Интегрирование тригонометрических функций

Волченко Ю.М.

Содержание лекции

Интегрирование тригонометрических функций с помощью различных подстановок. Универсальная тригонометрическая подстановка. Интегрирование функций, рациональных относительно синуса и косинуса. Интегралы от $\sin^m x \cos^n x$. Интегралы от произведений синусов и косинусов. Интегрирование гиперболических функций.

Интегрирование тригонометрических и гиперболических функций в системе *Mathematica*.

1 апреля 2013 г.

На предыдущей лекции было показано, что дробно-рациональные функции (ДРФ) всегда интегрируются в элементарных функциях. Этот факт служит поводом для того, чтобы интеграл от какой-нибудь другой функции, который не удается взять непосредственно или по частям, с помощью подстановки свести к интегралу от ДРФ, — ведь тогда обязательно удастся довести интегрирование до конца — до элементарной функции.

Данная лекция посвящена интегрированию тригонометрических функций, которое, как вы увидите, и будет заключаться в применении подходящих подстановок, преобразующих тригонометрическую функцию в многочлен или дробно-рациональную функцию.

1 Интегралы вида $\int R(\sin x, \cos x)\, dx$

Здесь R означает ДРФ от двух переменных, то есть отношение двух многочленов, каждый из которых в общем случае зависит от двух аргументов. Вместо одного аргумента подставляется $\sin x$, а вместо второго — $\cos x$. Так и получается функция $R(\sin x, \cos x)$.

1.1 Универсальная тригонометрическая подстановка

Рассматриваемый интеграл всегда можно взять с помощью ***универсальной тригонометрической подстановки***:

$$t = \operatorname{tg}\frac{x}{2},\ x = 2\operatorname{arctg} t,\ dx = \frac{2}{1+t^2}\,dt.$$

При этом синус и косинус тоже превращаются в ДРФ от t:

$$\sin x = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{2\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}}{1+\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}} = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2},$$

$$\cos x = \frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

В результате интеграл становится таким:

$$\int R(\sin x, \cos x)\,dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}\,dt.$$

Подынтегральнвя функция стала ДРФ от t, так как ДРФ от ДРФ все едино ДРФ.

Хочу предостеречь, что универсальная тригонометрическая подстановка часто приводит к громоздким подынтегральным выражениям, затрудняющим взятие интеграла. Поэтому ее рекомендуется применять только тогда, когда невозможно применить другие методы интегрирования.

Пример 1. *Найти интеграл*

$$\int \frac{dx}{2+\cos x+\sin x}.$$

Решение. Используем универсальную тригонометрическую подстановку, в результате которой заданный интеграл превратится в интеграл от ДРФ:

$$\int \frac{dx}{2+\cos x+\sin x} = \int \frac{\frac{2}{1+t^2}}{2+\frac{1-t^2}{1+t^2}+\frac{2t}{1+t^2}}\,dt = \int \frac{2}{t^2+2t+3}\,dt = 2\int \frac{dt}{(t+1)^2+2} =$$

$$= \sqrt{2}\operatorname{arctg}\frac{t+1}{\sqrt{2}} + C = \sqrt{2}\operatorname{arctg}\frac{1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{2}} + C.$$

1.2 $R(\sin x, \cos x)$ нечетна относительно $\sin x$

Нечетность относительно синуса означает следующее:

$$R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x).$$

В этом случае применяется подстановка[1)]

$$t = \cos x,\ dt = -\sin x\, dx.$$

Пример 2. *Вычислить интеграл*

$$\int \frac{\sin^3 x}{1+\cos^2 x}\, dx.$$

Решение. Так как подынтегральная функция нечетна относительно $\sin x$, то производим указанную замену:

$$\int \frac{\sin^3 x}{1+\cos^2 x}\, dx = \int \frac{(\cos^2 x - 1)(-\sin x)}{1+\cos^2 x}\, dx = \int \frac{t^2-1}{1+t^2}\, dt =$$
$$= \int \frac{(1+t^2)-2}{1+t^2}\, dt = \int dt - \int \frac{2}{1+t^2}\, dt =$$
$$= t - 2\operatorname{arctg} t + C = \cos x - 2\operatorname{arctg}\cos x + C.$$

1.3 $R(\sin x, \cos x)$ нечетна относительно $\cos x$

Если подынтегральная функция нечетна относительно косинуса, т. е.

$$R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x),$$

то делают замену[2)]

$$t = \sin x,\ dt = \cos x\, dx. \qquad (1)$$

Пример 3. *Найти интеграл*

$$\int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x}\, dx.$$

Решение. Поскольку подынтегральная функция нечетна относительно косинуса, то применяем подстановку (1):

$$\int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x}\, dx = \int \frac{\left(1-\sin^2 x\right)\cos x}{\sin^2 x}\, dx = \int \frac{(1-t^2)}{t^2}\, dt =$$
$$= \int \frac{dt}{t^2} - \int dt = -\frac{1}{t} - t + C = -\frac{1}{\sin x} - \sin x + C.$$

1.4 $R(\sin x, \cos x)$ четна относительно $\sin x$ и $\cos x$

Если подынтегральная функция четна относительно синуса и косинуса, т. е.

