Линейные неоднородные дифференциальные уравнения

Волченко Ю.М.

Содержание лекции

Структура общего решения линейного неоднородного дифференциального уравнения. Решение методом вариации произвольных постоянных. Формула Остроградского-Лиувилля и ее применение.

1 июля 2014 г.

1 Структура общего решения

Научившись на прошлых занятиях решать линейные однородные дифференциальные уравнения, перейдем к теории и практике решения неоднородных уравнений. Как вы помните, неоднородное уравнение имеет вид

$$L(y) = y^{(n)} + p_{n-1}(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + p_0(x)\, y = f(x), \tag{1}$$

где p_j, f — непрерывные в интервале (a, b) функции x. Однородное уравнение с такими же коэффициентами

$$y^{(n)} + p_{n-1}(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + p_0(x)\, y = 0, \tag{2}$$

называется ***соответствующим*** неоднородному уравнению (1).

Теорема 1. *Общее решение неоднородного уравнения* (1) *есть сумма частного решения этого уравнения и общего решения соответствующего однородного уравнения* (2)*:*

$$y(x) = \overline{y}(x) + y^*(x) = \overline{y}(x) + \sum_{j=1}^{n} C_j y_j(x), \tag{3}$$

где $\overline{y}(x)$ *— частное решение уравнения* (1)*,* $y^*(x)$ *— общее решение соответствующего однородного уравнения* (2)*,* $\{y_j(x)\}$ *— фундаментальная система решений уравнения* (2).

Доказательство. Покажем, что функция (3) является решением неоднородного уравнения (1). Для этого возьмем линейный дифференциальный оператор[†] от обеих частей равенства (3):

$$L(y) = L\left[\overline{y}(x) + \sum_{j=1}^{n} C_j y_j(x)\right] = L[\overline{y}(x)] + \sum_{j=1}^{n} C_j L[y_j(x)] =$$
$$= f(x) + 0 = f(x),$$

так как $L[\overline{y}] = f(x)$, $L(y_j) = 0$. Покажем, что (3) является общим решением уравнения (1). Пусть $z(x)$ – еще одно решение (1). Тогда

$$L(z - \overline{y}) = L(z) - L(\overline{y}) = f - f \equiv 0,$$

и, таким образом, $z - \overline{y}$ – решение однородного уравнения (2). Но согласно теории линейных однородных уравнений такое решение обязательно представимо в виде

$$z - \overline{y} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j y_j,$$

где α_j – некоторые числа, или

$$z = \overline{y} + \sum_{j=1}^{n} \alpha_j y_j.$$

Тем самым доказано, что произвольное решение неоднородного уравнения имеет форму (3).

Теорема 2. *Пусть правая часть уравнения* (1) *представляет собой сумму двух функций:*

$$L(y) = f_1(x) + f_2(x), \tag{4}$$

и пусть $y_1(x)$ *– частное решение уравнения* $L(y) = f_1(x)$, *а* $y_2(x)$ *– частное решение уравнения* $L(y) = f_2(x)$. *Тогда* $y_1(x) + y_2(x)$ *– частное решение уравнения* (4).

Доказательство. Действительно, используя основное свойство линейного дифференциального оператора, получаем

$$L(y_1 + y_2) = L(y_1) + L(y_2) = f_1 + f_2.$$

[†]Лекция «Однородные ЛДУ высших порядков».

2 Метод вариации произвольных постоянных

Покажем, что общее решение уравнения (1) можно найти, если известно общее решение соответствующего однородного уравнения (2).

