

# Тройной интеграл

Волченко Ю.М.

## Содержание лекции

Понятие тройного интеграла. Условия его существования. Теорема о среднем. Вычисление тройного интеграла в декартовых и криволинейных координатах. Тройной интеграл в цилиндрических и сферических координатах. Геометрическое и физические приложения тройного интеграла.

Применение системы *Mathematica* для вычисления тройных интегралов

20 февраля 2015 г.

## 1 Понятие тройного интеграла

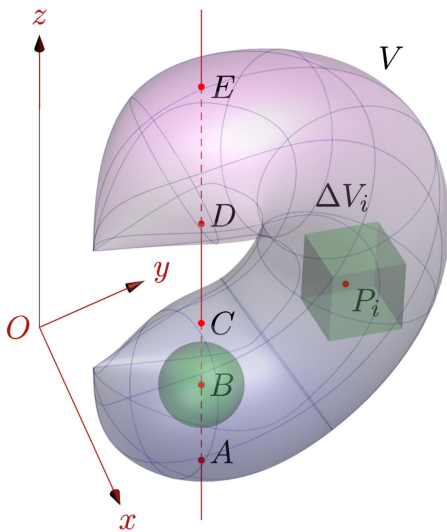


Рис. 1. Область интегрирования  $V$ .

Как вы помните, чтобы ввести понятие определенного (однократного) интеграла, нам пришлось разбивать на ячейки отрезок — одномерный объект; чтобы ввести понятие двойного интеграла, мы разбивали на части плоскую фигуру — двумерный объект. Так что для введения следующего типа интегралов, нам надо к 2 прибавить 1, а затем разбить на ячейки что-нибудь трехмерное. Впрочем, подходящий трехмерный объект в математике давно существует, этот объект называется (трехмерным) телом.

Итак, выберем в общей схеме определения интегралов<sup>†</sup> в качестве геометрического объекта  $Q$  тело  $V \in \mathbb{R}^3$  (рис. 1), на котором определена функция  $f(P)$ ,  $P(x, y, z) \in V$ ; разобьем это тело произвольными поверхностями на части-ячейки  $\Delta V_i$  и произвольным же образом в каждой ячейке выберем точки  $P_i$ . Если для интегральной суммы

$$\sum_{i=1}^n f(P_i) \Delta V_i \quad (1)$$

<sup>†</sup>Лекция «Двойной интеграл I».

существует интегральный предел, то он называется **тройным интегралом** от функции  $f(P)$  по области  $V$  и обозначается

$$\iiint_V f(P) dV. \quad (2)$$

Если функция  $f(x, y, z)$  неотрицательна и имеет физический смысл, например, является (объемной) плотностью заряда, то величина  $f(P_i) \Delta V_i$  будет приближенным выражением заряда ячейки  $\Delta V_i$ , а сумма (1) — приближенным значением заряда всего тела. Тогда точное значение полного заряда даст тройной интеграл (2).

Для того чтобы сформулировать условия, при которых существует тройной интеграл, введем следующие понятия.

Поверхность  $F(x, y, z) = 0$  называется **гладкой**, если  $F, F'_x, F'_y, F'_z$  непрерывны и  $\nabla F \neq 0$  в любой точке поверхности.

Поверхность называется **кусочно гладкой**, если ее можно разрезать на конечное число гладких кусков.

**Теорема 1.** Если функция  $f(x, y, z)$  непрерывна на ограниченном замкнутом множестве  $V$  с кусочно гладкой границей, то тройной интеграл (2) существует.

**Теорема 2.** Если функция  $f$  непрерывна на ограниченном замкнутом множестве  $V$  за исключением разрывов типа скачков на конечном числе гладких поверхностей, то тройной интеграл (2) существует.

**Теорема 3** (о среднем). Если функция  $f(x, y, z)$  непрерывна в ограниченной замкнутой и связной области  $V$ , то найдется точка  $M \in V$  такая, что

$$\iiint_V f(P) dV = f(M) V.$$

Доказательство последней теоремы аналогично доказательству теоремы о среднем для двойного интеграла.

