

Интерполяция функций

Волченко Ю.М.

Содержание лекции

Понятие интерполяции функции. Интерполяционные многочлены Лагранжа и Ньютона для неравноотстоящих узлов. Интерполяция в таблице. Многочлен Ньютона для равноотстоящих узлов. Аппроксимация сигнала. Оценка погрешности и расстановка узлов интерполяции.

Анимация интерполяции сигнала.

Анимация работает только в программе Acrobat Reader!

Интерполяция функций в системе *Mathematica* и ее применение.

20 февраля 2013 г.

Самым распространенным применением интерполяции является получение значений таблично заданной функции для тех значений ее аргумента, которых в таблице как раз и нет.

Возьмем, например, таблицу

x	$f(x)$
0,2	0,3833
0,5	0,3107
0,7	0,2444
1	0,1468

значений функции

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2},$$

в которой, как вы видите, отсутствует значение $x = 0,3$. Вот для него и требуется приближенно найти значение функции.

В общем случае **задача интерполяции функции** ставится так: по известным значениям функции $y_0 = f(x_0), y_1 = f(x_1), \dots, y_n = f(x_n)$ в точках x_0, x_1, \dots, x_n , называемых **узлами интерполяции**, найти ее значение в точке $x, x_0 < x < x_n$, не совпадающей ни с одним узлом интерполяции.

К интерполяции прибегают не только в случае таблично заданных функций, но и тогда, когда функция задана аналитически, но описывающая ее формула громоздка и требует для своего применения трудоемких вычислений. Кроме этого, интерполяцию применяют, по крайней мере, еще в двух случаях: если пары (x_i, y_i) , $i = \overline{0, n}$, определены экспериментально и аналитическое выражение функциональной зависимости не известно; а также для получения формулы, приближенно представляющей графически заданную функцию.

1 Неравноотстоящие узлы

Можно заметить, что в приведенной выше таблице соседние узлы интерполяции находятся на разных расстояниях друг от друга. Такие узлы называются *неравноотстоящими*.

1.1 Многочлен Лагранжа

Для решения задачи интерполяции функцию $y = f(x)$ заменяют многочленом $L_n(x)$ степени не выше n , который используют для приближенного вычисления значений функции. Многочлен полностью определяется требованием, чтобы его значения и значения $f(x)$ совпадали в узлах интерполяции:

$$f(x_0) = L_n(x_0), f(x_1) = L_n(x_1), \dots, f(x_n) = L_n(x_n). \quad (1)$$

Будем искать многочлен в виде

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^n c_k \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^n (x - x_j), \quad (2)$$

где символ \prod называется знаком произведения, а выражение $\prod_{j=0}^n a_j$ представляет собой сокращенную запись произведения $a_0 \cdot \dots \cdot a_n$. Например,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^2 c_k \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^2 (x - x_j) &= \\ &= c_0(x - x_1)(x - x_2) + c_1(x - x_0)(x - x_2) + c_2(x - x_0)(x - x_1). \end{aligned}$$

Для решения задачи интерполяции необходимо определить коэффициенты c_0, c_1, \dots, c_n многочлена (2).

Положим в формуле (2) $x = x_i$ и используем условия (1). Получим

$$y_i = f(x_i) = L_n(x_i) = c_i \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n (x_i - x_j),$$

следовательно,

$$c_i = y_i / \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n (x_i - x_j).$$

Таким образом, искомый многочлен имеет вид

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^n y_k \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^n \frac{x - x_j}{x_k - x_j}. \quad (3)$$

Он называется **интерполяционным многочленом Лагранжа для неравноотстоящих узлов**. Это – единственный многочлен, решающий задачу интерполяции¹⁾.

Интерполяция функции при $n = 1$ называется **линейной**. Интерполяционный многочлен Лагранжа в этом случае принимает наиболее простой вид:

$$y = L_1(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} y_0 + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} y_1. \quad (4)$$

Геометрически задача линейной интерполяции заключается в проведении прямой линии, имеющей уравнение (4), через точки (x_0, y_0) , (x_1, y_1) и использовании ординат этой прямой вместо ординат кривой $y = f(x)$, $x \in (x_0, x_1)$, рис. 1, а).

При $n = 2$ интерполяция называется **параболической**, так как интерполяционный многочлен Лагранжа

$$y = L_2(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} y_0 + \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} y_1 + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} y_2 \quad (5)$$

является параболой, проходящей через точки (x_0, y_0) , (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , рис. 1, б).

Пример 1. С помощью линейной и параболической интерполяции решить задачу, поставленную в начале лекции.

Решение. Линейная интерполяция. Выберем узлами интерполяции $x_0 = 0,2$, $x_1 = 0,5$, тогда $y_0 = 0,3833$, $y_1 = 0,3107$ и по формуле (4) получим, что

$$L_1(x) = \frac{x - 0,5}{-0,3} 0,3833 + \frac{x - 0,2}{0,3} 0,3107 = -1,27767(x - 0,5) + 1,03567(x - 0,2).$$

Следовательно,

$$f(0,3) \approx L_1(0,3) = -1,27767(-0,2) + 1,03567 \cdot 0,1 \approx 0,3591.$$

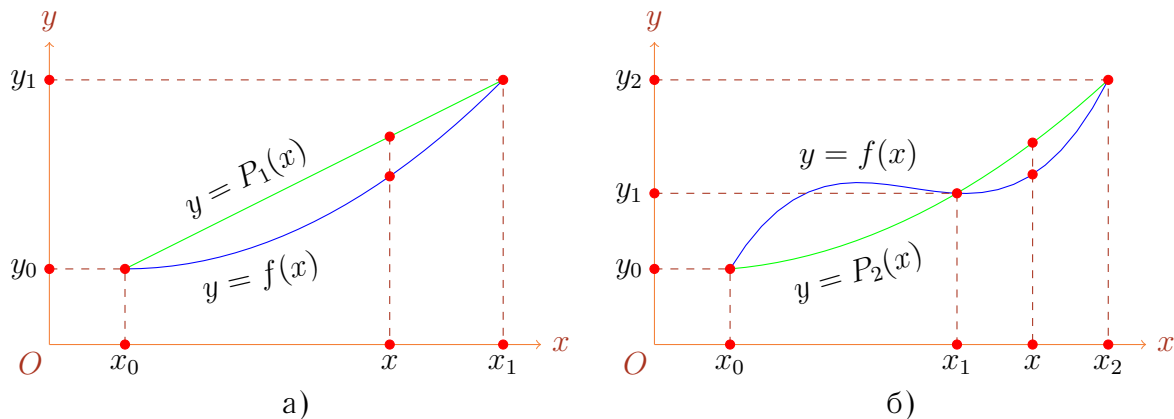


Рис. 1. Интерполяция: а) линейная, б) параболическая.