Для этого в общем решении однородного уравнения (2)

$$y(x) = \sum_{j=1}^{n} C_j y_j(x)$$

произвольные постоянные C_j будем считать произвольными функциями $C_j\left(x\right)$ аргумента x: .

$$y\left(x\right) = \sum_{j=1}^{n} C_j\left(x\right) y_j\left(x\right). \tag{5}$$

Продифференцируем равенство (5), каждый раз (кроме последнего раза) полагая равной нулю сумму, содержащую $C_j'\left(x\right)$:

$$y' = \sum_{j=1}^{n} C_j\left(x\right) y_j'\left(x\right) + \underbrace{\sum_{j=1}^{n} C_j'\left(x\right) y_j\left(x\right),}_{0}$$

$$y'' = \sum_{j=1}^{n} C_j\left(x\right) y_j''\left(x\right) + \underbrace{\sum_{j=1}^{n} C_j'\left(x\right) y_j'\left(x\right),}_{0}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$y^{(n-1)} = \sum_{j=1}^{n} C_j\left(x\right) y_j^{(n-1)}\left(x\right) + \underbrace{\sum_{j=1}^{n} C_j'\left(x\right) y_j^{(n-2)}\left(x\right),}_{0}$$

$$y^{(n)} = \sum_{j=1}^{n} C_j\left(x\right) y_j^{(n)}\left(x\right) + \sum_{j=1}^{n} C_j'\left(x\right) y_j^{(n-1)}\left(x\right).$$

Умножим уравнение (5) на p_0, уравнение для $y\prime$ — на p_1 и т. д., уравнение для $y^{(n)}$ — на 1 и все полученные уравнения сложим:

$$L\left(y\right) = \sum_{j=1}^{n} C_j\left(x\right) L\left(y_j\right) + \sum_{j=1}^{n} C_j'\left(x\right) y_j^{(n-1)}.$$

Но $L\left(y\right) = f\left(x\right)$, а $L\left(y_j\right) = 0$, поэтому полученное равенство можно переписать так:

$$\sum_{j=1}^{n} C_j'(x)\, y_j^{(n-1)} = f(x)\,.$$

Присоединяя к нему суммы, которые мы положили равными нулю, приходим к следующей системе линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных $C_1'(x)$, …, $C_n'(x)$:

$$\begin{gathered}
\sum_{j=1}^{n} C_j'(x)\, y_j = 0,\\
\sum_{j=1}^{n} C_j'(x)\, y_j' = 0,\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
\sum_{j=1}^{n} C_j'(x)\, y_j^{(n-2)} = 0,\\
\sum_{j=1}^{n} C_j'(x)\, y_j^{(n-1)} = f(x)\,.
\end{gathered} \tag{6}$$

Эта система имеет решение, так как ее определитель является не равным нулю вронскианом $W[y_1, \dots, y_n]$.

Решение запишем в виде

$$C_j'(x) = \frac{W_{nj}(x)\, f(x)}{W(x)},$$

где W_{nj} – алгебраическое дополнение j-го элемента n-й строки определителя W. Из полученного равенства по производным C_j' находим сами коэффициенты $C_j(x)$:

$$C_j(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{W_{nj}(x)\, f(x)}{W(x)}\, dx + \alpha_j,$$

где α_j произвольные постоянные.

Подставляя найденные выражения для $C_j(x)$ в формулу (5), придем к следующему решению неоднородного линейного уравнения:

$$\boxed{y(x) = \sum_{j=1}^{n} y_j(x) \int_{x_0}^{x} \frac{W_{nj}(x)\, f(x)}{W(x)}\, dx + \sum_{j=1}^{n} \alpha_j y_j(x)\,.} \tag{7}$$

Положив $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$, найдем частное решение неоднородного уравнения:

$$\overline{y}(x) = \sum_{j=1}^{n} y_j(x) \int_{x_0}^{x} \frac{W_{nj}(x) f(x)}{W(x)} \, dx.$$

Значит, решение (7) имеет вид (3) и, следовательно, является общим решением неоднородного дифференциального уравнения.

Часто приходится решать дифференциальное уравнение второго порядка:

$$y'' + p(x) y' + q(x) = f(x).$$

Его вронскиан имеет вид

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix},$$

а тогда $W_{21}(x) = -y_2(x)$, $W_{22}(x) = y_1(x)$, и общее решение записывается так:

$$\boxed{\begin{aligned} y(x) = -y_1(x) \int_{x_0}^{x} \frac{y_2(x) f(x)}{W(x)} \, dx + y_2(x) \int_{x_0}^{x} \frac{y_1(x) f(x)}{W(x)} \, dx + \\ + \alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x). \end{aligned}}$$

Решим с помощью этой формулы следующий пример.