$$R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x),$$

то применяют либо подстановку $t = \operatorname{tg} x$, либо подстановку $t = \operatorname{ctg} x$. Рассмотрим первую из них[3)]:

$$t = \operatorname{tg} x,\ x = \operatorname{arctg} t,\ dx = \frac{dt}{1+t^2}. \qquad (2)$$

Функции $\sin^2 x$ и $\cos^2 x$ превращаются в ДРФ от t:

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{1+t^2},$$
$$\sin^2 x = \operatorname{tg}^2 x \cos^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}.$$

Пример 4. *Вычислить интеграл*

$$\int \frac{1+\sin^2 x}{1+\cos^2 x}\, dx.$$

Решение. Подынтегральная функция четна относительно синуса и косинуса, поэтому применяем подстановку (2):

$$\int \frac{1+\sin^2 x}{1+\cos^2 x}\, dx = \int \frac{1+\frac{t^2}{1+t^2}}{1+\frac{1}{1+t^2}} \cdot \frac{dt}{1+t^2} = \int \frac{2t^2+1}{(t^2+2)(t^2+1)}\, dt.$$

Разложим подынтегральную ДРФ на сумму простейших ДРФ:

$$\frac{2t^2+1}{(t^2+2)(t^2+1)} = \frac{At+B}{t^2+2}^{\backslash t^2+1} + \frac{Ct+D}{t^2+1}^{\backslash t^2+2}$$

$$\begin{array}{c|r|l} t^3 & A+C=0 & A=0 \\ t & A+2C=0 & C=0 \\ t^2 & B+D=2 & B=3 \\ t^0 & B+2D=1 & D=-1 \end{array}$$

$$\int \frac{1+\sin^2 x}{1+\cos^2 x}\, dx = \int \frac{3}{t^2+2}\, dt - \int \frac{1}{t^2+1}\, dt = \frac{3}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{2}} - \operatorname{arctg} t + C =$$
$$= \frac{3}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}} - x + C.$$

□

Случаев, рассмотренных в последних трех пп., достаточно, чтобы любой интеграл вида $\int R(\sin x, \cos x)\, dx$ удалось проинтегрировать в элементарных функциях[4)].

2 Интегралы вида $\int \sin^m x \cos^n x\, dx$

2.1 Одно из чисел m или n нечетно

Пусть, например, $n = 2p+1$. Преобразуем интеграл:

$$\int \sin^m x \cos^n x\, dx = \int \sin^m x \cos^{2p+1} x\, dx = \int \sin^m x \left(1-\sin^2 x\right)^p \cos x\, dx =$$
$$= \langle t = \sin x,\ dt = \cos x\, dx \rangle = \int t^m \left(1-t^2\right)^p\, dt.$$

Взятие полученного интеграла затруднений не вызывает.

Пример 5. *Найти интеграл*

$$\int \sin^6 x \cos^3 x \, dx = \int \sin^6 x \left(1 - \sin^2 x\right) \cos x \, dx = \langle t = \sin x, \; dt = \cos x \, dx \rangle =$$
$$= \int t^6 \left(1 - t^2\right) \, dt = \int \left(t^6 - t^8\right) \, dt = \frac{t^7}{7} - \frac{t^9}{9} + C =$$
$$= \frac{1}{7} \sin^7 x - \frac{1}{9} \sin^9 x + C.$$

2.2 Числа m и n четны и неотрицательны

Обозначим $m = 2p$, $n = 2q$ и вспомним, что

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}, \tag{3}$$
$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}. \tag{4}$$

Тогда

$$\int \sin^m x \cos^n x \, dx = \int \sin^{2p} x \cos^{2q} x \, dx =$$
$$= \frac{1}{2^{p+q}} \int (1 - \cos 2x)^p \, x \, (1 + \cos 2x)^q \, x \, dx.$$

Раскрыв скобки, получим косинусы в четных и нечетных степенях. Косинусы в нечетных степенях интегрируются, как было показано в предыдущем п. У косинусов с четными показателями понижаем степень по формулам (3), (4). Так продолжаем до тех пор, пока не придем к практически табличным интегралам вида $\int \cos kx \, dx$.

Пример 6. *Вычислить интеграл*

$$\int \sin^4 x \, dx.$$

Решение. Применим формулы понижения степени:

$$\int \sin^4 x \, dx = \frac{1}{4} \int (1 - \cos 2x)^2 \, dx = \frac{1}{4} \int \left(1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x\right) \, dx =$$
$$= \frac{1}{4} \left[x - \sin 2x + \frac{1}{2} \int (1 + \cos 4x) \, dx \right] =$$
$$= \frac{1}{4} \left(x - \sin 2x + \frac{1}{2} x + \frac{1}{8} \sin 4x \right) + C =$$
$$= \frac{1}{4} \left(\frac{3}{2} x - \sin 2x + \frac{1}{8} \sin 4x \right) + C.$$

2.3 Числа m и n четны, и хотя бы одно из них отрицательно

В этом случае предыдущий прием не приводит к цели. Задачу решает одна из замен, $t = \operatorname{tg} x$ или $t = \operatorname{ctg} x$, рассмотренных выше.

