Однородные ЛДУ высших порядков

Волченко Ю.М.

Содержание лекции

Линейное дифференциальное уравнение (ЛДУ) n-го порядка. Линейный дифференциальный оператор. Линейная независимость функций в интервале. Определитель Вронского. Фундаментальная система решений однородного ЛДУ n-го порядка. Структура его общего решения. Решение однородного ЛДУ n-го порядка с постоянными коэффициентами.

Анимация электрических колебаний в RLC-контуре.
Анимация работает только в программе Acrobat Reader!

Применение системы *Mathematica* для решения однородных ЛДУ n-го порядка.

12 ноября 2011 г.

1 Линейный дифференциальный оператор

Линейным дифференциальным уравнением n-го порядка называется уравнение вида

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x), \tag{1}$$

где $a_{n-1}(x)$, ..., $a_0(x)$, $f(x)$ — заданные на интервале (a, b) функции, непрерывные на нем, $y(x)$ — неизвестная функция.

Левую часть уравнения (1) обозначим $L_n(y)$, или просто $L(y)$ и назовем ***линейным дифференциальным оператором n-го порядка***.

Теорема 1 (Основное свойство линейного дифференциального оператора). *Линейный дифференциальный оператор действительно линеен:*

$$L\left(\sum_{i=1}^{m} C_i y_i(x)\right) = \sum_{i=1}^{m} C_i L(y_i(x)),$$

где y_i — любые n раз дифференцируемые функции.

Доказательство. Приведем левую часть доказываемого равенства к правой части:

$$L\left(\sum_{i=1}^{m} C_i y_i(x)\right) =$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{m} C_i y_i\right)^{(n)} + a_{n-1}\left(\sum_{i=1}^{m} C_i y_i\right)^{(n-1)} + \ldots + a_1\left(\sum_{i=1}^{m} C_i y_i\right)' + a_0 \sum_{i=1}^{m} C_i y_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} C_i \left(y_i^{(n)} + a_{n-1} y_i^{(n-1)} + \ldots + a_1 y_i' + a_0 y_i\right) = \sum_{i=1}^{m} C_i L(y_i(x)).$$

□

Если $f(x) \equiv 0$, то уравнение (1) приобретает вид

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x) y^{(n-1)} + \ldots + a_1(x) y' + a_0(x) y = 0 \tag{2}$$

и называется ***линейным однородным дифференциальным уравнением n-го порядка***. При $f(x) \not\equiv 0$ уравнение (1) называется ***неоднородным***.

Теорема 2. *Дифференциальное уравнение* (1) *имеет на* (a, b) *единственное решение, удовлетворяющее начальным условиям*

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_0', \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}.$$

Если функции $a_i(x)$, $f(x)$ имеют на (a, b) непрерывные производные порядка q, то решение имеет на (a, b) непрерывные производные до порядка $n + q$ включительно.

Теорема 3. *Если функции* $y_1(x), \ldots, y_m(x)$ *являются решениями однородного уравнения* (2), *то их линейная комбинация*

$$y(x) = \sum_{i=1}^{m} C_i y_i(x)$$

также является решением этого уравнения.

Доказательство. Уравнение (2) можно записать с помощью линейного дифференциального оператора так: $L(y) = 0$. Если y − функция, приведенная в условии теоремы, то на основании теоремы 1 получаем

$$L(y) = L\left(\sum_{i=1}^{m} C_i y_i(x)\right) = \sum_{i=1}^{m} C_i L(y_i(x)) \equiv 0,$$

так как $L\left(y_i(x)\right) \equiv 0$, поскольку функции $y_i(x)$ − решения однородного уравнения.

2 Фундаментальная система решений

Функции $y_1(x)$, …, $y_m(x)$ называются ***линейно зависимыми*** в интервале (a, b), если выполняется равенство

$$\forall(x)\, \lambda_1 y_1(x) + \ldots + \lambda_m y_m(x) = 0,$$

где λ_j — числа, из которых хотя бы одно не равно нулю. В противном случае эти функции называются ***линейно независимыми***.