Пример 1. *Найти общее решение уравнения*

$$y'' - 4y' + 3y = e^{2x}. \tag{8}$$

Решение. Сначала решим соответствующее (8) однородное уравнение

$$y'' - 4y' + 3y = 0.$$

Составим характеристическое уравнение:

$$p^2 - 4p + 3 = 0.$$

Его корни: $p_1 = 1, p_2 = 3$. Значит, общее решение однородного уравнения будет таким:

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{3x}. \tag{9}$$

Считая произвольные постоянные функциями x, составим систему (6):

$$\begin{cases} C_1' e^x + C_2' e^{3x} = 0, \\ C_1' e^x + 3C_2' e^{3x} = e^{2x}, \end{cases}$$

и решим ее по формулам Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} e^x & e^{3x} \\ e^x & 3e^{3x} \end{vmatrix} = 2e^{4x}, \; \Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & e^{3x} \\ e^{2x} & 3e^{3x} \end{vmatrix} = -e^{5x}, \; \Delta_2 = \begin{vmatrix} e^x & 0 \\ e^x & e^{2x} \end{vmatrix} = e^{3x},$$

$$C_1' = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-e^{5x}}{2e^{4x}} = -\frac{1}{2}\,e^x,\ C_2' = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{e^{3x}}{2e^{4x}} = \frac{1}{2}\,e^{-x}.$$

Чтобы найти C_1и C_2, проинтегрируем полученное решение:

$$C_1 = -\frac{1}{2}\,e^x + \alpha_1,\ C_2 = -\frac{1}{2}\,e^{-x} + \alpha_2.$$

Подставляя эти выражения вместо C_1и C_2 в формулу (9), получим общее решение заданного неоднородного уравнения:

$$y = \left(-\frac{1}{2}e^x + \alpha_1\right)e^x + \left(-\frac{1}{2}\,e^{-x} + \alpha_2\right)e^{3x} =$$
$$= \alpha_1 e^x + \alpha_2 e^{3x} - e^{2x}.$$

□

Еще один пример технического характера приведен в Приложении[1)].

3 Формула Остроградского-Лиувилля

Лемма 1. *Производная определителя* $A(x) = \det\{a_{ij}(x)\}_1^n$ *равна*

$$A'(x) = A_1(x) + \ldots + A_n(x),$$

где $A_i(x)$ *— определитель, полученный из определителя* $A(x)$ *дифференцированием* i*-й строки.*

Доказательство. Так как определитель является функцией своих элементов, т. е. $A(x) = A[a_{11}(x), \ldots, a_{nn}(x)]$, то, применяя правило дифференцирования сложной функции нескольких переменных, получим

$$A'(x) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial A}{\partial a_{ij}}\cdot\frac{da_{ij}}{dx}. \tag{10}$$

С другой стороны известно, что

$$A(x) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x)\,\mathcal{A}_{ij}(x),$$

где $\mathcal{A}_{ij}(x)$ — алгебраическое дополнение элемента a_{ij}, поэтому

$$\frac{\partial A}{\partial a_{ij}} = \mathcal{A}_{ij}.$$

Делая такую подстановку в равенстве (10), приходим к требуемой формуле:

$$A'(x) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\mathcal{A}_{ij}a_{ij}' = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}'\mathcal{A}_{ij}\right) = \sum_{i=1}^{n} A_i.$$

Теорема 3. *Вронскиан уравнения* (2) *представи́м в виде*

$$W(x) = W(x_0)\, e^{-\int_{x_0}^{x} p_{n-1}(x)\, dx}, \tag{11}$$

где $p_{n-1}(x)$ *— коэффициент в уравнениях* (1) *или* (2).