## 2 Вычисление в декартовых координатах

Область  $V$  называется **правильной в направлении** оси  $Oz$ , если любая прямая, проходящая через внутреннюю точку области параллельно этой оси, пересекает границу области ровно в двух точках, а множество  $D$ , в которое

проектируется область на плоскость  $xOy$ , является правильной либо в направлении  $Ox$ , либо в направлении  $Oy$ .

Область на рис. 1 не является правильной в направлении оси  $Oz$ .

Аналогично определяется область, правильная в направлении оси  $Ox$ , и область, правильная в направлении оси  $Oy$ .

Пусть область  $V$  задается неравенствами  $a \leq x \leq b$ ,  $\alpha(x) \leq y \leq \beta(x)$ ,  $\varphi(x, y) \leq z \leq \psi(x, y)$  (рис. 2), тогда эта область правильна в направлении оси  $Oz$ , причем, однозначно проектируется во множество  $D$  на плоскости  $xOy$ , которое определяют первые два неравенства, а множество  $D$ , в свою очередь, однозначно проектируется в отрезок  $[a, b]$  на оси  $Ox$ . Для такой области тройной интеграл в декартовых координатах вычисляется по формуле

$$\begin{aligned} \iiint_V f(P) dV &= \int_a^b \left\{ \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \left[ \int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x, y, z) dz \right] dy \right\} dx = \\ &= \int_a^b dx \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} dy \int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x, y, z) dz. \end{aligned} \quad (3)$$

По-прежнему, интеграл, стоящий в середине формулы, называют **повторным**. И так же, как в случае двойного интеграла, если область  $V$  не является правильной в направлении какой-либо координатной оси, ее разбивают на конечное число областей, правильных в одном из этих направлений, а затем применяют свойство 4 из общих свойств интегралов.

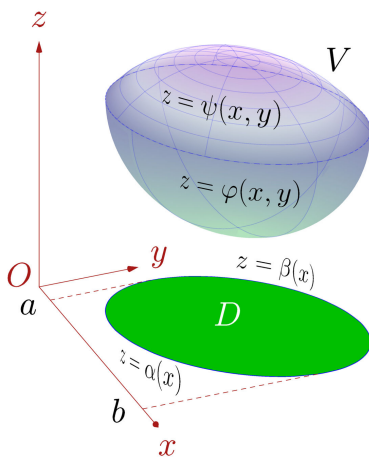


Рис. 2.

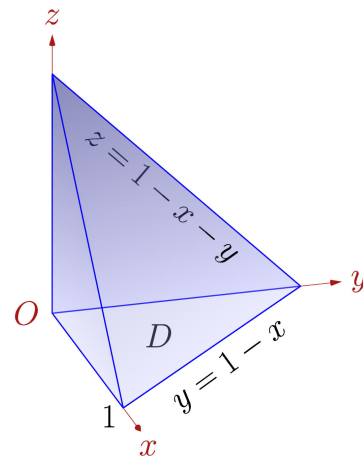


Рис. 3. К примеру 1.

**Пример 1.** Найти объем тетраэдра, изображенного на рис 3.

**Решение.** Тетраэдр задается неравенствами  $0 \leq x \leq 1$ ,  $0 \leq y \leq 1 - x$ ,  $0 \leq z \leq 1 - x - y$  (рис. 3). Из теоремы о среднем при  $f(P) \equiv 1$  следует, что объем тетраэдра

выражается формулой

$$V = \iiint_V dV.$$

Применяя формулу (3) с учетом того, что  $a = 0$ ,  $b = 1$ ,  $\alpha(x) \equiv 0$ ,  $\beta(x) = 1 - x$ ,  $\varphi(x, y) \equiv 0$ ,  $\psi(x, y) = 1 - x - y$ , получаем

$$\begin{aligned} V &= \iiint_V dV = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} dz = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} z \Big|_0^{1-x-y} dy = \\ &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (1-x-y) dy = \int_0^1 \left[ (1-x)y - \frac{y^2}{2} \right]_0^{1-x} dx = \\ &= \int_0^1 \left[ (1-x)^2 - \frac{(1-x)^2}{2} \right] dx = \int_0^1 \frac{(1-x)^2}{2} dx = -\frac{(1-x)^3}{6} \Big|_0^1 = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

### 3 Криволинейные координаты

Замена переменных в трехмерном случае вполне аналогична замене переменных в двойном интеграле.