Если функции $y_1(x)$, …, $y_n(x)$ являются решениями однородного уравнения (2) и линейно независимы, то говорят, что они образуют ***фундаментальную систему решений (ФСР)*** этого дифференциального уравнения.

Для системы функций $y_1(x), \ldots, y_m(x)$ ***определителем Вронского*** или ***вронскианом*** называют определитель

$$W[y_1, \ldots, y_m] = W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & \ldots & y_m \\ y_1' & \ldots & y_m' \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(m-1)} & \ldots & y_m^{(m-1)} \end{vmatrix}.$$

Теорема 4. *Если функции $y_1(x), \ldots, y_m(x)$ линейно зависимы и $m-1$ раз дифференцируемы на (a, b), то $W(x) \equiv 0$ на (a, b).*

Доказательство. Так как функции $y_1, \ldots, y_m$ линейно зависимы, то найдутся числа α_j, не все равные нулю и такие, что для всех x выполнится равенство $\alpha_1 y_1 + \ldots + \alpha_m y_m \equiv 0$. Продифференцируем это равенство $m-1$ раз:

$$\begin{cases} \alpha_1 y_1 + \ldots + \alpha_m y_m \equiv 0, \\ \alpha_1 y_1' + \ldots + \alpha_m y_m' \equiv 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_1 y_1^{(m-1)} + \ldots + \alpha_m y_m^{(m-1)} \equiv 0. \end{cases}$$

Так как вектор $(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ не равен нулевому, то эта система для любого $x \in (a, b)$ имеет нетривиальное решение $(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$. Но для однородной линейной алгебраической системы это возможно лишь в случае, когда ее определитель равен нулю. Однако определитель системы — это определитель Вронского. Таким образом, мы доказали, что он равен нулю.

Следствие 1. *Если хотя бы для одного $x \in (a, b)$ определитель $W(x) \neq 0$, то функции $y_1(x), \ldots, y_m(x)$ линейно независимы на (a, b).*

Следующая теорема показывает использование определителя Вронского в теории дифференциальных уравнений.

Теорема 5. *Для того чтобы решения $y_1(x)$, ..., $y_n(x)$ линейного однородного дифференциального уравнения* (2) *с непрерывными коэффициентами были линейно независимы на (a, b), необходимо и достаточно, чтобы*

$$\forall(x_0 \in (a, b))\, W[y_1, \dots, y_n] \neq 0.$$

Доказательство. Необходимость. Пусть решения (2) y_1, ..., y_n линейно независимы. Предположим противное утверждению теоремы:

$$\exists(x_0) \in (a, b)\, W[y_1(x_0), \dots, y_n(x_0)] = 0.$$

Тогда однородная система уравнений

$$\begin{cases} \alpha_1 y_1(x_0) + \ldots + \alpha_n y_n(x_0) \equiv 0, \\ \alpha_1 y_1'(x_0) + \ldots + \alpha_n y_n'(x_0) \equiv 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + \ldots + \alpha_n y_n^{(n-1)}(x_0) \equiv 0, \end{cases} \tag{3}$$

имеет нетривиальное решение $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, так как ее определитель $W(x_0) = 0$. По теореме 3 функция $\sum_{j=1}^n \alpha_j y_j(x)$ – тоже решение (2) и в силу (3) удовлетворяет начальным условиям $y^{(k)}(x_0) = 0,\ k = \overline{0, n-1}$. Но этим же условиям удовлетворяет и тривиальное решение уравнения (2) $z(x) \equiv 0$. По теореме 2 эти решения должны совпадать. Значит, $y(x) \equiv 0$, или $\sum_{j=1}^n \alpha_j y_j(x) = 0$ и, следовательно, функции $y_1, \dots, y_n$ линейно зависимы. Получили противоречие, доказывающее утверждение.

Достаточность. Пусть $W(x) \neq 0$, тогда из вышеприведенного следствия получаем, что $y_1, \dots, y_n$ линейно независимы на (a, b). □

Структуру общего решения линейного однородного дифференциального уравнения определяет следующее утверждение.