Пример 7. *Найти интеграл*

$$\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x}\, dx.$$

Решение. Преобразуем заданный интеграл:

$$\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x}\, dx = \int \frac{\sin^2 x \left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)^2}{\cos^6 x}\, dx = \int \operatorname{tg}^2 x \left(1 + \operatorname{tg}^2 x\right)^2 dx =$$
$$= \left\langle t = \operatorname{tg} x,\ x = \operatorname{arctg} t,\ dx = \frac{dt}{1+t^2} \right\rangle = \int t^2 \left(1+t^2\right)^2 \cdot \frac{dt}{1+t^2} =$$
$$= \int \left(t^2 + t^4\right) dt = \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} + C = \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x + \frac{1}{5} \operatorname{tg}^5 x + C.$$

3 Интегралы от произведений $\cos mx \cos nx$, $\sin mx \sin nx$, $\sin mx \cos nx$

Из тригонометрии известны формулы

$$\cos mx \cos nx = \frac{1}{2}\left[\cos\left(m-n\right)x + \cos\left(m+n\right)x\right],$$
$$\sin mx \sin nx = \frac{1}{2}\left[\cos\left(m-n\right)x - \cos\left(m+n\right)x\right],$$
$$\sin mx \cos nx = \frac{1}{2}\left[\sin\left(m-n\right)x + \sin\left(m+n\right)x\right].$$

Эти формулы и применяют для взятия интегралов от их левых частей.

Пример 8. *Найти интеграл*

$$\int \sin 3x \cos 8x\, dx.$$

Решение. Используем третью из упомянутых формул:

$$\int \sin 3x \cos 8x\, dx = \frac{1}{2} \int \left[\sin(-5x) + \sin 11x\right] dx = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}\cos 5x - \frac{1}{11}\cos 11x\right) + C.$$

4 Интегралы от гиперболических функций

Интегралы от гиперболических функций берутся приемами, аналогичными приемам для вычисления интегралов от тригонометрических функций. При этом используются формулы, аналогичные тем, что были использованы для интегрирования тригонометрических функций. Например, можно применить «универсальную гиперболическую подстановку» или формулы понижения степени.

Пример 9. *Найти интеграл*

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sh} x + 3\operatorname{ch} x + 2}.$$

Решение. «Универсальная гиперболическая подстановка» имеет вид

$$t = \operatorname{th}\frac{x}{2},\ x = 2\operatorname{arth} t,\ dx = \frac{2\,dt}{1-t^2},$$
$$\operatorname{sh} x = \frac{2\operatorname{sh}\frac{x}{2}\operatorname{ch}\frac{x}{2}}{\operatorname{ch}^2\frac{x}{2}-\operatorname{sh}^2\frac{x}{2}} = \frac{2\operatorname{th}\frac{x}{2}}{1-\operatorname{th}^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1-t^2},$$
$$\operatorname{ch} x = \frac{\operatorname{ch}^2\frac{x}{2}+\operatorname{sh}^2\frac{x}{2}}{\operatorname{ch}^2\frac{x}{2}-\operatorname{sh}^2\frac{x}{2}} = \frac{1+\operatorname{th}^2\frac{x}{2}}{1-\operatorname{th}^2\frac{x}{2}} = \frac{1+t^2}{1-t^2}.$$

Применим ее к заданному интегралу:

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sh} x + 3\operatorname{ch} x + 2} = \int \frac{2}{\frac{2t}{1-t^2} + 3\frac{1+t^2}{1-t^2} + 2}\cdot\frac{dt}{1-t^2} = 2\int\frac{dt}{t^2+2t+5} =$$
$$= 2\int\frac{dt}{(t+1)^2+4} = \operatorname{arctg}\frac{t+1}{2} + C = \operatorname{arctg}\frac{\operatorname{th}\frac{x}{2}+1}{2} + C.$$

Пример 10. *Найти интеграл*

$$\int \frac{\operatorname{ch} x + \operatorname{ch}^3 x}{1+\operatorname{sh}^2 x}\,dx.$$

Решение. Подынтегральная функция нечетна относительно гиперболического косинуса. Поэтому сделаем замену $t = \operatorname{sh} x$, $dt = \operatorname{ch} x\,dx$:

$$\int \frac{\operatorname{ch} x + \operatorname{ch}^3 x}{1+\operatorname{sh}^2 x}\,dx = \int \frac{(1+\operatorname{ch}^2 x)\operatorname{ch} x}{1+\operatorname{sh}^2 x}\,dx = \int \frac{(2+\operatorname{sh}^2 x)\operatorname{ch} x}{1+\operatorname{sh}^2 x}\,dx =$$
$$= \int\frac{2+t^2}{1+t^2}\,dt = \int\frac{(1+t^2)+1}{1+t^2}\,dt = \int dt + \int\frac{dt}{1+t^2} =$$
$$= t + \operatorname{arctg} t + C = \operatorname{sh} x + \operatorname{arctg}\operatorname{sh} x + C.$$

Пример 11. *Найти интеграл*

$$\int \operatorname{sh}^2 x \operatorname{ch}^4 x\,dx.$$

Решение. Формулы понижения степени для гиперболических синуса и косинуса имеют вид

$$\operatorname{sh}^2 x = \frac{\operatorname{ch} 2x - 1}{2},\ \operatorname{ch}^2 x = \frac{\operatorname{ch} 2x + 1}{2}.$$

Используем их для вычисления заданного интеграла:

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sh}^2 x \operatorname{ch}^4 x\,dx &= \frac{1}{8}\int(\operatorname{ch}2x-1)(\operatorname{ch}2x+1)^2\,dx = \frac{1}{8}\int(\operatorname{ch}^2 2x-1)(\operatorname{ch}2x+1)\,dx = \\ &= \frac{1}{8}\int(\operatorname{ch}^3 2x+\operatorname{ch}^2 2x-\operatorname{ch}2x-1)\,dx = \\ &= \frac{1}{8}\int(\operatorname{sh}^2 2x+1)\operatorname{ch}2x\,dx + \frac{1}{16}\int(\operatorname{ch}4x+1)\,dx - \frac{1}{16}\operatorname{sh}2x - \frac{x}{8} = \\ &= \langle t=\operatorname{sh}2x,\ dt = 2\operatorname{ch}2x\,dx\rangle = \\ &= \frac{1}{16}\int(t^2+1)\,dt + \frac{1}{64}\operatorname{sh}4x + \frac{x}{16} - \frac{1}{16}\operatorname{sh}2x - \frac{x}{8} = \\ &= \frac{t^3}{48}+\frac{t}{16}+\frac{1}{64}\operatorname{sh}4x - \frac{1}{16}\operatorname{sh}2x - \frac{x}{16} + C = \\ &= \frac{1}{48}\operatorname{sh}^3 2x + \cancel{\frac{1}{16}\operatorname{sh}2x} + \frac{1}{64}\operatorname{sh}4x - \cancel{\frac{1}{16}\operatorname{sh}2x} - \frac{x}{16} + C = \\ &= \frac{1}{48}\operatorname{sh}^3 2x + \frac{1}{64}\operatorname{sh}4x - \frac{x}{16} + C.\end{aligned}$$

Пример 12. *Найти интеграл*

$$\int \operatorname{sh}^5 x\,dx.$$

Решение. Преобразуем интеграл и выполним замену:

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sh}^5 x\,dx &= \int \operatorname{sh}^4 x \operatorname{sh} x\,dx = \int \left(\operatorname{ch}^2 x - 1\right)^2 \operatorname{sh} x\,dx = \langle t = \operatorname{ch} x,\ dt = \operatorname{sh} x\,dx\rangle = \\ &= \int \left(t^2-1\right)^2\,dt = \int (t^4 - 2t^2 + 1)\,dt = \\ &= \frac{t^5}{5} - \frac{2t^3}{3} + t + C = \frac{1}{5}\operatorname{ch}^5 x - \frac{2}{3}\operatorname{ch}^3 x + \operatorname{ch} x + C.\end{aligned}$$

□

В Приложении[5)] показано, как система *Mathematica* предпочитает находить интегралы от тригонометрических и гиперболических функций.

Приложение

[1)] Докажем, что указанная подстановка рационализирует рассматриваемый интеграл, то есть превращает его в интеграл от ДРФ.

Однако сначала дадим некоторые определения и убедимся в справедливости некоторых утверждений.

Несократимой ДРФ будем называть такую ДРФ, у которой разложения ее числителя и знаменателя на произведения линейных комплексных множителей общих множителей не имеют. Пусть $P_{m_1}(x)/Q_{n_1}(x)$ и $R_{m_2}(x)/S_{n_2}(x)$ представляют собой несократимые ДРФ. Как и раньше для многочленов, будем рассматривать алгебраическое и функциональное равенства несократимых ДРФ. Именно, две несократимые ДРФ равны функционально, если они равны при любых допустимых значениях аргумента. Две несократимые ДРФ равны алгебраически, если коэффициенты числителя первой пропорциональны коэффициентам числителя второй, и коэффициенты знаменателя первой пропорциональны коэффициентам знаменателя второй, причем, коэффициенты пропорциональности числителей и знаменателей одинаковы. Очевидно, что алгебраическое равенство ДРФ влечет за собой функциональное равенство.

Лемма П1. *Если две несократимые ДРФ равны функционально, то они равны и алгебраически.*

Доказательство. Предположим, что выполняется функциональное равенство двух несократимых ДРФ:

$$\frac{P_{m_1}(x)}{Q_{n_1}(x)} = \frac{R_{m_2}(x)}{S_{n_2}(x)}. \tag{П1}$$

Если предположить, что многочлены $P_{m_1}(x)$ и $R_{m_2}(x)$ не равны алгебраически, то они поразному должны раскладываться в произведение линейных комплексных множителей. Их степени должны быть одинаковы, иначе один из них будет иметь корней больше, чем другой, и функциональное равенство рассматриваемых ДРФ не выполнится. По той же причине корни у них, вообще говоря, должны быть тоже одинаковы. Следовательно, их разложения могут отличаться лишь коэффициентами при старших степенях x. То же справедливо в отношении знаменателей ДРФ. Вынесем в равенстве (П1) коэффициенты при старших степенях многочленов за скобки:

$$\frac{A_1}{A_2}\cdot\frac{\overline{P}_{m_1}(x)}{\overline{Q}_{n_1}(x)} = \frac{B_1}{B_2}\cdot\frac{\overline{P}_{m_1}(x)}{\overline{Q}_{n_1}(x)},$$

где черточка означает, что коэффициент при старшей степени многочлена равен 1. Из этого следует, что

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \alpha,$$

и, значит, $A_1 = \alpha A_2$, $B_1 = \alpha B_2$. Таким образом, коэффициенты числителей и знаменателей пропорциональны с одним и тем же коэффициентом пропорциональности α.