Криволинейные координаты в пространстве задаются функциями

$$x = x(u, v, w), \quad y = y(u, v, w), \quad z = z(u, v, w), \quad (4)$$

которые предполагаются непрерывно дифференцируемыми, определенными в ограниченной замкнутой области с кусочно-гладкой границей  $V'$  и принимающими значения в замкнутой области с кусочно-гладкой границей  $V$ .

Если зависимости (4) осуществляют взаимно однозначное соответствие

$$(u, v, w) \in V' \stackrel{(4)}{\iff} (x, y, z) \in V,$$

то справедлива формула

$$\boxed{\iiint_V f(P) dV = \iiint_{V'} f[x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)] |J| dV',} \quad (5)$$

где  $J$  — **якобиан** перехода к координатам  $(u, v, w)$ :

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}.$$

**Пример 2.** Найти объем эллипсоида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad a > 0, b > 0, c > 0.$$

*Решение.* Заменяем тройку декартовых переменных  $(x, y, z)$  тройкой новых переменных  $(\varphi, \rho, \theta)$  по формулам

$$x = a\rho \cos \varphi \sin \theta, \quad y = b\rho \sin \varphi \sin \theta, \quad z = c\rho \cos \theta,$$

$-\pi \leq \varphi < \pi, 0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \theta \leq \pi$ . В новых переменных уравнение эллипсоида принимает очень простой вид:  $\rho = 1$ . Действительно,

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} &= \rho^2 \cos^2 \varphi \sin^2 \theta + \rho^2 \sin^2 \varphi \sin^2 \theta + \rho^2 \cos^2 \theta = \\ &= \rho^2 \sin^2 \theta + \rho^2 \cos^2 \theta = \rho^2 = 1. \end{aligned}$$

Найдем якобиан перехода:

$$\begin{aligned} J &= \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \\ \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -a\rho \sin \varphi \sin \theta & a \cos \varphi \sin \theta & a\rho \cos \varphi \cos \theta \\ b\rho \cos \varphi \sin \theta & b \sin \varphi \sin \theta & b\rho \sin \varphi \cos \theta \\ 0 & c \cos \theta & -c\rho \sin \theta \end{vmatrix} = \\ &= abc\rho^2 \sin \theta \begin{vmatrix} -\sin \varphi & \cos \varphi \sin \theta & \cos \varphi \cos \theta \\ \cos \varphi & \sin \varphi \sin \theta & \sin \varphi \cos \theta \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \end{vmatrix} = \\ &= abc\rho^2 \sin \theta \left[ -\cos \theta (-\sin^2 \varphi \cos \theta - \cos^2 \varphi \cos \theta) - \right. \\ &\quad \left. -\sin \theta (-\sin^2 \varphi \sin \theta - \cos^2 \varphi \sin \theta) \right] = \\ &= abc\rho^2 \sin \theta (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = abc\rho^2 \sin \theta. \end{aligned}$$

Далее применяем формулу (5):

$$\begin{aligned} V &= \iiint_V dV = \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \int_0^1 d\rho \int_0^{\pi} abc\rho^2 \sin \theta d\theta = abc \varphi \Big|_{-\pi}^{\pi} \frac{\rho^3}{3} \Big|_0^1 (-\cos \theta) \Big|_0^{\pi} = \\ &= 2\pi \frac{abc}{3} \cdot 2 = \frac{4}{3} \pi abc. \end{aligned}$$

□

Примерами криволинейных координат в пространстве служат цилиндрические и сферические координаты, к знакомству с которыми мы и переходим.