Теорема 6. *Общее решение уравнения* (2) *имеет вид*

$$y(x) = \sum_{j=1}^{n} C_j y_j(x),\ x \in (a, b), \tag{4}$$

где C_j – произвольные постоянные; $y_1(x), \dots, y_n(x)$ – фундаментальная система решений уравнения (2).

Доказательство. Функция (4) на основании теоремы 3 является решением (2). Покажем, что любое решение $z(x)$ уравнения (2), удовлетворяющее начальным условиям $z(x_0) = z_0$, $z'(x_0) = z_0'$, …, $z^{(n-1)}(x_0) = z_0^{(n-1)}$ можно представить в виде (4). Для этого составим систему уравнений:

$$\begin{cases} C_1y_1(x_0) + \ldots + C_ny_n(x_0) = z_0, \\ C_1y_1'(x_0) + \ldots + C_ny_n'(x_0) = z_0', \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_1y_1^{(n-1)}(x_0) + \ldots + C_ny_n^{(n-1)}(x_0) = z_0^{(n-1)}. \end{cases} \tag{5}$$

Так как решения $y_1, \ldots, y_n$ уравнения (2) независимы на (a, b), то по теореме 5 определитель системы (5) $W(x_0) \neq 0$. Следовательно, эта алгебраическая система имеет единственное решение C_1^0, …, C_n^0. Подставив его в (4), получим решение

$$y(x) = \sum_{j=1}^{n} C_j^0 y_j(x),$$

которое удовлетворяет тем же начальным условиям, что и решение $z(x)$. Тогда по теореме 2 $y(x) \equiv z(x)$.

Теорема 7. *Фундаментальная система решений дифференциального уравнения* (2) *с непрерывными коэффициентами всегда существует.*

Доказательство. Пусть y_1, …, y_n − система решений (2) при начальных условиях

$$\begin{gathered} y_1(x_0) = 1, y_1'(x_0) = 0, \ldots, y_1^{(n-1)}(x_0) = 0, \\ y_2(x_0) = 0, y_2'(x_0) = 1, \ldots, y_2^{(n-1)}(x_0) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n(x_0) = 0, y_n'(x_0) = 0, \ldots, y_n^{(n-1)}(x_0) = 1. \end{gathered}$$

Такая система решений существует на основании теоремы 2. Для этой системы решений вронскиан имеет вид

$$W(x_0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Поэтому на основании приведенного выше следствия система функций $y_1(x)$, …, $y_n(x)$ линейно независима и, таким образом, является фундаментальной системой решений.

3 Однородное ЛДУ с постоянными коэффициентами

Такое уравнение имеет вид

$$L(y) = y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = 0, \tag{6}$$

где $a_0, \ldots, a_{n-1}$ – действительные числа.

Как было показано, чтобы найти общее решение однородного уравнения, достаточно отыскать фундаментальную систему его решений, которая всегда существует. Попробуем найти решение этого уравнения в виде $y(x) = e^{px}$, где p – некоторое число. Подставим эту функцию и ее производные $y' = pe^{px}, \ldots, y^{(n)} = p^n e^{px}$ в уравнение (6):

$$\left(p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \ldots + a_1 p + a_0\right) e^{px} = 0. \tag{7}$$

Разделим на e^{px} и получим алгебраическое уравнение

$$p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \ldots + a_1 p + a_0 = 0, \tag{8}$$

которое называется ***характеристическим*** для уравнения (6).

В соответствии с основной теоремой алгебры такое уравнение имеет n в общем случае комплексных корней (с учетом их кратности): $p_1, \ldots, p_n$. Они удовлетворяют уравнению (8), а тогда функции

$$y_1 = e^{p_1 x}, \ldots, y_n = e^{p_n x} \tag{9}$$

в силу уравнения (7) являются решениями уравнения (6). Чтобы эти функции составили практически пригодную фундаментальную систему решений, необходимо выполнение двух условий. Во-первых, они должны быть линейно независимыми, а, во-вторых, не должны быть комплексными. Действительно, было бы странно, особенно для практических применений, получить комплексное решение уравнения, в котором никаких комплексных величин нет.

Оказывается, в зависимости от типов корней характеристического уравнения, получаются различные фундаментальные системы решений. Рассмотрим все возможные случаи.