Более точное значение даст приближенное вычисление $f(0,3)$ на микрокалькуляторе: $f(0,3) \approx 0,364605791$. Таким образом, относительная погрешность линейной интерполяции приближенно равна

$$\delta_{\text{лин}} = \frac{|0,3591 - 0,364605791|}{0,364605791} 100\% \approx 1,51\%.$$

Параболическая интерполяция. Возьмем узлами интерполяции $x_0 = 0,2$, $x_1 = 0,5$, $x_2 = 0,7$, тогда $y_0 = 0,3833$, $y_1 = 0,3107$, $y_2 = 0,2444$, и по формуле (5) будем иметь

$$L_2(x) = \frac{(x-0,5)(x-0,7)}{(-0,3)(-0,5)} 0,3833 + \frac{(x-0,2)(x-0,7)}{0,3(-0,2)} 0,3107 + \frac{(x-0,2)(x-0,5)}{0,5 \cdot 0,2} 0,2444.$$

Находим приближенное значение функции:

$$f(0,3) \approx L_2(0,3) = \frac{(-0,2)(-0,4)}{0,15} 0,3833 + \frac{0,1(-0,4)}{-0,06} 0,3107 + \frac{0,1(-0,2)}{0,1} 0,2444 = 0,36268 \approx 0,3627.$$

Погрешность параболической интерполяции:

$$\delta_{\text{кв}} = \frac{|0,3627 - 0,364605791|}{0,364605791} 100\% \approx 0,52\%.$$

Как видим, погрешность улучшилась по сравнению с линейной интерполяцией. \square

Интерполяция по Лагранжу имеет ряд недостатков. Во-первых, при $n \geq 2$ требуется довольно много вычислений; во-вторых, если известен многочлен Лагранжа $L_n(x)$, и требуется получить многочлен Лагранжа $L_{n+1}(x)$, добавив к имеющимся узлам интерполяции узел x_{n+1} , все вычисления придется проводить заново. От этих неудобств избавляет интерполяционный многочлен Ньютона. Если не требуется найти многочлен Лагранжа, а лишь его значения для некоторых x , удобно воспользоваться интерполяционной схемой Эйткена²⁾.

1.2 Многочлен Ньютона

Интерполяционный многочлен Ньютона для неравноотстоящих узлов представляет собой многочлен Лагранжа, записанный специальным образом:

$$L_n(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^n f(x_0, \dots, x_k)(x - x_0) \dots (x - x_{k-1}), \quad (6)$$

где

$$f(x_0, x_1) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}, \dots, f(x_{n-1}, x_n) = \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}} \quad (7)$$

– *разделенные разности 1-го порядка*, а *разделенные разности k-го порядка* $f(x_i, \dots, x_{i+k})$ определяются через разделенные разности $(k-1)$ -го порядка:

$$f(x_i, \dots, x_{i+k}) = \frac{f(x_{i+1}, \dots, x_{i+k}) - f(x_i, \dots, x_{i+k-1})}{x_{i+k} - x_i}, \quad (8)$$

$i = \overline{0, n-1}$, $k = \overline{1, n-i}$. Мы видим, что при переходе от многочлена $P_n(x)$ к многочлену $P_{n+1}(x)$ и добавлении еще одного узла x_{n+1} к уже имеющимся, формула (6) удлиняется только на одно слагаемое, так что не приходится все расчеты выполнять с самого начала.

Доказательство этой формулы приведено в Приложении³⁾. Для удобства вычисление разделенных разностей проводят с помощью специальной таблицы. Для $n = 4$ она имеет вид

x_0	$f(x_0)$			
		$f(x_0, x_1)$		
x_1	$f(x_1)$		$f(x_0, x_1, x_2)$	
		$f(x_1, x_2)$		$f(x_0, x_1, x_2, x_3)$
x_2	$f(x_2)$		$f(x_1, x_2, x_3)$	$f(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4)$
		$f(x_2, x_3)$		$f(x_1, x_2, x_3, x_4)$
x_3	$f(x_3)$		$f(x_2, x_3, x_4)$	
		$f(x_3, x_4)$		
x_4	$f(x_4)$			

Числа, непосредственно входящие в формулу многочлена $L_4(x)$, помечены синим цветом.

Пример 2. Используя разделенные разности, решить пример 1, добавив получение интерполяционного многочлена третьей степени.

Решение. Составим таблицу разделенных разностей:

0,2	0,3833			
		-0,24200		
0,5	0,3107		-0,17900	
		-0,33150		0,23918
0,7	0,2444		0,01234	
		-0,32533		
1	0,1468			

С помощью чисел, помеченных синим цветом, и формулы (6) составляем интерполяционный многочлен Ньютона третьей степени:

$$L_3(x) = 0,3833 - 0,242(x - 0,2) - 0,179(x - 0,2)(x - 0,5) + 0,23918(x - 0,2)(x - 0,5)(x - 0,7).$$

Погрешность вычисления $f(0,3) \approx L_3(0,3)$, естественно, будет такой же, как и в формуле (П2).

Если отбросить последнее слагаемое, получим многочлен параболической интерполяции, а, если оставить только два первых слагаемых, получим многочлен линейной интерполяции.

2 Равноотстоящие узлы

Пусть теперь соседние узлы интерполяции находятся на одинаковом расстоянии друг от друга: $x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = \dots = x_n - x_{n-1} = h$, где h — **шаг интерполяции**. Такие узлы называются **равноотстоящими**.

Мы уже видели, что для неравноотстоящих узлов многочлен Ньютона более удобен, чем многочлен Лагранжа; то же самое относится и к случаю равноотстоящих узлов. Поэтому для них мы рассмотрим только интерполяционный многочлен Ньютона.

Введем так называемые конечные разности:

$$\Delta y_0 = y_1 - y_0, \quad \Delta y_1 = y_2 - y_1, \quad \dots, \quad \Delta y_{n-1} = y_n - y_{n-1}$$

— **конечные разности первого порядка**;

$$\Delta^k y_i = \Delta^{k-1} y_{i+1} - \Delta^{k-1} y_i, \quad k = \overline{2, n}, \quad i = \overline{0, n-k},$$

— **конечные разности k -го порядка**, определяемые с помощью конечных разностей $(k-1)$ -го порядка.

