2 x y(1+z)
```

И для этого оператора существует удобный ввод с помощью `Esc`del.`Esc`. В шаблоне $\nabla_\square . \square$, в квадратик-индекс снова надо ввести список переменных, а в большой квадрат – список компонент поля. Предыдущий пример в этом формате примет вид

```
∇{x,y,z}. {x^2 y,-3 x z,x y z^2}
2 x y+2 x y z
```

Теперь можно обнаружить еще один факт: дивергенция ротора всегда равна нулю:

$\nabla_{\{x,y,z\}} . \nabla_{\{x,y,z\}} \times$ {F1[x,y,z], F2[x,y,z], F3[x,y,z]}

0

В системе *Mathematica* можно решить более сложные задачи, чем рассмотренные на лекции. Для примера 2 изменим ограничения, накладываемые на y: $-\sin x \leq y \leq \sin x$. Точное решение получить не удается, поэтому найдем приближенное:

$$-\frac{\mathtt{q\,v}}{\mathtt{c}}\,\mathtt{NIntegrate}\left[\frac{1}{(\mathtt{x}^2+\mathtt{y}^2)^{3/2}},\{\mathtt{x},\pi,2\pi\},\{\mathtt{y},\mathtt{-Sin[x]},\mathtt{Sin[x]}\}\right]$$

$$\frac{0.0430151\,\mathtt{q\,v}}{\mathtt{c}}$$

Литература

[1] Бугров Я.С., Никольский С.М. *Высшая математика. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного* . — М.: Наука, 1985, — с. 224-229, 245-252, 254-258.

[2] Письменный Д.Т. *Конспект лекций по высшей математике.* — М.: Рольф, 2000. Ч. 2. — с. 86-87, 103-107, 173-175, 177-179.