### 3.1 Цилиндрические координаты

Цилиндрические координаты еще называют полярными координатами в пространстве. Как и полярная, цилиндрическая система координат включает в себя полюс  $P$  и полярную ось  $p$ , расположенные в заданной плоскости. Для

пространства добавляется еще ось  $l$ , проходящая через полюс перпендикулярно упомянутой плоскости, причем, ее направление выбирается так, чтобы увеличение полярного угла  $\varphi$  при наблюдении со стороны положительного направления оси  $l$  происходило против часовой стрелки.

Совместим полярную ось с осью абсцисс декартовой прямоугольной системы координат, ось  $l$  — с осью  $Oz$ , а названную плоскость — с плоскостью  $xOy$ . Тогда цилиндрическими координатами точки  $M$  будет упорядоченная тройка чисел  $(\varphi, \rho, z)$ , где  $\varphi$  — угол между осью  $Ox$  и проекцией радиус-вектора точки на плоскость  $xOy$ , отсчитываемый против часовой стрелки;  $\rho$  — длина этой проекции (расстояние от точки  $M$  до оси аппликат);  $z$  — обычная декартова аппликата точки в пространстве, т. е. расстояние от точки  $M$  до плоскости  $xOy$ . Цилиндрическая система координат изображена на рис. 4.

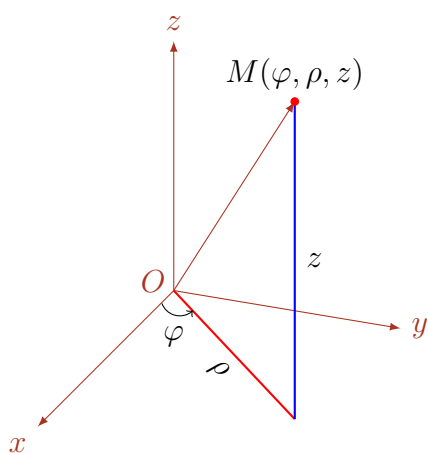


Рис. 4. Цилиндрические координаты.

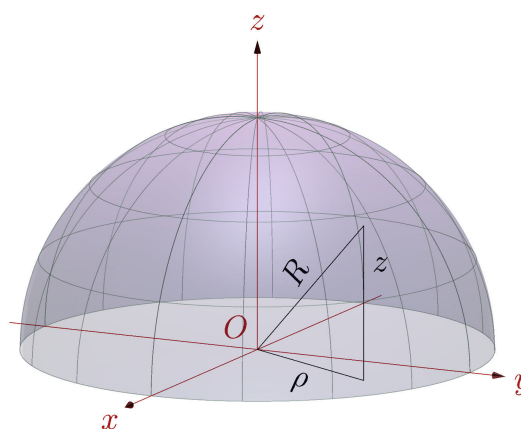


Рис. 5. К примеру 3.

Запишем формулы перехода от цилиндрической к декартовой системе координат:

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad z = z; \quad -\pi < \varphi \leq \pi, \quad \rho \geq 0. \quad (6)$$

Найдем якобиан перехода:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\rho \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ \rho \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\rho (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) = -\rho.$$

Следовательно, в соответствии с формулой (5) тройной интеграл в цилиндрических координатах принимает вид

$$\iiint_V f(P) dV = \iiint_{V'} \rho f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, z) dV'. \quad (7)$$

Цилиндрические координаты обычно применяют для вычисления тройных интегралов по областям, обладающим симметрией относительно оси  $Oz$ .

**Пример 3.** Найти заряд полусферы  $V$  (рис. 5), если объемная плотность заряда есть  $\gamma = 1 + z$ .

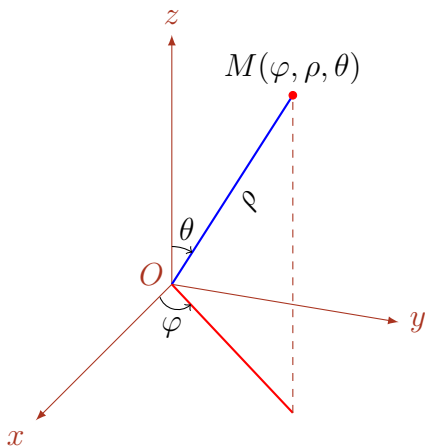
*Решение.* Как уже было сказано, заряд  $q$  тела  $V$  выражается тройным интегралом