Теорема 1. В случае равноотстоящих узлов конечные разности следующим образом связаны с разделенными разностями:

$$f(x_i, \dots, x_{i+k}) = \frac{\Delta^k y_i}{k! h^k}. \quad (9)$$

Доказательство приведено в Приложении⁴).

На основании доказанной теоремы, заменяя в равенстве (6) разделенные разности конечными, получаем **интерполяционный многочлен Ньютона для равноотстоящих узлов**:

$$L_n(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^n \frac{\Delta^k y_0}{k! h^k} (x - x_0) \dots (x - x_{k-1}). \quad (10)$$

Так как

$$L_n(x) = L_{n-1}(x) + \frac{\Delta^n y_0}{n! h^n} (x - x_0) \dots (x - x_{n-1}),$$

то интерполяционный многочлен n -й степени получается из интерполяционного многочлена $(n - 1)$ -й степени добавлением еще одного слагаемого.

Для вычисления конечных разностей используют следующую таблицу (представлен случай $n = 4$):

x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$
x_0	y_0				
		Δy_0			
x_1	y_1		$\Delta^2 y_0$		
		Δy_1		$\Delta^3 y_0$	
x_2	y_2		$\Delta^2 y_1$		$\Delta^4 y_0$
		Δy_2		$\Delta^3 y_1$	
x_3	y_3		$\Delta^2 y_2$		
		Δy_3			
x_4	y_4				

Пример 3. На приборе получено графическое изображение импульса, показанное на рис. 2. Найти подходящее аналитическое описание такого импульса в виде интерполяционного многочлена для последующего использования в расчетах на компьютере. Показания прибора можно снимать с точностью до 0,001.

Решение. Возьмем шаг интерполяции $h = 1/6 \approx 0,167$, а значения функции для узлов интерполяции снимем с ее графика. Построим таблицу конечных разностей (табл. 1).

По формуле (10) получаем интерполяционный многочлен Ньютона 6-й степени:

$$\begin{aligned} L_6(x) = & 5,76(x - 1) - 16,56(x - 1)(x - 1.167) + 31,68(x - 1)(x - 1.167)(x - 1.333) - \\ & - 45,36(x - 1)(x - 1.167)(x - 1.333)(x - 1.5) + \\ & + 49,248(x - 1)(x - 1.167)(x - 1.333)(x - 1.5)(x - 1.667) - \\ & - 98,496(x - 1)(x - 1.167)(x - 1.333)(x - 1.5)(x - 1.667)(x - 1.833). \end{aligned}$$

Рис. 2. Интерполяция сигнала. Равноотстоящие узлы.

x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$	$\Delta^5 y_i$	$\Delta^6 y_i$
1	0						
		0,96					
1,167	0,96		-0,92				
		0,04		0,88			
1,333	1		-0,04		-0,84		
		0		0,04		0,76	
1,5	1		0		-0,08		-1,52
		0		-0,04		-0,76	
1,667	1		-0,04		-0,84		
		-0,04		-0,88			
1,833	0,96		-0,92				
		-0,96					
2	0						

Таблица 1.

Щелкая мышкой на анимационном рис. 2, можно убедиться в том, что визуально этот многочлен наилучшим образом приближает заданный сигнал по сравнению с интерполяционными многочленами меньших степеней.

3 Оценка погрешности и выбор узлов интерполяции

Следующая формула представляет собой оценку погрешности интерполяции в общем случае:

$$|f(x) - L_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |(x - x_0) \cdot \dots \cdot (x - x_n)|, \quad (11)$$

где $M_{n+1} = \max_{[a;b]} |f^{(n+1)}(x)|$, а производная $f^{(n+1)}(x)$ непрерывна на отрезке

$[x_0; x_n]$. Вывод этой формулы и ее применение к оценке линейной интерполяции в примере 1 приведен в Приложении⁵⁾.

Если аналитическое выражение для заданной функции неизвестно, то используют другие способы приближенного оценивания погрешности, например, с привлечением системы *Mathematica*⁶⁾.

Изучив две возможности интерполяции, с равно- и неравноотстоящими узлами, мы ничего не узнали о том, в каких случаях применять ту или иную из них. Следующий анимационный рис. 3 показывает, что изменение расположения даже одного узла существенно влияет на качество интерполяции. Конечно, применение равноотстоящих узлов удобнее, но погрешность при этом может быть больше. Нельзя ли найти оптимальное расположение узлов, позволяющее уменьшить погрешность интерполяции, а то и сократить число ее узлов? Это обсуждается в Приложении⁷⁾.

Рис. 3. Качество интерполяции в зависимости от расположения узлов.

Далее возникает вопрос: если значения функции в точках x_0, x_1, \dots, x_n известны абсолютно точно, будет ли уменьшаться погрешность интерполяции при увеличении числа узлов n ? В общем случае это можно утверждать лишь о функциях, которые дифференцируемы бесконечное число раз на отрезке $[a; b]$, содержащем все узлы интерполяции, при условии, что все производные ограничены одной и той же константой M . Тогда из формулы (11) получаем, что

$$|f(x) - L_n(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!} (b-a)^{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

(такой предел был вычислен на одной из предыдущих лекций[†]). С тем, что бы-

[†]Лекция «Формула Тейлора», Приложение, равенство (ПЗ).

вает при неограниченном росте производных, можно познакомиться в Приложении⁸⁾.

Если для каждой функции специальным образом выбирать узлы интерполяции, погрешность в формуле (11) можно устремить к нулю (теорема Марцинкевича), но нет общей схемы выбора узлов, которая в этом смысле годилась бы для всех функций одновременно (теорема Фабера)[†].

В заключение отметим, что интерполяция применяется не только в вычислительных задачах, но и непосредственно в технических устройствах в виде интерполяторов, встроенных в системы программного управления металлорежущими станками, газорезательными аппаратами, электронно-лучевой обработкой материалов, в устройствах отображения информации, моделирующих установках и даже при создании мультипликационных фильмов.

[†]Фихтенгольц Г.М. *Курс дифференциального и интегрального исчисления.*— М.: Наука, 1966, т. 1, с. 265.

Приложение

1) Если предположить, что существует еще один многочлен $Q_n(x)$ степени не выше n , удовлетворяющий условиям (1) и такой, что $L_n(x) \not\equiv Q_n(x)$, то многочлен $L_n(x) - Q_n(x)$ (тоже степени не выше n) имеет $n + 1$ различных корней: x_0, \dots, x_n . Но многочлен степени не выше n не может иметь $n + 1$ корней, следовательно, $Q_n(x) \equiv L_n(x)$.