Доказательство. Из леммы следует, что

$$W'(x) = W_1(x) + \ldots + W_n(x).$$

Определитель $W_i(x) = 0$ для $i < n$, так как в этом определителе i-я строка совпадает с $(i+1)$-й. Значит,

$$W'(x) = W_n(x) = \begin{vmatrix} y_1 & \ldots & y_n \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-2)} & \ldots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n)} & \ldots & y_n^{(n)} \end{vmatrix}.$$

В силу уравнения (2) n-я строка в $W'(x)$ является линейной комбинацией предыдущих строк: $y_i^{(n)} = -p_{n-1}y_i^{(n-1)} - \ldots - p_0 y_i$. Следовательно,

$$W'(x) = \begin{vmatrix} \ldots & y_i & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & y_i^{(n-2)} & \ldots \\ \ldots & -p_{n-1}y_i^{(n-1)} - \ldots - p_0 y_i & \ldots \end{vmatrix}.$$

Умножим каждую j-ю строку, $j = \overline{1, n-1}$, на p_{j-1} и прибавим к последней:

$$W'(x) = \begin{vmatrix} \ldots & y_i & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & y_i^{(n-2)} & \ldots \\ \ldots & -p_{n-1}y_i^{(n-1)} & \ldots \end{vmatrix} = -p_{n-1}W(x).$$

Следовательно, $\frac{dW}{W} = -p_{n-1}dx$, а

$$W(x) = C \exp\left(-\int_{x_0}^{x} p_{n-1}\, dx\right),$$

где C — произвольная постоянная. Тогда $W(x_0) = C$ и можно записать, что

$$W(x) = W(x_0) \exp\left(-\int_{x_0}^{x} p_{n-1}\, dx\right).$$

□

Равенство (11) называется ***формулой Остроградского-Лиувилля***.

Иногда бывает несложно найти какое-нибудь частное решение уравнения линейного однородного уравнения второго порядка. Формула (11) в этом случае помогает определить и общее решение такого уравнения.

Теорема 4. *Если известно одно частное решение $y_1(x)$ уравнения* (2) *второго порядка, то его общее решение выражается формулой*

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_1(x) \int \frac{1}{y_1^2} \exp\left(-\int p_{n-1}\, dx\right) dx. \tag{12}$$

Доказательство. По формуле Остроградского-Лиувилля

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_2 y_1' = C \exp\left(-\int p_{n-1}\, dx\right). \tag{13}$$

Разделим обе части уравнения на y_1^2:

$$\frac{y_1 y_2' - y_2 y_1'}{y_1^2} = \frac{C}{y_1^2} \exp\left(-\int p_{n-1}\, dx\right),$$

$$\left(\frac{y_2}{y_1}\right)' = \frac{C}{y_1^2} \exp\left(-\int p_{n-1}\, dx\right).$$

Интегрируя, получим

$$\frac{y_2}{y_1} = C \int \frac{1}{y_1^2} \exp\left(-\int p_{n-1}\, dx\right) dx + D,$$

где D — произвольная постоянная. Тогда

$$y_2 = C y_1 \int \frac{1}{y_1^2} \exp\left(-\int p_{n-1}\, dx\right) dx + D y_1.$$

Положим $C = 1$, $D = 0$. Тогда

$$y_2 = y_1 \int \frac{1}{y_1^2} \exp\left(-\int p_{n-1}\, dx\right) dx, \tag{14}$$

а из формулы (13) следует ($C = 1 \neq 0$), что y_1и y_2 линейно независимы. Поэтому функция $y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$, т. е. функция (12) будет общим решением линейного однородного уравнения второго порядка.

Пример 2. *Найти общее решение уравнения* $(x^2+1)y'' - 2y = 0$.