$$q = \iiint_V \gamma(P) dV.$$

Перейдем в этом интеграле к цилиндрическим координатам по формулам (6). Тогда уравнение полусферы в декартовых координатах  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$  превратится в следующее:  $\rho^2 + z^2 = R^2$ . Отсюда  $z = \sqrt{R^2 - \rho^2}$ . По формуле (7) получим

$$\begin{aligned} q &= \iiint_V \gamma dV = \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \int_0^R d\rho \int_0^{\sqrt{R^2 - \rho^2}} \rho(1+z) dz = \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \int_0^R \rho \left( z + \frac{z^2}{2} \right) \Big|_0^{\sqrt{R^2 - \rho^2}} d\rho = \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \int_0^R \rho \left[ \sqrt{R^2 - \rho^2} + \frac{R^2 - \rho^2}{2} \right] d\rho = \\ &= \langle t = R^2 - \rho^2, dt = -2\rho d\rho \rangle = -\frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \int_{R^2}^0 \left( \sqrt{t} + \frac{t}{2} \right) dt = \\ &= -\frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \left( \frac{2t^{3/2}}{3} + \frac{t^2}{4} \right) \Big|_{R^2}^0 d\varphi = \frac{\varphi}{2} \Big|_{-\pi}^{\pi} \left( \frac{2R^3}{3} + \frac{R^4}{4} \right) = \frac{\pi}{12} R^3 (3R + 8). \end{aligned}$$

### 3.2 Сферические координаты



Для получения сферических координат используют те же, что и в предыдущем п., полюс  $P$ , полярную ось  $\rho$  и полярный угол  $\varphi$ . Отличие от цилиндрических координат заключается в том, что после совмещения с декартовой прямоугольной системой координат переменная  $\rho$  приобретает смысл радиус-вектора точки  $M$ , а вместо переменной  $z$  вводят переменную  $\theta$ , которая представляет собой угол между осью  $Oz$  и упомянутым радиус-вектором.

Нетрудно видеть, что сферическую систему координат тоже можно считать полярной системой координат в пространстве.

Переход от сферической системы координат к декартовой выполняется по формулам

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \varphi \sin \theta, & y &= \rho \sin \varphi \sin \theta, & z &= \rho \cos \theta, \\ -\pi &\leq \varphi < \pi, & \rho &\geq 0, & 0 &\leq \theta \leq \pi. \end{aligned} \quad (8)$$

Используя якобиан перехода, найденный в примере 2, при  $a = b = c = 1$ , получим якобиан перехода к сферическим координатам:

$$J = \rho^2 \sin \theta.$$

Из формулы (5) следует, что тройной интеграл в сферических координатах вычисляется следующим образом:

$$\iiint_V f(P) dV = \iiint_{V'} \rho^2 \sin \theta f(\rho \cos \varphi \sin \theta, \rho \sin \varphi \sin \theta, \rho \cos \theta) dV'. \quad (9)$$

**Пример 4.** Найти заряд шара  $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$  при условии, что плотность заряда есть  $\gamma = x^2 + y^2$ .

*Решение.* Перейдем к сферическим координатам, в которых неравенство, определяющее шар, имеет вид  $\rho \leq R$  (доказывается, как в том же примере 2) и вычислим интеграл, используя формулу (9):

$$\begin{aligned} V &= \iiint_V \gamma(x, y, z) dV = \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \int_0^R d\rho \int_0^{\pi} \rho^2 \cdot \rho^2 \sin \theta d\theta = \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \cdot \int_0^R \rho^4 d\rho \cdot \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta = \varphi \Big|_{-\pi}^{\pi} \cdot \frac{\rho^5}{5} \Big|_0^R \cdot (-\cos \theta) \Big|_0^{\pi} = \frac{4\pi R^5}{5}. \end{aligned}$$

## 4 Применение тройного интеграла

Как мы уже видели, тройной интеграл используют для вычисления объема тела  $V$ :

$$V = \iiint_V dV.$$

Заряд  $q$  (масса  $m$ ) тела с плотностью заряда (вещества)  $\gamma(x, y, z)$  выражается формулой

$$\left. \begin{array}{l} q \\ m \end{array} \right] = \iiint_V \gamma(x, y, z) dV.$$