2) Интерполяционная схема Эйткена.

Перепишем и обозначим правую часть формулы (4) линейной интерполяции в виде

$$L_{01}(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} y_0 + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} y_1 = \frac{y_0(x_1 - x) - y_1(x_0 - x)}{x_1 - x_0} = \frac{\begin{vmatrix} y_0 & x_0 - x \\ y_1 & x_1 - x \end{vmatrix}}{x_1 - x_0}.$$

Рассмотрим аналогичные выражения

$$L_{i-1,i}(x) = \frac{\begin{vmatrix} y_{i-1} & x_{i-1} - x \\ y_i & x_i - x \end{vmatrix}}{x_i - x_{i-1}}, \quad i = \overline{2, n},$$

также обладающие свойствами $L_{i-1,i}(x_{i-1}) = y_{i-1}$, $L_{i-1,i}(x_i) = y_i$, $i = \overline{1, n}$.

Следующие выражения будем строить по правилу:

$$L_{i-k, \dots, i-1, i}(x) = \frac{\begin{vmatrix} L_{i-k, \dots, i-1}(x) & x_{i-k} - x \\ L_{i-k+1, \dots, i}(x) & x_i - x \end{vmatrix}}{x_i - x_{i-k}}, \quad i = \overline{2, n}, \quad k = \overline{2, i}, \quad (\text{П1})$$

Нетрудно видеть, что для $k = 2$

$$L_{i-2, i-1, i}(x_{i-2}) = y_{i-2}, \quad L_{i-2, i-1, i}(x_{i-1}) = y_{i-1}, \quad L_{i-2, i-1, i}(x_i) = y_i, \quad i = \overline{2, n}.$$

Предположим, что для всех m , таких, что $2 \leq m < i$, $i = \overline{2, n}$ выполняются равенства

$$L_{i-m, \dots, i}(x_{i-m}) = y_{i-m}, \dots, \quad L_{i-m, \dots, i}(x_{i-1}) = y_{i-1}, \quad L_{i-m, \dots, i}(x_i) = y_i,$$

$i = \overline{2, n}$. На основании этого предположения для $k = m + 1$ получим, что

$$\begin{aligned} L_{i-m-1, \dots, i}(x_{i-m-1}) &= \frac{\begin{vmatrix} L_{i-m-1, \dots, i-1}(x_{i-m-1}) & x_{i-m-1} - x_{i-m-1} \\ L_{i-m, \dots, i}(x_{i-m-1}) & x_i - x_{i-m-1} \end{vmatrix}}{x_i - x_{i-m-1}} = \\ &= \frac{\begin{vmatrix} y_{i-m-1} & 0 \\ L_{i-m, \dots, i}(x_{i-m-1}) & x_i - x_{i-m-1} \end{vmatrix}}{x_i - x_{i-m-1}} = y_{i-m-1}, \\ L_{i-m-1, \dots, i}(x_i) &= \frac{\begin{vmatrix} L_{i-m-1, \dots, i-1}(x_i) & x_{i-m-1} - x_i \\ y_i & 0 \end{vmatrix}}{x_i - x_{i-m-1}} = y_i. \end{aligned}$$

Для x_s , $i - m - 1 < s < i$, находим, что

$$L_{i-m-1, \dots, i}(x_s) = \frac{\begin{vmatrix} L_{i-m-1, \dots, i-1}(x_s) & x_{i-m-1} - x_s \\ L_{i-m, \dots, i}(x_s) & x_i - x_s \end{vmatrix}}{x_i - x_{i-m-1}} =$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} y_s & x_{i-m-1} - x_s \\ y_s & x_i - x_s \end{vmatrix}}{x_i - x_{i-m-1}} = y_s(x_i - \cancel{x_s} - x_{i-m-1} + \cancel{x_s}) / (x_i - x_{i-m-1}) = y_s.$$

Таким образом, методом математической индукции доказано, что для всех $s = \overline{i - k, i}$ выполняется

$$L_{i-k, \dots, i}(x_s) = y_s, \quad i = \overline{2, n}, \quad k = \overline{2, i}.$$

Это означает, что, например $L_{012}(x) \equiv L_2(x)$, т. е. является многочленом параболической интерполяции, так как $L_{012}(x_0) = y_0, L_{012}(x_1) = y_1, L_{012}(x_2) = y_2$. И вообще, $L_{01, \dots, n} \equiv L_n(x)$ — многочлен Лагранжа n -й степени.

Поместив рассмотренные многочлены в специальную таблицу, получим удобную схему для вычисления значений многочленов Лагранжа в заданной точке x . Таблица при $n = 4$ будет такой:

x_i	y_i	$x_i - x$	$L_{i-1, i}$	$L_{i-2, i-1, i}$	$L_{i-3, i-2, i-1, i}$	$L_{i-4, i-3, i-2, i-1, i}$
x_0	y_0	$x_0 - x$				
x_1	y_1	$x_1 - x$	$L_{01}(x)$			
x_2	y_2	$x_2 - x$	$L_{12}(x)$	$L_{012}(x)$		
x_3	y_3	$x_3 - x$	$L_{23}(x)$	$L_{123}(x)$	$L_{0123}(x)$	
x_4	y_4	$x_4 - x$	$L_{34}(x)$	$L_{234}(x)$	$L_{1234}(x)$	$L_{01234}(x)$

Чтобы вычислить значения величин, расположенных в какой-либо строке таблицы, надо использовать числа из этой строки и вышележащих строк. Так, чтобы получить значение $L_{0123}(x)$ (выделено в таблице красным цветом), надо в соответствии с формулой (П1) использовать числа, выделенные синим цветом. Это означает, что при добавлении еще одного узла интерполяции к уже имеющимся, не надо пересчитывать всю таблицу, достаточно внизу приписать еще одну строку и выполнить расчет только для нее.