Лемма П2. *Если многочлен $P_m(x)$ четен, то он содержит только четные степени. Нечетный многочлен содержит лишь нечетные степени.*

Доказательство. Пусть многочлен $P_m(x) = a_0x^m + \ldots + a_{m-1}x + a_m$ четен: $P_m(-x) = P_m(x)$. Тогда $P_m(-x) - P_m(x) = 2a_{m-(2k+1)}x^{2k+1} + \ldots + 2a_1x = 0$, где $2k+1 = m$ или $2k+1 = m-1$ в зависимости от четности m. Но многочлен равен нулю, только если все его коэффициенты равны нулю. Поэтому все коэффициенты с нечетными индексами у многочлена $P_m(x)$ равны нулю.

Второе утверждение доказывается аналогично.

Лемма П3. *Если несократимая ДРФ четна, то ее числитель и знаменатель содержат лишь четные степени. Числитель и знаменатель несократимой ДРФ содержат лишь нечетные степени.*

Доказательство. Пусть $P_m(x)/Q_n(x)$ — несократимая ДРФ и выполняется равенство

$$\frac{P_m(-x)}{Q_n(-x)} = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}.$$

В силу леммы П1 должны выполняться равенства $P_m(-x) = P_m(x)$, $Q_n(-x) = Q_n(x)$. Тогда по лемме П2 $P_m(x)$ и $Q_n(x)$ должны содержать только четные степени.

Второе утверждение доказывается аналогично. □

Из доказанных утверждений следует, что, если несократимая ДРФ от двух переменных $R(u, v)$ четна относительно u, то есть $R(-u, v) = R(u, v)$, то она содержит только четные степени u, а, если она нечетна относительно u, то есть $R(-u, v) = -R(u, v)$, то она содержит лишь нечетные степени u. В первом случае ее можно записать как

$$R(u, v) = R_1(u^2, v), \tag{П2}$$

где R_1 — ДРФ. Во втором случае ее можно записать как

$$R(u, v) = R_2(u^2, v)u, \tag{П3}$$

где R_2 — ДРФ, потому что $R(u, v) = \frac{R(u,v)}{u}u = R_2(u^2, v)u$, так как функция $R(u, v)/u$ — четна.

Пусть подынтегральная функция $R(\sin x, \cos x)$ нечетна относительно синуса:

$$R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x),$$

тогда, используя формулу (П3), получим

$$\int R(\sin x, \cos x)\, dx = \int R_2(\sin^2 x, \cos x) \sin x\, dx = \int R_2(1 - \cos^2 x, \cos x) \sin x\, dx =$$
$$= \langle t = \cos x,\ dt = -\sin x\, dx \rangle = -\int R_2(1 - t^2, t)\, dt = \int R_3(t)\, dt,$$

где R_3 — ДРФ.

Тем самым интеграл от тригонометрических функций рационализирован, то есть сведен к интегралу от ДРФ.

2) В этом случае справедлива формула, аналогичная (П3):

$$R(u, v) = R_4(u, v^2)v.$$

Применим ее для рационализации интеграла от рациональной функции, нечетной относительно косинуса:

$$\int R(\sin x, \cos x)\, dx = \int R_4(\sin, \cos^2 x) \cos x\, dx = \int R_4(\sin x, 1 - \sin^2 x) \cos x\, dx =$$
$$= \langle t = \sin x,\ dt = \cos x\, dx \rangle = \int R_4(t, 1 - t^2)\, dt = \int R_5(t)\, dt.$$

Здесь R_4, R_5 — ДРФ.

3) Пусть

$$R(u, v) = R(-u, -v). \tag{П4}$$

Преобразуем эту функцию:

$$R(u,v) = R\left(\frac{u}{v}v, v\right) = R_6\left(\frac{u}{v}, v\right).$$

Равенство (П4) превращается в следующее:

$$R_6\left(\frac{u}{v}, -v\right) = R_6\left(\frac{u}{v}, v\right).$$

Это значит, что функция R_6 — четна относительно v, а тогда из формулы, аналогичной (П2), следует, что

$$R_6\left(\frac{u}{v}, v\right) = R_7\left(\frac{u}{v}, v^2\right).$$

Так что, если подынтегральная функция четна относительно синуса и косинуса, получаем

$$\int R(\sin x, \cos x)\,dx = \int R_7\left(\frac{\sin x}{\cos x}, \cos^2 x\right)\,dx =$$
$$= \left\langle t = \operatorname{tg} x,\ \cos^2 x = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{1+t^2},\ x = \operatorname{arctg} t,\ dx = \frac{dt}{1+t^2}\right\rangle =$$
$$= \int R_7\left(t, \frac{1}{1+t^2}\right)\frac{dt}{1+t^2} = \int R_8(t)\,dt.$$

Должно быть понятно, что R_6, P_7, R_8 — подходящие ДРФ.

4) Это следует из того, что любую рациональную функцию $R(u,v)$ можно представить в виде

$$R(u,v) = \frac{R(u,v) - R(-u,v)}{2} + \frac{R(-u,v) - R(-u,-v)}{2} + \frac{R(-u,-v) + R(u,v)}{2}.$$

Первая дробь нечетна относительно u, вторая нечетна относительно v, а третья четна относительно u и v.