Решение. Так как коэффициент при y'' есть x^2+1, проверим, не будет ли эта функция частным решением заданного дифференциального уравнения:

$$\left(x^2+1\right) 2 - 2(x^2+1) \equiv 0.$$

Значит, $y_1 = x^2 + 1$ действительно является частным решением данного уравнения. Получим второе частное решение (линейно независимое с первым) по формуле (14). Так как у нас $p_{n-1} \equiv 0$, $n = 2$, то экспонента обращается в 1 и

$$y_2 = y_1 \int \frac{dx}{y_1^2} = \left(x^2+1\right) \int \frac{dx}{\left(x^2+1\right)^2}. \tag{15}$$

Для вычисления подобных интегралов на одной из предыдущих лекций† была выведена формула

$$I_k = \int \frac{dx}{\left(t^2+w^2\right)^k} = \frac{1}{w^2}\left[\frac{2k-3}{2k-2}\, I_{k-1} + \frac{t}{2\,(k-1)\left(t^2+w^2\right)^{k-1}}\right].$$

В нашем случае $t = x$, $w = 1$, $k = 2$, поэтому

$$\int \frac{dx}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+1} + \frac{x}{2\left(x^2+1\right)} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + \frac{x}{2\left(x^2+1\right)}.$$

По формуле (15) находим, что

$$y_2 = \frac{1}{2}\left[x + \left(x^2+1\right)\operatorname{arctg} x\right].$$

Следовательно, общее решение заданного уравнения имеет вид

$$y\,(x) = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1\left(x^2+1\right) + C_2\left[x + \left(x^2+1\right)\operatorname{arctg} x\right].$$

† Лекция «Интегрирование ДРФ».

Приложение

[1)] На предыдущей лекции было рассмотрен пример с RLC-контуром, для которого было получено уравнение электрических колебаний

$$\frac{d^2i}{dt^2}+\frac{R}{L}\cdot\frac{di}{dt}+\frac{1}{LC}i=\frac{1}{L}\cdot\frac{du}{dt}. \tag{П1}$$

Были исследованы различные случаи решения такого уравнения при условии, что $u(t)\equiv$ $\equiv \mathrm{const}$. Предположим теперь, что входное напряжение задается функцией

$$u(t)=2t+1-\ln\left(e^{2t}+1\right), \tag{П2}$$

график которой показан на рис. 1, а). Тогда

$$u'(t)=2-\frac{2e^{2t}}{1+e^{2t}}=\frac{2}{1+e^{2t}}.$$

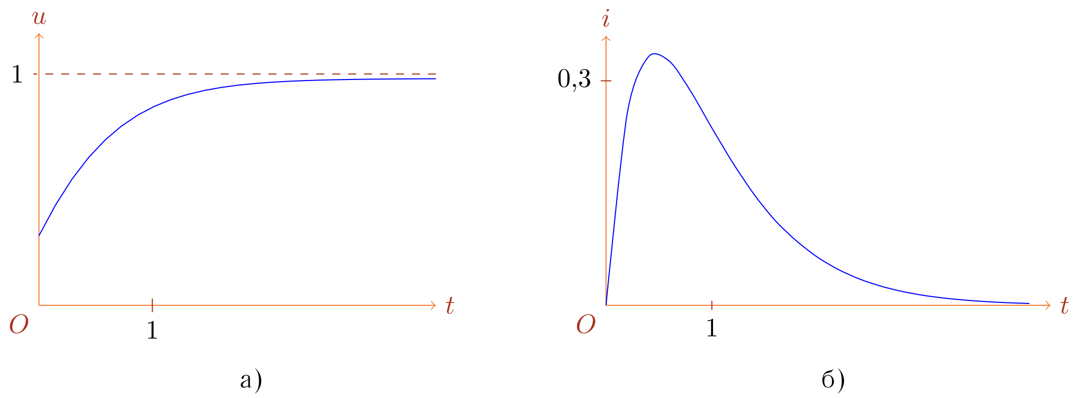


Рис. 1. а) Входное напряжение и б) ток на выходе

Пусть параметры схемы R, L и C таковы, что при входном напряжении (П2), уравнение (П1) принимает вид