Для задачи, поставленной в начале лекции, получим таким образом значение многочлена $L_3(x) \equiv L_{0123}(x)$ для $x = 0,3$:

x_i	y_i	$x_i - x$	$L_{i-1, i}$	$L_{i-2, i-1, i}$	$L_{i-3, i-2, i-1, i}$
0,2	0,3833	-0,1			
0,5	0,3107	0,2	0,3591		
0,7	0,2444	0,4	0,3770	0,36268	
1	0,1468	0,7	0,37453	0,37799	0,36459

В таблице это значение помечено красным цветом. Заметим, что попутно мы вычислили значения (синего цвета), которые нам дают линейная и параболическая интерполяции и найденные нами раньше. Относительная погрешность по сравнению с линейной и параболической интерполяциями уменьшилась:

$$\delta_{\text{куб}} = \frac{|0,36459 - 0,364605791|}{0,364605791} 100\% \approx 0,004\%. \tag{П2}$$

3) Вначале докажем лемму.

Лемма П1. Для разделенных разностей справедливо равенство

$$f(x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k}) = \sum_{j=i}^{i+k} \frac{f(x_j)}{\prod_{\substack{s=i \\ s \neq j}}^{i+k} (x_j - x_s)}. \quad (\text{П3})$$

Доказательство. Применим метод математической индукции по числу аргументов разделенной разности. Для двух аргументов формула выполняется:

$$f(x_i, x_{i+1}) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} = \frac{f(x_i)}{x_i - x_{i+1}} + \frac{f(x_{i+1})}{x_{i+1} - x_i}.$$

Предположим, что она справедлива для $(k+1)$ -го аргумента и выведем из этого ее справедливость для $(k+2)$ -х аргументов. Т.е. покажем, что формула (П3) выполняется и при увеличении k на единицу.

По определению разделенной разности и предположению индукции

$$\begin{aligned} f(x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k}, x_{i+k+1}) &= \frac{f(x_{i+1}, \dots, x_{i+k+1}) - f(x_i, \dots, x_{i+k})}{x_{i+k+1} - x_i} = \\ &= \frac{1}{x_{i+k+1} - x_i} \left[\sum_{j=i+1}^{i+k+1} \frac{f(x_j)}{\prod_{\substack{s=i+1 \\ s \neq j}}^{i+k+1} (x_j - x_s)} - \sum_{j=i}^{i+k} \frac{f(x_j)}{\prod_{\substack{s=i \\ s \neq j}}^{i+k} (x_j - x_s)} \right]. \end{aligned}$$

Найдем коэффициент при $f(x_j)$ для различных j . Так как $f(x_i)$ входит лишь в одну сумму, то для $j = i$ коэффициент равен

$$\frac{-1}{(x_{i+k+1} - x_i) \prod_{\substack{s=i \\ s \neq i}}^{i+k} (x_i - x_s)} = \frac{1}{\prod_{\substack{s=i \\ s \neq i}}^{i+k+1} (x_i - x_s)}.$$

Для $j = i+k+1$ получаем выражение:

$$\frac{1}{(x_{i+k+1} - x_i) \prod_{\substack{s=i+1 \\ s \neq i+k+1}}^{i+k+1} (x_{i+k+1} - x_s)} = \frac{1}{\prod_{\substack{s=i \\ s \neq i+k+1}}^{i+k+1} (x_{i+k+1} - x_s)}.$$

Наконец, при $j \neq i, j \neq i+k+1$ имеем

$$\frac{1}{x_{i+k+1} - x_i} \left[\frac{1}{\prod_{\substack{s=i+1 \\ s \neq j}}^{i+k+1} (x_j - x_s)} - \frac{1}{\prod_{\substack{s=i \\ s \neq j}}^{i+k} (x_j - x_s)} \right] = \frac{(x_j - x_i) - (x_j - x_{i+k+1})}{(x_{i+k+1} - x_i) \prod_{\substack{s=i \\ s \neq j}}^{i+k+1} (x_j - x_s)} = \frac{1}{\prod_{\substack{s=i \\ s \neq j}}^{i+k+1} (x_j - x_s)}.$$

Для всех случаев получили выражения, совпадающие с коэффициентом при $f(x_j)$ в формуле (П3), если увеличить k на единицу. Доказательство завершено.

Следствие П1. Разделенная разность есть симметрическая функция своих аргументов, то есть не изменяется при любой их перестановке.

Используя формулу (3), запишем разность между функцией и ее многочленом Лагранжа:

$$f(x) - L_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^n f(x_k) \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^n \frac{x - x_j}{x_k - x_j}.$$

Разделим и умножим правую часть формулы на одно и то же произведение $\prod_{k=0}^n (x - x_k)$:

$$f(x) - L_n(x) = \prod_{k=0}^n (x - x_k) \left[\frac{f(x)}{\prod_{k=0}^n (x - x_k)} + \sum_{k=0}^n \frac{f(x_k)}{(x_k - x) \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^n (x_k - x_j)} \right].$$

Как следует из равенства (П3), выражение в квадратных скобках – это разделенная разность $f(x, x_0, \dots, x_n)$, т. е.

$$f(x) - L_n(x) = f(x, x_0, \dots, x_n) \prod_{k=0}^n (x - x_k). \quad (\text{П4})$$

Представим многочлен Лагранжа следующим образом:

$$L_n(x) = L_0(x) + [L_1(x) - L_0(x)] + \dots + [L_n(x) - L_{n-1}(x)], \quad (\text{П5})$$

где $L_0(x) \equiv f(x_0)$. Разность многочленов $L_m(x) - L_{m-1}(x)$ представляет собой многочлен m -й степени с корнями x_0, \dots, x_{m-1} , поэтому его можно разложить на множители:

$$L_m(x) - L_{m-1}(x) = A_{m-1} \prod_{j=0}^{m-1} (x - x_j), \quad (\text{П6})$$

где A_{m-1} – неизвестный коэффициент. Кроме того,

$$f(x_m) - L_{m-1}(x_m) = L_m(x_m) - L_{m-1}(x_m) = A_{m-1} \prod_{j=0}^{m-1} (x_m - x_j). \quad (\text{П7})$$

Сравнивая полученную формулу с равенством (П4) и учитывая следствие П1, приходим к выводу, что

$$f(x_m) - L_{m-1}(x_m) = f(x_0, \dots, x_{m-1}, x_m) \prod_{k=0}^{m-1} (x_m - x_k);$$

сравнивая с (П7) находим, что

$$A_{m-1} = f(x_0, \dots, x_m).$$

Подставляя это выражение вместо A_{m-1} в формулу (П6), получаем

$$L_m(x) - L_{m-1}(x) = f(x_0, \dots, x_m) \prod_{j=0}^{m-1} (x - x_j).$$

Заменяя по этой формуле в равенстве (П5) каждое выражение в квадратных скобках, приходим к равенству

$$L_n(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^n f(x_0, \dots, x_k) \prod_{j=0}^{k-1} (x - x_j),$$

которое и является формулой (6).