3.1 Действительные различные корни

Пусть все корни $p_1, \ldots, p_n$ характеристического уравнения (8) действительны и различны. Тогда все функции (9) будут решениями уравнения (6). Проверим линейную независимость этих решений, для чего составим вронскиан:

$$W\left[e^{p_1 x}, \ldots, e^{p_n x}\right] = \begin{vmatrix} e^{p_1 x} & \ldots & e^{p_n x} \\ p_1 e^{p_1 x} & \ldots & p_n e^{p_n x} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ p_1^{n-1} e^{p_1 x} & \ldots & p_n^{n-1} e^{p_n x} \end{vmatrix} =$$

$$= \left(e^{p_1 x} + \ldots + e^{p_n x}\right) \begin{vmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ p_1 & \ldots & p_n \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ p_1^{n-1} & \ldots & p_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

В правой части получился определитель, который называется определителем Вандермонда. Докажем, что он не равен нулю. Доказательство проведем от противного. Предположим, что определитель Вандермонда равен нулю. Тогда между его строками существует линейная зависимость, которую можно записать так:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i p_i^{i-1} = 0, \ \ldots \ , \sum_{i=1}^{n} \alpha_i p_n^{i-1} = 0.$$

Рассмотрим многочлен $(n-1)$-й степени

$$P_{n-1}(z) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i z^{i-1}.$$

Предыдущие равенства свидетельствуют о том, что он имеет n корней $p_1, \ldots,$ p_n, чего быть не может. Полученное противоречие доказывает, что определитель Вандермонда, а, значит, и рассмотренный вронскиан $W\left[e^{p_1 x}, \ldots, e^{p_n x}\right]$ нулю не равны, из чего следует линейная независимость решений (9).

Остается из полученной фундаментальной системы решений составить общее решение уравнения (6):

$$y(x) = C_1 e^{p_1 x} + \ldots + C_n e^{p_n x}.$$

Пример 1. *Решить уравнение* $y''' + 2y'' - y' - 2y = 0.$

Решение. Составим характеристическое уравнение:

$$p^3 + 2p^2 - p - 2 = 0.$$

Преобразуем его:

$$p^2(p+2) - (p+2) = 0, \ (p^2 - 1)(p+2) = 0, \ (p-1)(p+1)(p+2) = 0.$$

Таким образом, корнями являются $p_1 = 1$, $p_2 = -1$, $p_3 = -2$. Мы видим, что корни действительные и разные. В соответствии с изложенной теорией фундаментальную систему решений образуют функции $y_1 = e^x$, $y_2 = e^{-x}$, $y_3 = e^{-2x}$, а общим решением заданного уравнения является функция

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 e^{-2x}.$$

3.2 Действительные кратные корни

Предположим, что корни характеристического уравнения по-прежнему действительны, но среди них есть кратные. Пусть, например, корень p_1 имеет кратность m. Тогда m первых функций $y_1 = e^{p_1 x}$, ..., $y_m = e^{p_1 x}$ уже не будут линейно независимы и составить из рассмотренных выше функций (9) фундаментальную систему решений не удастся.

Покажем, что функции y_1, ..., y_m можно заменить линейно независимыми функциями

$$z_1 = e^{p_1 x}, z_2 = x e^{p_1 x}, \ldots, z_m = x^{m-1} e^{p_1 x}, \tag{10}$$

которые являются решениями уравнения (6).

Вначале покажем, что новые функции линейно-независимы. Действительно, так как $e^{p_1 x} \neq 0$ и

$$\alpha_1 e^{p_1 x} + \alpha_2 x e^{p_1 x} + \ldots + \alpha_m x^{m-1} e^{p_1 x} = e^{p_1 x} \left(\alpha_1 + \alpha_2 x + \ldots + \alpha_m x^{m-1} \right),$$

то система функций (10) и система функций 1, x, ..., x^{m-1} линейно зависимы или линейно независимы одновременно. Но последняя система функций линейно независима, так как ее вронскиан

$$W\left[1, x, x^2, \ldots, x^{m-1}\right] = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \ldots & x^{m-1} \\ 0 & 1! & 2x & \ldots & (m-1)x^{m-2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & (m-1)! \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot 1! \cdot 2! \cdot \ldots \cdot (m-1)! \neq 0,$$

следовательно, и система функций (10) линейно независима.