$$\frac{d^2i}{dt^2}+5\frac{di}{dt}+6i=\frac{2}{1+e^{2t}}. \tag{П3}$$

Требуется найти ток в контуре при начальных условиях

$$i(0)=0,\ i'(0)=2. \tag{П4}$$

Решим сначала соответствующее однородное уравнение $i''+5i'+6=0$. Так как корни характеристического уравнения равны -2 и -3, то общим решением однородного уравнения будет функция

$$i(t)=C_1e^{-2t}+C_2e^{-3t}. \tag{П5}$$

Решение неоднородного уравнения (П3) будем искать методом вариации произвольных постоянных. Составим систему (6):

$$\begin{aligned}C_1'e^{-2t}+C_2'e^{-3t}&=0,\\ -2C_1'e^{-2t}-3C_2'e^{-3t}&=\frac{2}{1+e^{2t}}.\end{aligned}$$

Решим ее по правилу Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} e^{-2t} & e^{-3t} \\ -2e^{-2t} & -3e^{-3t} \end{vmatrix} = -e^{-5t},$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & e^{-3t} \\ \frac{2}{1+e^{2t}} & -3e^{-3t} \end{vmatrix} = -\frac{2e^{-3t}}{1+e^{2t}},\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} e^{-2t} & 0 \\ -2e^{-2t} & \frac{2}{1+e^{2t}} \end{vmatrix} = \frac{2e^{-2t}}{1+e^{2t}};$$

$$C_1' = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{2e^{2t}}{1+e^{2t}},\ C_2' = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -\frac{2e^{3t}}{1+e^{2t}}.$$

Интегрируя, найдем C_1 и C_2:

$$\begin{aligned} C_1 &= 2\int \frac{e^{2t}dt}{1+e^{2t}} = \left\langle z = 1+e^{2t},\ dz = 2e^{2t}\,dt \right\rangle = \int \frac{dz}{1+z} = \\ &= \ln(1+z) + \alpha_1 = \ln\left(1+e^{2t}\right) + \alpha_1, \\ C_2 &= -2\int \frac{e^{3t}dt}{1+e^{2t}} = \left\langle z = e^t,\ dz = e^t dt \right\rangle = -2\int \frac{z^2 dz}{1+z^2} = \\ &= -2\int \frac{(z^2+1-1)\,dz}{1+z^2} = -2\int dz + 2\int \frac{dz}{1+z^2} = \\ &= -2z + 2\operatorname{arctg} z + \alpha_2 = -2e^t + 2\operatorname{arctg} e^t + \alpha_2. \end{aligned}$$

Подставив выражения для этих констант в уравнение (П5), получим общее решение уравнения (П3):

$$i(t) = \alpha_1 e^{-2t} + \alpha_2 e^{-3t} + e^{-2t}\ln\left(1+e^{2t}\right) + 2e^{-3t}\operatorname{arctg} e^t - 2e^{-2t}.$$

Найдем производную этой функции:

$$i'(t) = -2\alpha_1 e^{-2t} - 3\alpha_2 e^{-3t} - 2e^{-2t}\ln\left(1+e^{2t}\right) + \frac{2}{1+e^{2t}} - 6e^{-3t}\operatorname{arctg} e^t + \frac{2e^{-2t}}{1+e^{2t}} + 4e^{-2t}.$$

Используя начальные условия (П4):

$$i(0) = \alpha_1 + \alpha_2 + \ln 2 + \frac{\pi}{2} - 2 = 0,$$

$$i'(0) = -2\alpha_1 - 3\alpha_2 - 2\ln 2 - \frac{3\pi}{2} + 6 = 2,$$

получим систему уравнений для определения α_1 и α_2:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 2 - \frac{\pi}{2} - \ln 2, \\ -2\alpha_1 - 3\alpha_2 = \frac{3\pi}{2} - 4 + 2\ln 2. \end{cases}$$

Решая ее, определяем искомое частное решение

$$\alpha_1 = 2 - \ln 2,\ \alpha_2 = -\frac{\pi}{2};$$

$$i(t) = (2-\ln 2)\,e^{-2t} - \frac{\pi}{2}\,e^{-3t} + e^{-2t}\ln\left(1+e^{2t}\right) + 2e^{-3t}\operatorname{arctg} e^t - 2e^{-2t};$$