4) При $k = 1$, как следует из определения (7), формула (9) верна:

$$f(x_i, x_{i+1}) = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} = \frac{\Delta y_i}{h}.$$

Предположим, что она верна при некотором $1 \leq k < n$ и докажем ее справедливость при $k + 1$. Для этого преобразуем разделенную разность $(k + 1)$ -го порядка на основании предположения индукции:

$$\begin{aligned} f(x_i, \dots, x_{i+k+1}) &= \frac{f(x_{i+1}, \dots, x_{i+k+1}) - f(x_i, \dots, x_{i+k})}{x_{i+k+1} - x_i} = \\ &= \frac{1}{(k+1)h} \left(\frac{\Delta^k y_{i+1}}{k!h^k} - \frac{\Delta^k y_i}{k!h^k} \right) = \frac{\Delta^{k+1} y_i}{(k+1)!h^{k+1}}. \end{aligned}$$

Получили формулу (9) при k , увеличенном на 1.

5) Пусть узлы интерполяции расположены в порядке возрастания: $x_0 < x_1 < \dots < x_n$; докажем, что для функции $f(x)$, имеющей конечную производную $(n + 1)$ -го порядка, выполняется равенство

$$f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x - x_0) \dots (x - x_n), \quad (\text{П8})$$

где $c \in [x_0, x_n]$.

Действительно, положим

$$f(x) - L_n(x) = K(x)(x - x_0) \dots (x - x_n), \quad (\text{П9})$$

где $K(x)$ - некоторая функция. Обозначим

$$\varphi(z) = f(z) - L_n(z) - K(x)(z - x_0) \dots (z - x_n).$$

Ясно, что $\varphi(x) = \varphi(x_0) = \dots = \varphi(x_n) = 0$, и поэтому по теореме Ролля в $n + 1$ промежутке между $n + 2$ корнями функции $\varphi(z)$ найдется $n + 1$ корней $c_0 < \dots < c_n$ ее производной: $\varphi'(c_i) = 0$, $c_i \in [x_0, x_n]$. Теперь, применив теорему Ролля к отрезкам $[c_1, c_2], \dots, [c_{n-1}, c_n]$ и функции $\varphi'(z)$, получим, что существуют точки $d_1, \dots, d_n; d_j \in [c_{j-1}, c_j]$, в которых $\varphi''(d_j) = 0$. Продолжая и т.д., приходим к точке $c \in [x_0, x_n]$, в которой $\varphi^{(n+1)}(c) = 0$. Но

$$\varphi^{(n+1)}(z) = f^{(n+1)}(z) - K(x)(n+1)!, \quad (\text{П10})$$

так как $[(z - x_0) \dots (z - x_n)]^{(n+1)} = [z^{n+1} + a_1 z^n + \dots + a_{n+1}]^{(n+1)} = (n+1)!$. Поэтому, подставляя в (П10) $z = c$, получаем $K(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}$. Теперь формула (П8) следует из этого выражения и (П9). Из (П8) и получаем формулу (11).

Оценим точность линейной интерполяции из примера 1. Первые три производные функции

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2},$$

рассмотренной в этом примере, имеют вид

$$\begin{aligned} f'(x) &= -x \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-x^2}, \\ f''(x) &= (2x^2 - 1) \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-x^2}, \end{aligned}$$

$$f'''(x) = [4x - 2x(2x^2 - 1)]\sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{-x^2} = 2x(3 - 2x^2)\sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{-x^2}.$$

Чтобы найти экстремумы второй производной, приравняем нулю третью производную и получим стационарные точки второй производной: $x_1 = -\sqrt{3/2}$, $x_2 = 0$, $x_3 = \sqrt{3/2}$. Ни одна из этих точек не попадает на отрезок $[0,2; 0,5]$, использованный для линейной интерполяции, поэтому наибольшее и наименьшее свои значения вторая производная может принять только на его концах. Вычислим значения $f''(x)$ на концах отрезка: $f''(0,2) = -0,7053$, $f''(0,5) = -0,3107$. Таким образом, в формуле (11) при $n = 1$ имеем $M_2 \approx 0,7053$.

Следовательно, в силу (11) погрешность линейной интерполяции рассматриваемой функции будет такой:

$$|f(x) - L_1(x)| \leq \frac{0,7053}{2!}(0,2 - 0,3)(0,5 - 0,3) \approx 0,0071.$$

В примере абсолютная погрешность составляла $|0,3591 - 0,364605791| \approx 0,0055$, что, как и следовало ожидать, немного меньше общей оценки абсолютной погрешности.

6) *Mathematica* для интерполяции многочленами имеет в своем распоряжении оператор `InterpolatingPolynomial[{{x1, f1}, {x2, f2}, ...], x]`, где x_i - узлы интерполяции, f_i - соответствующие им значения интерполируемой функции, x - аргумент этой функции. Результатом работы оператора является интерполяционный многочлен.

Проинтерполируем функцию $y = \cos x$ на отрезке $[-\pi; \pi]$, задав следующий список пар «аргумент-функция» для работы оператора:

```
data = {{-π, -1}, {-π/2, 0}, {0, 1}, {π/2, 0}, {π, -1}};
```

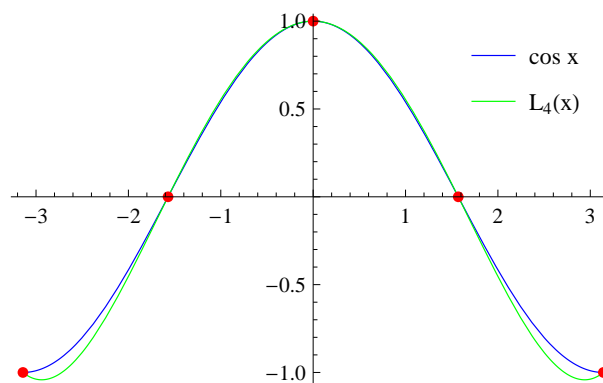
Применим оператор и получим интерполяционный многочлен `intCos`:

```
intCos = InterpolatingPolynomial[data, x]
```

$$1 - \frac{14x^2}{3\pi^2} + \frac{8x^4}{3\pi^4}$$

Построим графики косинуса, интерполяционного многочлена и точки из списка `data`:

```
Show[Plot[{Cos[x], intCos}, {x, -π, π}, PlotStyle -> {Blue, Green},
PlotLegends -> Placed[{"cos x", "L4(x)"}, {0.85, 0.82}],
ListPlot[data, PlotStyle -> {PointSize[Medium], Red}]]
```