Докажем теперь, что каждая функция этой системы является решением уравнения (6). Обозначим $\varphi(p)$ левую часть характеристического уравнения (8); при этом, очевидно, справедлива запись $\varphi(p) = (p - p_1)^m \psi(p)$, где $\psi(p_1) \neq 0$. Тогда

$$\varphi(p_1) = 0,\ \varphi'(p_1) = 0, \ldots, \varphi^{(m-1)}(p_1) = 0. \tag{11}$$

Далее продифференцируем s раз по p тождество

$$L\left(e^{px}\right) = \varphi(p) e^{px}.$$

Дифференцируя левую часть, получим

$$\frac{\partial^s}{\partial p^s} L\left(e^{px}\right) = L\left(\frac{\partial^s e^{px}}{\partial p^s}\right) = L\left(x^s e^{px}\right).$$

Дифференцирование правой части дает

$$\frac{\partial^s}{\partial p^s}\left[\varphi(p) e^{px}\right] = \sum_{i=0}^{s} C_s^i \varphi^{(i)}(p) \frac{\partial^{s-i} e^{px}}{\partial p^{s-i}} = \sum_{i=0}^{s} C_s^i \varphi^{(i)}(p) x^{s-i} e^{px}.$$

Таким образом, имеем

$$L\left(x^s e^{px}\right) = \sum_{i=0}^{s} C_s^i \varphi^{(i)}(p) x^{s-i} e^{px}.$$

Но в соответствии с (11) при $s = \overline{0, m-1}$ и $p = p_1$ правая часть этого равенства тождественно равна нулю. Следовательно,

$$L\left(x^s e^{p_1 x}\right) \equiv 0, \ s = \overline{0, m-1}.$$

Это и означает, что функции (10) являются решениями уравнения (6).

Можно показать, что, заменив в системе функций (9) каждую группу решений, соответствующую какому-либо кратному корню характеристического уравнения, группой функций вида (10), мы получим в результате фундаментальную систему решений однородного уравнения.

Пример 2. *Решить уравнение* $y''' - 7y'' + 16y' - 12y = 0$.

Решение. Составим характеристическое уравнение:

$$p^3 - 7p^2 + 16p - 12 = 0.$$

Преобразуем его:

$$(p^3 - 3p^2) - 4(p^2 - 3p) + 4(p-3) = 0, \ p^2(p-3) - 4p(p-3) + 4(p-3) = 0,$$
$$(p-3)(p^2 - 4p + 4) = 0, \ (p-3)(p-2)^2 = 0.$$

Видим, что корнями являются $p_1 = 3$, и двукратный корень $p_2 = 2$. Им соответствуют решения дифференциального уравнения $y_1 = e^{3x}$, $y_2 = e^{2x}$, $y_3 = e^{2x}$, причем, последние два решения линейно зависимы. Согласно теории заменим их решениями $z_1 = e^{2x}$, $z_2 = xe^{2x}$. Эти функции в совокупности с функцией y_1 образуют фундаментальную систему решений заданного уравнения $y_1 = e^{3x}$, $z_1 = e^{2x}$, $z_2 = xe^{2x}$. Поэтому его общее решение имеет вид

$$y(x) = C_1 e^{3x} + (C_2 + C_3 x) e^{2x}.$$

3.3 Комплексные различные корни

Предположим, что, корни характеристического уравнения все различны, но среди них есть, по крайней мере, один комплексный. Линейная независимость решений (9) доказывается так же, как в случае действительных различных корней. Без ограничения общности пусть комплексным корнем будет $p_1 = a + jb$. Среди корней характеристического уравнения тогда обязательно найдется комплексно сопряженный ему корень, которым будем считать, опять же без ограничения общности, корень $p_2 = a - jb$.