С помощью тройного интеграла находят статические моменты относительно координатных плоскостей<sup>1)</sup>:

$$M_{yz} = \iiint_V x\gamma(x, y, z) dV, \quad M_{xz} = \iiint_V y\gamma(x, y, z) dV, \quad (10)$$

$$M_{xy} = \iiint_V z\gamma(x, y, z) dV,$$

а уже с их помощью — координаты центра тяжести  $C(c_x, c_y, c_z)$  тела:

$$c_x = \frac{1}{m} \iiint_V x\gamma(x, y, z) dV, \quad c_y = \frac{1}{m} \iiint_V y\gamma(x, y, z) dV, \quad (11)$$

$$c_z = \frac{1}{m} \iiint_V z\gamma(x, y, z) dV. \quad (12)$$

Так же, как и для плоских кривых и фигур<sup>†</sup>, доказывається

**Теорема 4.** *Статический момент нескольких тел равен сумме их статических моментов.*

**Теорема 5.** *Если материальное тело однородно и симметрично относительно одной из координатных плоскостей, то его соответствующий статический момент равен нулю.*

*Доказательство.* Пусть, например, тело  $V$  симметрично относительно плоскости  $xOy$  и любая прямая, параллельная оси  $Oz$  и проходящая через внутреннюю точку  $V$ , пересекает границу тела ровно в двух точках (если это не так, разбиваем тело на части, для которых такое свойство выполняется, и применяем предыдущую теорему). Это означает, что в силу симметрии тело сверху ограничено поверхностью  $\varphi(x, y)$ , а снизу — поверхностью  $-\varphi(x, y)$ . Этого достаточно, чтобы статический момент  $M_{xy}$  обратился в 0:

$$M_{xy} = \iiint_V z\bar{\gamma} dV = \bar{\gamma} \iint_D dS \int_{-\varphi(y,z)}^{\varphi(y,z)} z dz = \bar{\gamma} \iint_D \frac{z^2}{2} \Big|_{-\varphi(x,y)}^{\varphi(x,y)} dS = 0,$$

где  $D$  — проекция тела на плоскость  $xOy$ ,  $\bar{\gamma}$  — постоянная плотность вещества.

<sup>†</sup>Лекция «Физические приложения определенного интеграла».

**Следствие 1.** Если тело симметрично относительно некоторой плоскости, то его центр тяжести находится в этой плоскости.

*Доказательство.* Сделаем упомянутую плоскость плоскостью  $xOy$ , тогда из теоремы следует, что  $M_{xy} = 0$ , а из (12) имеем  $c_z = 0$ .

**Следствие 2.** Если тело имеет две или три плоскости симметрии, то его центр тяжести лежит на пересечении этих плоскостей.

**Пример 5.** Центром тяжести однородного эллипсоида является его центр, так как в нем пересекаются три его плоскости симметрии. Центром тяжести прямоугольного параллелепипеда является точка пересечения его диагоналей.

И вновь, так же, как для плоских кривых и фигур<sup>†</sup>, доказываемся

**Теорема 6.** Центр тяжести нескольких тел является центром тяжести их центров тяжести, если считать, что в последних сосредоточены массы тел.

Перейдем к моментам инерции тела. Используя разбиение тела на ячейки и реализуя интегральный предел, нетрудно получить формулы для моментов инерции тела  $V$  с плотностью вещества  $\gamma(x, y, z)$  относительно начала координат:

$$I_O = \iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) \gamma(x, y, z) dV,$$

относительно координатных осей:

$$\begin{aligned} I_x &= \iiint_V (y^2 + z^2) \gamma(x, y, z) dV, & I_y &= \iiint_V (x^2 + z^2) \gamma(x, y, z) dV, \\ I_z &= \iiint_V (x^2 + y^2) \gamma(x, y, z) dV, \end{aligned} \quad (13)$$

и относительно координатных плоскостей:

$$\begin{aligned} I_{yz} &= \iiint_V x^2 \gamma(x, y, z) dV, & I_{xz} &= \iiint_V y^2 \gamma(x, y, z) dV, \\ I_{xy} &= \iiint_V z^2 \gamma(x, y, z) dV. \end{aligned}$$

<sup>†</sup>Лекция «Физические приложения определенного интеграла».