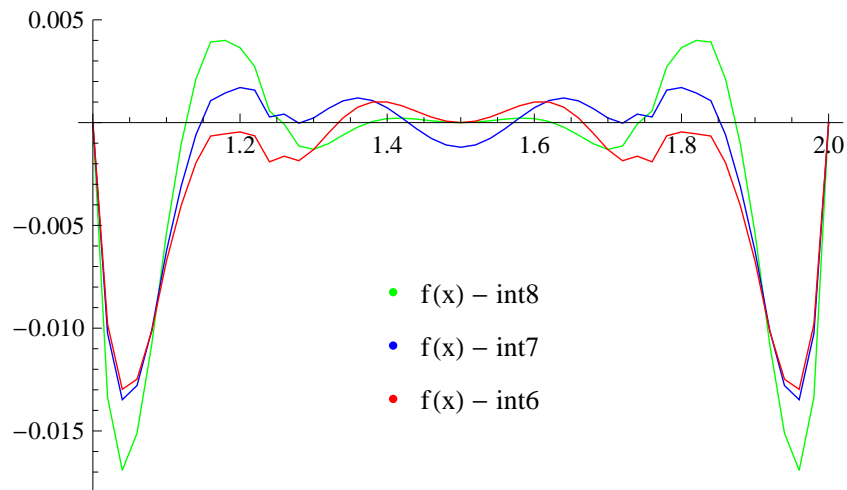


Здесь была подключена опция `PlotLegends`, которая снабжает графики функций надписями. В более ранних версиях системы *Mathematica* она имела название `PlotLegend` и требовала вызова пакета `PlotLegends`. Опцией был использован оператор `Placed`, указывающий


```
fL7 = Table[{1+(i-1)*0.02,func[[i]-int7 /. x → 1+(i-1)*0.02},{i,1,51}];
fL8 = Table[{1+(i-1)*0.02,func[[i]-int8 /. x → 1+(i-1)*0.02},{i,1,51}];
```

Построим графики этих разностей с помощью оператора `ListPlot`, для которого зададим опцию `Joined → True`, чтобы соседние точки графика соединялись отрезками прямых. Вот что у нас получится:

```
ListPlot[{fL8,fL7,fL6},PlotRange → {-0.018,0.005},PlotStyle →
{Green,Blue,Red},Joined → True,PlotLegends →
Placed[{"f(x) - int8","f(x) - int7","f(x) - int6"},{0.5,0.31}]]
```



Отличие графика от нуля, взятое по модулю, и есть погрешность интерполяции. Мы видим, что интерполяция многочленом 6-й степени не хуже интерполяции многочленом 7-й степени, а многочлен 8-й степени проигрывает им обоим. Так что есть смысл остановиться на интерполяции многочленом 6-й степени.

7) В общем случае задача ставится так: *найти такое расположение узлов интерполяции на числовой оси, чтобы погрешность интерполяции была наименьшей*. Не вдаваясь в подробности[†], скажем только, что эту задачу решает многочлен Чебышева, корни которого и являются искомыми оптимально расположенными узлами. Если интерполяция проводится на отрезке $[a, b]$, эти корни можно вычислить по формуле

$$x_i = \frac{1}{2} \left[(b + a) + (b - a) \cos \frac{2i + 1}{2n + 2} \pi \right], \quad i = \overline{0, n}. \quad (\text{П11})$$

Сравним точность интерполяции, полученной нами с помощью системы *Mathematica* для примера 3, где были использованы равноотстоящие узлы, с интерполяцией той же 6-й степени для узлов, определяемых формулой (П11). Для этого в системе *Mathematica* сначала зададим функцию, вычисляющую значения этих узлов:

```
xx[i_, n_, a_, b_] := 0.5((b-a)Cos[(2i+1)/(2n+2)π]+b+a);
```

Затем создадим список из пар «аргумент-функция», причем, значения функции снимем с ее графика:

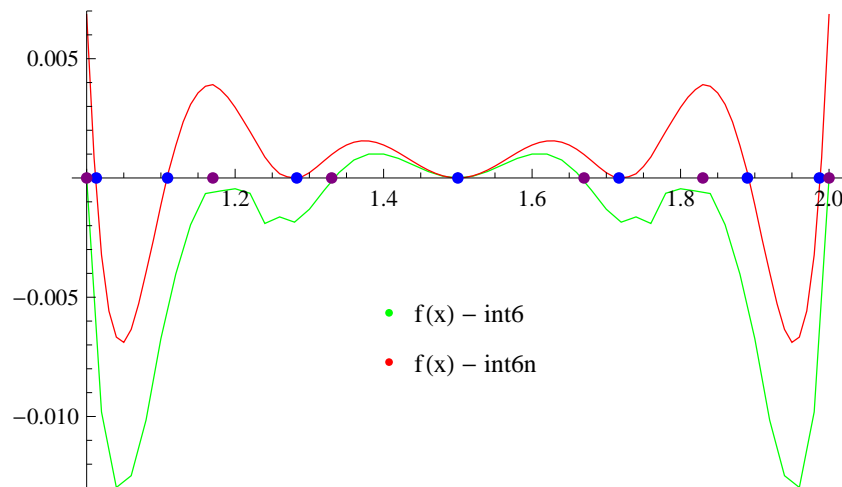
```
knots6n = {{1.987, 0.156}, {1.891, 0.834}, {1.717, 1}, {1.5, 1}, {1.283, 1},
{1.109, 0.834}, {1.013, 0.156}};
```

Найдем интерполяционный многочлен 6-й степени для чебышевских узлов интерполяции:

[†]Березин И.С., Жидков Н.П. *Методы вычислений*.— М.: Наука, 1966, т. I.— с. 59-60.

```
int6n = InterpolatingPolynomial[knots6n,x];
```

Методами, изложенными выше, построим отклонение от заданного сигнала многочлена `int6n` и многочлена `int6` для равноотстоящих узлов:



Мы видим, что чебышевские узлы, изображенные синими точками, дают меньший максимум абсолютной погрешности, чем равноотстоящие узлы, изображенные коричневыми точками.

8) Существует интересный феномен Рунге, который показывает, что при неподходящем выборе узлов невозможно добиться сколько-нибудь удовлетворительной точности интерполяции. Этот феномен связан с функцией

$$y = \frac{1}{\sqrt{1 + 25x^2}}, \quad (\text{П12})$$

и неподходящими для нее оказываются равноотстоящие узлы.