5) Познакомимся с тем, как *Mathematica* интегрирует тригонометрические и гиперболические функции на материале примеров, рассмотренных на лекции.

Результаты решения первых двух примеров ничем не отличаются от решений, полученных вручную:

$$\int \frac{1}{2 + \text{Cos[x]} + \text{Sin[x]}}\,\text{dx}$$

$$\sqrt{2}\,\text{ArcTan}\left[\frac{1+\text{Tan}\left[\frac{x}{2}\right]}{\sqrt{2}}\right]$$

$$\int \frac{\text{Sin[x]}^3}{1+\text{Cos[x]}^2}\,\text{dx}$$

```
-2 ArcTan[Cos[x]]+Cos[x]
```

Следующий пример, однако, *Mathematica* решает по-другому:

$$\int \frac{\text{Cos[x]}^3}{\text{Sin[x]}^2}\,\text{dx}$$

$$-\frac{1}{2}\text{Cot}\left[\frac{x}{2}\right] - \text{Sin[x]} - \frac{1}{2}\text{Tan}\left[\frac{x}{2}\right]$$

Придется показать, что один ответ приводится к другому:

$$-\frac{1}{2}\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2} + \operatorname{ctg}\frac{x}{2}\right) - \sin x = -\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}} + \frac{\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\right) - \sin x =$$

$$= -\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} - \sin x = -\frac{1}{\sin x} - \sin x.$$

Дальше снова совпадение ответов:

$$\int \frac{1+\text{Sin}[x]^2}{1+\text{Cos}[x]^2}\,\text{dx}$$

$$-\text{x} + \frac{3\,\text{ArcTan}\left[\frac{\text{Tan}[x]}{\sqrt{2}}\right]}{\sqrt{2}}$$

Но в очередном примере получаем уж очень непохожий ответ:

$$\int \text{Sin}[x]^6\,\text{Cos}[x]^3\,\text{dx}$$

$$\frac{3\,\text{Sin}[x]}{128} - \frac{1}{96}\text{Sin}[3x] + \frac{3\,\text{Sin}[7x]}{1792} - \frac{\text{Sin}[9x]}{2304}$$

Причина понятна: *Mathematica* старается степени тригонометрических функций преобразовать в тригонометрические функции кратных углов. Но вручную сводить 7-ю и 9-ю степени синуса к синусам семи- и девятикратных углов как-то ...не слишком заманчиво. Поэтому попросим систему упростить результат:

$$\%//\text{Simplify}$$

$$\frac{1}{126}(11+7\,\text{Cos}[2x])\,\text{Sin}[x]^7$$

Ну, с двойным-то углом мы справимся:

$$\frac{1}{126}(11+7\cos 2x)\sin^7 x = \frac{1}{126}[11+7(1-2\sin^2 x)]\sin^7 x =$$
$$= \frac{1}{126}(18-14\sin^2 x)\sin^7 x = \frac{1}{7}\sin^7 x - \frac{1}{9}\sin^9 x,$$

что и требовалось доказать.

Наблюдается странная периодичность — следующий пример снова демонстрирует совпадение:

$$\int \text{Sin}[x]^4\,\text{dx}$$

$$\frac{3\,\text{x}}{8} - \frac{1}{4}\text{Sin}[2x] + \frac{1}{32}\text{Sin}[4x]$$

а потом — опять разные ответы:

$$\int \frac{\text{Sin}[x]^2}{\text{Cos}[x]^6}\,\text{dx}$$

$$-\frac{2\,\text{Tan}[x]}{15} - \frac{1}{15}\text{Sec}[x]^2\,\text{Tan}[x] + \frac{1}{5}\text{Sec}[x]^4\,\text{Tan}[x]$$

причем в ответе, выданном компьютером, фигурирует не модная уже у нас тригонометрическая функция секанса: $\sec x = 1/\cos x$. Приведем ответ, полученный на лекции, к ответу с секансами:

$$\frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} + \frac{\operatorname{tg}^5 x}{5} = \operatorname{tg} x\left(\frac{\operatorname{tg}^2 x}{3} + \frac{\operatorname{tg}^4 x}{5}\right) = \operatorname{tg} x\left(\frac{\sin^2 x}{3\cos^2 x} + \frac{\sin^4 x}{5\cos^4 x}\right) =$$
$$= \operatorname{tg} x\left(\frac{1-\cos^2 x}{3\cos^2 x} + \frac{(1-\cos^2 x)^2}{5\cos^4 x}\right) = \operatorname{tg} x\,\frac{5\cos^2 x(1-\cos^2 x)+3(1-2\cos^2 x+\cos^4 x)}{15\cos^2 x} =$$

$$= \operatorname{tg} x\,\frac{5\cos^2 x - 5\cos^4 x + 3 - 6\cos^2 x + 3\cos^4 x}{15\cos^2 x} = \operatorname{tg} x\,\frac{3-\cos^2 x - 2\cos^4 x}{15\cos^4 x} =$$
$$= \operatorname{tg} x \left(-\frac{2}{15} - \frac{1}{15\cos^2 x} + \frac{1}{5\cos^4 x}\right) = -\frac{2\operatorname{tg} x}{15} - \frac{1}{15}\sec^2 x \operatorname{tg} x + \frac{1}{5}\sec^4 x \operatorname{tg} x.$$