**Пример 6.** Найти центр тяжести полушара, изображенного на рис. 5.

*Решение.* Очевидно, можно считать, что плотность  $\gamma(x, y, z) \equiv 1$ . Поскольку полушар симметричен относительно координатных плоскостей  $xOz$  и  $yOz$ , то его центр тяжести лежит на их пересечении, т. е. на оси  $Oz$ . Поэтому  $c_x = c_y = 0$  и остается найти  $c_z$ . Масса полушара, требуемая для применения формулы (12), при единичной плотности численно равна его объему, который нам уже известен<sup>†</sup>:  $m = \frac{2}{3} \pi R^3$ . Переходя к сферическим координатам по формулам (8), получим

$$\begin{aligned} M_{xy} &= \iiint_V z \, dV = \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \int_0^R \rho \int_0^{\pi/2} \rho \cos \theta \rho^2 \sin \theta \, d\theta = \\ &= \varphi \Big|_{-\pi}^{\pi} \frac{\rho^4}{4} \Big|_0^R \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \sin 2\theta \, d\theta = \frac{\pi R^4}{4} \cdot \left( -\frac{1}{2} \cos 2\theta \right) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi R^4}{4}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$c_z = \frac{M_{xy}}{m} = \frac{\pi R^4}{4} : \frac{2}{3} \pi R^3 = \frac{3R}{8}.$$

**Пример 7.** Вычислить момент инерции относительно оси  $Oz$  однородной пирамиды  $V$  плотности  $\gamma = 30$ , изображенной на рис. 3.

*Решение.* По формуле (13) находим

$$\begin{aligned} I_z &= \iiint_V (x^2 + y^2) \gamma(x, y, z) \, dV = 30 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} (x^2 + y^2) \, dz = \\ &= 30 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (x^2 + y^2) z \Big|_0^{1-x-y} dy = 30 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (x^2 + y^2) (1-x-y) \, dy = \\ &= 30 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (x^2 + y^2 - x^3 - xy^2 - x^2y - y^3) \, dy = \\ &= 30 \int_0^1 \left[ (x^2 - x^3) y - \frac{x^2 y^2}{2} + (1-x) \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} \right] \Big|_0^{1-x} dx = \\ &= 30 \int_0^1 \left[ x^2 (1-x)^2 - \frac{x^2 (1-x)^2}{2} + \frac{(1-x)^4}{3} - \frac{(1-x)^4}{4} \right] dx = \\ &= 30 \left[ \int_0^1 \frac{x^2 - 2x^3 + x^4}{2} dx + \int_0^1 \frac{(1-x)^4}{12} dx \right] = \\ &= \left[ 5x^3 - \frac{15x^4}{2} + 3x^5 - \frac{(1-x)^5}{2} \right] \Big|_0^1 = 8 - \frac{15}{2} + \frac{1}{2} = 1. \end{aligned}$$

□

В Приложении можно ознакомиться с применением системы *Mathematica* для вычисления тройных интегралов и связанных с ними геометрических и физических величин<sup>2)</sup>.

<sup>†</sup>Лекция «Геометрические приложения определенного интеграла».

## Приложение

1) Здесь мы несколько изменим определение центра тяжести, которое, впрочем, будет вполне согласовано с определением, данным ранее<sup>†</sup>.

Для системы материальных точек, имеющих массы  $m_1, m_2, \dots, m_n$  и радиус-векторы, соответственно,  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n$ ,  $\mathbf{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$ , **центром тяжести** называется точка  $C(c_x, c_y, c_z)$  с радиус-вектором

$$\mathbf{r}_C = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i, \quad (\text{П1})$$

где  $m = \sum_{i=1}^n m_i$  — общая масса точек.