Чтобы воочию познакомиться с феноменом Рунге, используем систему *Mathematica*, в которой сначала определим упомянутую функцию и функцию, создающую список узлов, равноотстоящих на отрезке $[-1; 1]$:

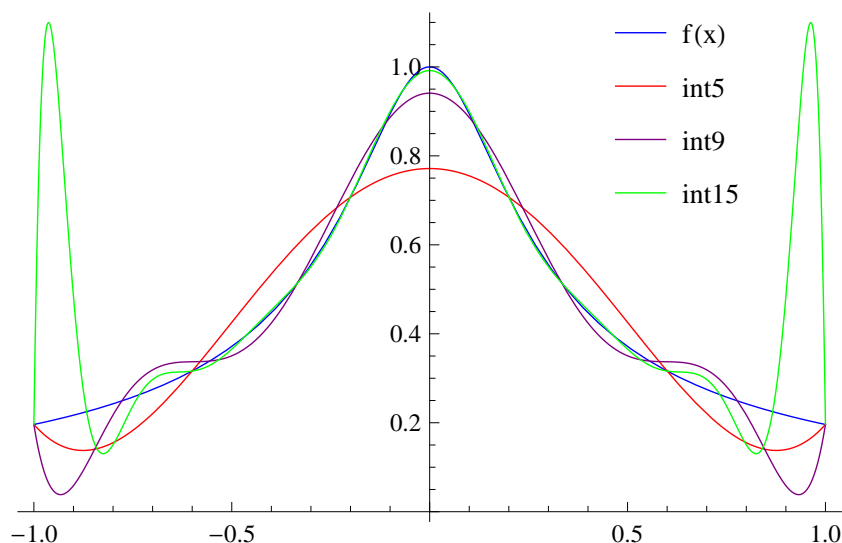
```
f[x_] := 1/Sqrt[1 + 25x^2];
xx[n_] := Table[-1. + 2i/n, {i, 0, n}]
```

Следующая функция подготовит нам список пар «аргумент-функция»:

```
xy[n_] := Table[{xx[n][[i]], f[xx[n][[i]]]/N}, {i, 1, n + 1}];
```

Теперь найдем интерполяционные многочлены для 5, 9, и 15 равноотстоящих узлов и построим графики функции $f(x)$ и указанных многочленов на одном рисунке:

```
int5 = InterpolatingPolynomial[xy[5], x];
int9 = InterpolatingPolynomial[xy[9], x];
int15 = InterpolatingPolynomial[xy[15], x];
Plot[{f[x], int5, int9, int15}, {x, -1, 1},
  PlotStyle -> {Blue, Red, Purple, Green},
  PlotLegends -> Placed[{"f(x)", "int5", "int9", "int15"}, {0.8, 0.8}]]
```



Мы видим, что с ростом степени интерполяционного многочлена точность интерполяции не улучшается, а ухудшается, становясь особенно плохой вблизи концов отрезка интерполяции. Можно показать, что и дальнейшее увеличение степени интерполяционного многочлена будет только усугублять ситуацию. Причина заключается в том, что производные функции (П12) с ростом n тоже растут, причем, очень быстро. Убедимся в этом, вычислив производные 5-го, 9-го и 15-го порядков этой функции на правом конце отрезка:

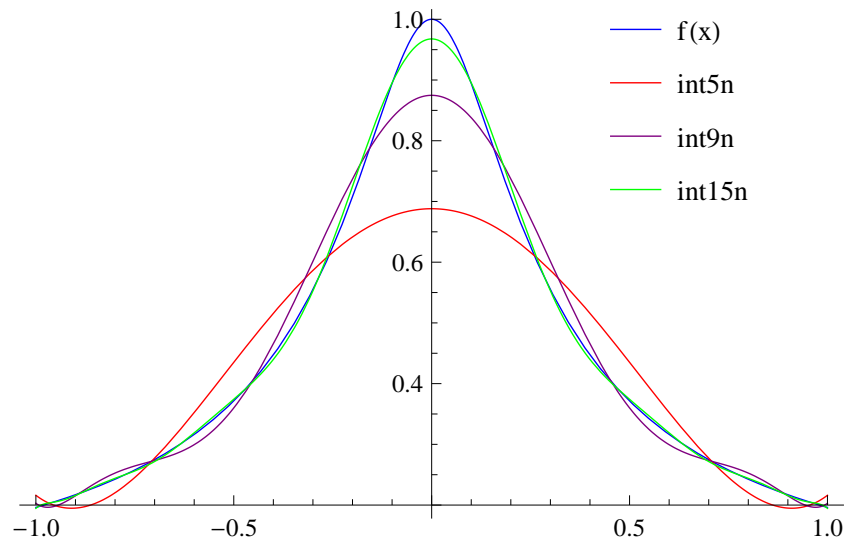
```
N[Derivative[5][f][x]/.x -> 1]
N[Derivative[9][f][x]/.x -> 1]
N[Derivative[15][f][x]/.x -> 1]
-15.5326
-17696.6
5.36383×1010
```

Тем не менее проблема интерполяции функции (П12) решается переходом от равноотстоящих к чебышевским узлам:

```
xx[i_,n_,a_,b_] := 0.5((b-a)Cos[(2i+1)/(2n+2)π]+b+a);
```

Снова зададим список пар «аргумент-функция», найдем интерполяционные многочлены для чебышевских узлов и построим график:

```
xy[n_] := Table[{xx[i,n-1,1],f[xx[i,n-1,1]]//N},{i,0,n}];
int5n = InterpolatingPolynomial[xy[5],x];
int9n = InterpolatingPolynomial[xy[9],x];
int15n = InterpolatingPolynomial[xy[15],x];
Plot[{f[x],int5n,int9n,int15n},{x,-1,1},
PlotStyle -> {Blue,Red,Purple,Green},
PlotLegends -> Placed[{"f(x)","int5n","int9n","int15n"},{0.8,0.8}]]
```



При дальнейшем увеличении степени интерполяционного многочлена точность аппроксимации будет продолжать улучшаться.

Литература

- [1] Бугров Я.С., Никольский С.М. *Высшая математика. Дифференциальное и интегральное исчисление.* — М.: Наука, 1984, — с. 279-282.
- [2] Калиткин Н.Н. *Численные методы.* — М.: Наука, 1978. — с. 27–35.