или

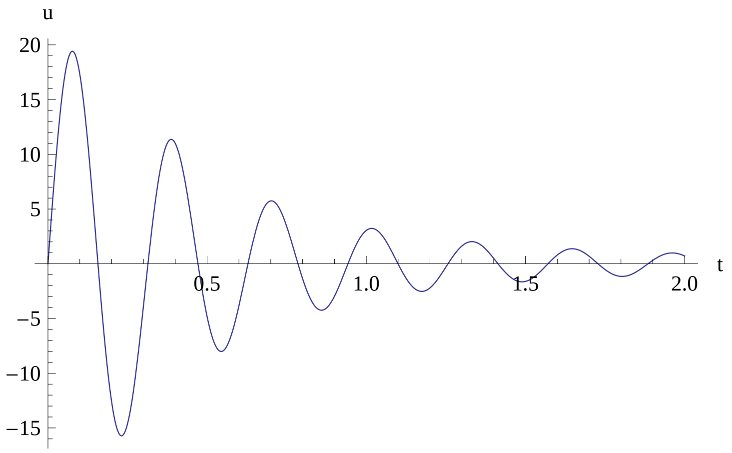
$$i(t) = \left[-\ln 2 + \ln\left(1+e^{2t}\right)\right] e^{-2t} + \left(-\frac{\pi}{2} + 2\operatorname{arctg} e^t\right) e^{-3t}.$$

График этой зависимости показан на рис. 1, б).

С помощью системы *Mathematica* можно получать отклики колебательного контура и на более сложные внешние воздействия, применяя численное решение дифференциального уравнения, когда последнее аналитически не решается. Получим, например, график тока в контуре для входного напряжения

$$u(t) = \frac{4\sin 20t}{t^2+0{,}2}.$$

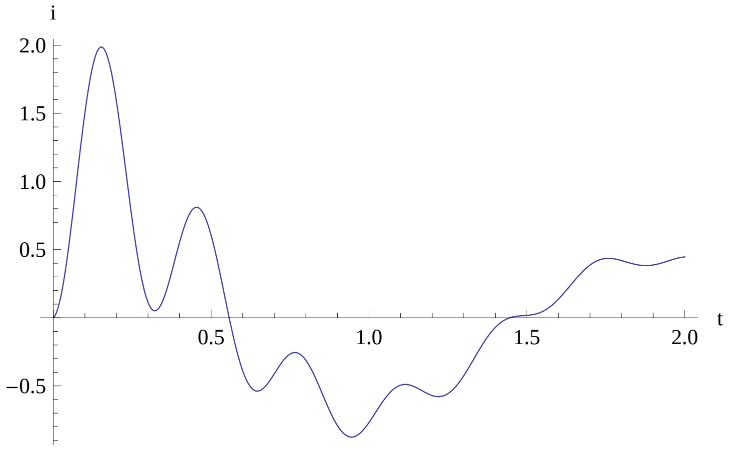
Построим сначала график напряжения:




```
u[t_] := 4 Sin[20 t] / (t^2 + 0.2)
Plot[u[t], {t,0,2}, AxesLabel → {"t","u"}, PlotRange → All]
```

Далее обратимся к численному интегрированию в системе *Mathematica* и получим график тока:

```
NDSolve[{i''[t] + i'[t] + 12i[t] == g[t], i[0] == 0, i'[0] == 2}, i[t], {t,0,2}];
Plot[Evaluate[i[t] /. %], {t,0,2},  AxesLabel → {"t","i"}]
```



Литература

[1] Бугров Я.С., Никольский С.М. *Высшая математика. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного.* – М.: Наука, 1985. – с. 67, 77-80.

[2] Письменный Д.Т. *Конспект лекций по высшей математике.* – М.: Рольф, 2000. Ч. 1. – с. 39-42.