Величину  $\mathbf{M}_A = \sum_{i=1}^n m_i (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_A) = \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i - m \mathbf{r}_A$  называют **статическим моментом системы относительно точки A**. Из его определения и равенства (П1) видно, что

$$\mathbf{M}_A = m (\mathbf{r}_C - \mathbf{r}_A).$$

Это означает, что, *если в центр тяжести поместить всю массу системы, то статический момент этой точки относительно любой точки A будет равен статическому моменту всей системы точек относительно A*. Кроме того, если точка A и есть центр тяжести, то  $\mathbf{M}_A = \mathbf{M}_C = \mathbf{0}$ .

**Статическими моментами относительно координатных плоскостей** называются величины

$$M_{yz} = \sum_{i=1}^n m_i x_i, \quad M_{xz} = \sum_{i=1}^n m_i y_i, \quad M_{xy} = \sum_{i=1}^n m_i z_i.$$

Формула (П1) показывает, что

$$M_{yz} = m c_x, \quad M_{xz} = m c_y, \quad M_{xy} = m c_z,$$

следовательно, координаты центра тяжести можно найти во формулам

$$c_x = \frac{M_{yz}}{m} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{m}, \quad c_y = \frac{M_{xz}}{m} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i y_i}{m}, \quad c_z = \frac{M_{xy}}{m} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i z_i}{m}. \quad (\text{П2})$$

Далее остается лишь перенести рассмотренные понятия на случай трехмерного тела. Если, например, требуется определить статический момент тела  $V$  относительно плоскости  $yOz$ , тело произвольными поверхностями разбивают на  $n$  ячеек, выбирают произвольную точку  $P_i(x_i, y_i)$  в каждой ячейке  $\Delta V_i$  и отождествляют последнюю с этой точкой, считая массой  $P_i$  произведение  $\gamma(P_i) \Delta V_i$ , а ее статическим моментом  $M_{yz}$  — произведение  $x_i \gamma(P_i) \Delta V_i$ . Суммируя все такие величины, получим приближенное значение статического момента  $M_{yz}$  тела:

$$M_{yz} \approx \sum_{i=1}^n x_i \gamma(P_i) \Delta V_i.$$

Осуществляя интегральный предельный переход, находим точную формулу для этого статического момента (см. (10)). Аналогично получаются формулы для двух других статических моментов.

Из формул (П2) затем сразу получаются формулы для координат центра тяжести (11) и (12).

<sup>†</sup>Лекция «Физические приложения определенного интеграла».

2) Применение системы *Mathematica* к вычислению тройных интегралов почти ничем не отличается от такового для двойных интегралов. Просто число переменных увеличивается на единицу.

Так, пример 1 можно решить, записав следующий скрипт:

```
Integrate[1, {x, 0, 1}, {y, 0, 1 - x}, {z, 0, 1 - x - y}]
```

$$\frac{1}{6}$$

Решение примера 2 получим, изобразив повторный интеграл с помощью символов интеграла:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^1 a b c r^2 \sin[t] dr dt df$$

$$\frac{4}{3} a b c \pi$$

*Mathematica* 10 дает возможность решить пример 3, задав область интегрирования в довольно общем виде:

```
reg = ImplicitRegion[x^2 + y^2 + z^2 ≤ R^2 && z ≥ 0 && R > 0, {x, y, z}];
```

$$\int_{\{x,y,z\} \in \text{reg}} (1 + z)$$

$$\begin{cases} \frac{1}{12} \pi R^3 (8 + 3R) & R > 0 \\ 0 & \text{True} \end{cases}$$

Наконец, совсем просто *Mathematica* 10 находит центр тяжести полушара из примера 6:

```
RegionCentroid[reg]
```

```
ConditionalExpression[{0, 0, \frac{3R}{8}}, R > 0]
```

## Литература

- [1] Бугров Я.С., Никольский С.М. *Высшая математика. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного*. — М.: Наука, 1985, — с. 171-174.
- [2] Письменный Д.Т. *Конспект лекций по высшей математике*. — М.: Рольф, 2000. Ч. 2. — с. 67-76.