Далее ответы совпадают:

$\int$ `Cos[8x] Sin[3x] dx`

$\frac{1}{10}$ `Cos[5x]` $-\frac{1}{22}$ `Cos[11x]`

а затем, естественно, различаются:

$$\int \frac{1}{\texttt{Sinh[x]} + 3\,\texttt{Cosh[x]} + 2}\,\texttt{dx}$$

$$-\texttt{ArcTan}\left[\texttt{Cosh}\left[\frac{\texttt{x}}{2}\right]\left(2\,\texttt{Cosh}\left[\frac{\texttt{x}}{2}\right] - 2\,\texttt{Sinh}\left[\frac{\texttt{x}}{2}\right]\right)\right]$$

Возьмем производные от этого результата и того, что был получен на лекции:

$$\partial_{\texttt{x}}\left(\texttt{\% // Simplify}\right)$$

$$\frac{1}{2 + 3\,\texttt{Cosh[x]} + \texttt{Sinh[x]}}$$

$$\partial_{\texttt{x}}\left(\texttt{ArcTan}\left[\frac{\texttt{Tanh[x/2]} + 1}{2}\right]\right)\texttt{ // Simplify}$$

$$\frac{1}{2 + 3\,\texttt{Cosh[x]} + \texttt{Sinh[x]}}$$

Оба ответа дают подынтегральную функцию, но сомнения остаются — а вдруг *Mathematica* ошиблась?! Проверим-ка все вручную (да и поупражняемся заодно):

$$\left(-\operatorname{arctg}\left(\operatorname{ch}\frac{x}{2}\left(2\operatorname{ch}\frac{x}{2} - 2\operatorname{sh}\frac{x}{2}\right)\right)\right)' = \left(\operatorname{arctg}\left(-\operatorname{ch} x - 1 + \operatorname{sh} x\right)\right)' =$$
$$= \frac{\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x}{1 + (\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x + 1)^2} = \frac{\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x}{2 + (\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x)^2 + 2(\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x)} =$$
$$= \left\langle \text{умножим на } \operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x \text{ числитель и знаменатель и учтем, что } \operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1 \right\rangle =$$
$$= \frac{1}{2(\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x) + (\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x) + 2} = \frac{1}{3\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x + 2},$$

$$\left(\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{th}\frac{x}{2} + 1}{2}\right)' = \frac{1}{1 + \frac{1}{4}\left(1 + \operatorname{th}\frac{x}{2}\right)^2} \cdot \frac{1}{2\operatorname{ch}^2\frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{2} =$$
$$= \frac{1}{4 + \left(1 + \operatorname{th}\frac{x}{2}\right)^2} \cdot \frac{1}{\operatorname{ch}^2\frac{x}{2}} = \frac{1}{4\operatorname{ch}^2\frac{x}{2} + \left(\operatorname{sh}\frac{x}{2} + \operatorname{ch}\frac{x}{2}\right)^2} =$$
$$= \frac{1}{5\operatorname{ch}^2\frac{x}{2} + \operatorname{sh} x + \operatorname{sh}^2\frac{x}{2}} = \frac{1}{5\frac{\operatorname{ch} x + 1}{2} + \operatorname{sh} x + \frac{\operatorname{ch} x - 1}{2}} = \frac{1}{3\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x + 2}.$$

Вот теперь, кажется, все в порядке.

Перейдем к следующему примеру:

$$\int \frac{\texttt{Cosh[x]} + \texttt{Cosh[x]}^3}{1 + \texttt{Sinh[x]}^2} \texttt{dx}$$

$$2\,\texttt{ArcTan}\left[\texttt{Tanh}\left[\frac{\texttt{x}}{2}\right]\right] + \texttt{Sinh[x]}$$

Ответ не похож на найденный на лекции. Снова продифференцируем оба ответа:

$$(\operatorname{sh} x + \operatorname{arctg} \operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x + \frac{\operatorname{ch} x}{1 + \operatorname{sh}^2 x} = \operatorname{ch} x + \frac{1}{\operatorname{ch} x},$$

$$\left(2 \operatorname{arctg} \operatorname{th} \frac{x}{2} + \operatorname{sh} x\right)' = \frac{2}{1 + \operatorname{th}^2 \frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{2 \operatorname{ch}^2 \frac{x}{2}} + \operatorname{ch} x =$$

$$= \frac{2}{\operatorname{ch}^2 \frac{x}{2} + \operatorname{sh}^2 \frac{x}{2}} + \operatorname{ch} x = \frac{1}{\operatorname{ch} x} + \operatorname{ch} x.$$

Получили одно и то же выражение, которое приводится к подынтегральной функции:

$$\operatorname{ch} x + \frac{1}{\operatorname{ch} x} = \operatorname{ch} x + \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{ch}^2 x} = \frac{\operatorname{ch}^3 x + \operatorname{ch} x}{1 + \operatorname{sh}^2 x}.$$

Взятие очередного интеграла дает несовпадающий ответ:

$$\int \texttt{Sinh[x]}^2\, \texttt{Cosh[x]}^4\, \texttt{dx}$$

$$-\frac{\texttt{x}}{16} - \frac{1}{64}\texttt{Sinh[2x]} + \frac{1}{64}\texttt{Sinh[4x]} + \frac{1}{192}\texttt{Sinh[6x]}$$

Но мы уже знаем, в чем дело: *Mathematica* предпочитает, как и в случае с тригонометрическими функциями, степеням функций кратные аргументы. Что ж, преобразуем в ответе, полученном на лекции, куб гиперболического синуса:

$$\operatorname{sh}^3 2x = \operatorname{sh}^2 2x \operatorname{sh} 2x = \frac{\operatorname{ch} 4x - 1}{2} \operatorname{sh} 2x = \frac{1}{4}[\operatorname{sh} 6x + \operatorname{sh}(-2x)] - \frac{1}{2} \operatorname{sh} 2x = \frac{1}{4} \operatorname{sh} 6x - \frac{3}{4} \operatorname{sh} 2x.$$

Подставим это выражение в названный ответ и придем к результату, предложенному системой *Mathematica*:

$$\frac{1}{48} \operatorname{sh}^3 2x + \frac{1}{64} \operatorname{sh} 4x - \frac{x}{16} = \frac{1}{48} \left(\frac{1}{4} \operatorname{sh} 6x - \frac{3}{4} \operatorname{sh} 2x\right) + \frac{1}{64} \operatorname{sh} 4x - \frac{x}{16} =$$

$$= -\frac{x}{16} - \frac{1}{64} \operatorname{sh} 2x + \frac{1}{64} \operatorname{sh} 4x + \frac{1}{192} \operatorname{sh} 6x.$$

В последнем примере

$$\int \texttt{Sinh[x]}^5\, \texttt{dx}$$

$$\frac{5\texttt{Cosh[x]}}{8} - \frac{5}{48}\texttt{Cosh[3x]} + \frac{1}{80}\texttt{Cosh[5x]}$$

и поэтому из-за различия в ответах придется для гиперболического косинуса преобразовать уже пару степеней:

$$\operatorname{ch}^3 x = \operatorname{ch} x^2 \operatorname{ch} x = \frac{\operatorname{ch} 2x + 1}{2} \operatorname{ch} x = \frac{1}{4} (\operatorname{ch} 3x + \operatorname{ch} x) + \frac{1}{2} \operatorname{ch} x =$$

$$= \frac{1}{4} \operatorname{ch} 3x + \frac{3}{4} \operatorname{ch} x,$$

$$\begin{aligned}\operatorname{ch}^5 x = \operatorname{ch} x^2 \operatorname{ch}^3 x = \frac{1}{8}(\operatorname{ch} 2x + 1)(\operatorname{ch} 3x + 3\operatorname{ch} x) = \\ = \frac{1}{16}(\operatorname{ch} 5x + \operatorname{ch} x) + \frac{1}{8}\operatorname{ch} 3x + \frac{3}{16}(\operatorname{ch} 3x + \operatorname{ch} x) + \frac{3}{8}\operatorname{ch} x = \\ = \frac{1}{16}\operatorname{ch} 5x + \frac{5}{16}\operatorname{ch} 3x + \frac{5}{8}\operatorname{ch} x.\end{aligned}$$

Подставляя эти выражения в найденный на лекции ответ, получим ответ, найденный системой *Mathematica*:

$$\frac{1}{5}\operatorname{ch}^5 x - \frac{2}{3}\operatorname{ch}^3 x + \operatorname{ch} x =$$
$$= \frac{1}{5}\left(\frac{1}{16}\operatorname{ch} 5x + \frac{5}{16}\operatorname{ch} 3x + \frac{5}{8}\operatorname{ch} x\right) - \frac{2}{3}\left(\frac{1}{4}\operatorname{ch} 3x + \frac{3}{4}\operatorname{ch} x\right) + \operatorname{ch} x =$$
$$= \frac{1}{80}\operatorname{ch} 5x + \frac{1}{16}\operatorname{ch} 3x + \frac{1}{8}\operatorname{ch} x - \frac{1}{6}\operatorname{ch} 3x - \frac{1}{2}\operatorname{ch} x + \operatorname{ch} x =$$
$$= \frac{5}{8}\operatorname{ch} x - \frac{5}{48}\operatorname{ch} 3x + \frac{1}{80}\operatorname{ch} 5x.$$

Какой вывод можно сделать в связи с частым несовпадением ответов, предлагаемых компьютером, и находимых вручную? Первый вывод: различные приемы интегрирования и преобразования его результатов могут привести к довольно непохожим выражениям. Второй: поскольку автору не известны абсолютно безошибочно работающие программы, рекомендуется в ответственных случаях все же проверять работу системы *Mathematica* вручную.

К счастью, для инженеров существуют и другие, «инженерные», методы проверки. Например, можно построить графики двух ответов и посмотреть, совпадают ли они или не получаются ли друг из друга параллельным переносом вдоль оси Oy. Если так, то, возможно, ответы представляют собой одну и ту же первообразную.

Конечно, с точки зрения математика такая проверка ничего не доказывает, но в инженера вселяет некоторую «инженерную» уверенность в себе.

Литература

[1] Бугров Я.С., Никольский С.М. *Высшая математика. Дифференциальное и интегральное исчисление.* – М.: Наука, 1984, – с. 220-221.

[2] Письменный Д.Т. *Конспект лекций по высшей математике.* – М.: Рольф, 2000. Ч. 1. – с. 212–214.