Решения y_1 и y_2, соответствующие этим корням, как уже было сказано, линейно независимы. Представим их в виде

$$y_1 = e^{(a+jb)x} = e^{ax}\left(\cos bx + j \sin bx\right), \ y_2 = e^{(a-jb)x} = e^{ax}\left(\cos bx - j \sin bx\right).$$

Сложим эти равенства, и разделим на 2 обе части полученного равенства:

$$e^{ax}\cos bx = \frac{1}{2}\left(y_1 + y_2\right) = z_1.$$

Вычитая те же равенства и деля их на $2j$, находим, что

$$e^{ax}\sin bx = \frac{1}{2j}\left(y_1 - y_2\right) = z_2.$$

Мы видим, что функции z_1 и z_2 являются линейными комбинациями решений y_1 и y_2, а, значит, сами являются решениями уравнения (6). При этом функции z_1 и z_2 линейно независимы, так как их зависимость означала бы возможность равенства $z_1 = \alpha z_2$, или $z_1/z_2 = \operatorname{ctg} bx = \alpha \equiv \mathrm{const}$, что невозможно.

Система функций

$$z_1, z_2, y_3, \ldots, y_n \tag{12}$$

линейно независима. Действительно, составим линейную комбинацию

$$\begin{aligned}\alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 + \alpha_3 y_3 + \ldots + \alpha_n y_n &= \\ = \alpha_1 \frac{y_1 + y_2}{2} + \alpha_2 \frac{y_1 - y_2}{2j} + \alpha_3 y_3 + \ldots + \alpha_n y_n &= \\ = \left(\frac{\alpha_1}{2} + \frac{\alpha_2}{2j}\right) y_1 + \left(\frac{\alpha_1}{2} - \frac{\alpha_2}{2j}\right) y_2 + \alpha_3 y_3 + \ldots + \alpha_n y_n &\end{aligned}$$

и приравняем ее к нулю. Так как функции $y_1, \ldots, y_n$ линейно независимы, то коэффициенты этой линейной комбинации должны равняться нулю:

$$\frac{\alpha_1}{2} + \frac{\alpha_2}{2j} = 0,\ \frac{\alpha_1}{2} - \frac{\alpha_2}{2j} = 0,\ \alpha_3 = 0, \ldots, \alpha_n = 0.$$

Главный определитель однородной системы из первых двух уравнений

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2j} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2j} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2j} \neq 0,$$

поэтому имеем единственное решение $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$. Итак, линейная комбинация функций (12) равна нулю только при нулевых коэффициентах, значит, эта система функций линейно независима.

Поступая описанным выше способом с каждым комплексным корнем характеристического уравнения, в конце концов придем к фундаментальной системе решений уравнения (6), состоящей только из действительных функций.

Пример 3. *Решить уравнение* $y''' - 3y'' + 9y' + 13y = 0$.

Решение. Составим характеристическое уравнение:

$$p^3 - 3p^2 + 9p + 13 = 0.$$

Преобразуем его:

$$(p^3+p^2)-4(p^2+p)+13(p+1)=0,\ p^2(p+1)-4p(p+1)+13(p+1)=0,$$
$$(p+1)(p^2-4p+13)=0.$$

Корнями уравнения являются $p_1=-1$, $p_2=2+3j$, $p_3=2-3j$. Им соответствуют решения дифференциального уравнения $y_1=e^{-x}$, $y_2=e^{(2+3j)x}$, $y_2=e^{(2-3j)x}$, причем, последние два комплексны. Согласно теории заменим их решениями $z_1=e^{2x}\cos 3x$ и $z_2=e^{2x}\sin 3x$. Эти функции в совокупности с функцией y_1 образуют фундаментальную систему решений заданного уравнения. Поэтому его общее решение имеет вид

$$y(x)=C_1e^{-x}+(C_2\cos 3x+C_3\sin 3x)e^{2x}.$$

3.4 Комплексные кратные корни

Пусть среди корней характеристического уравнения имеется комплексный корень $a+jb$ кратности m. Тогда имеется и комплексно-сопряженный ему корень $a-jb$ той же кратности. Так как в доказательствах, проведенных в п. «Действительные кратные корни», комплексность корней $p_1,\ldots,p_n$ никак не использовалась, то можно утверждать, что корню $a+jb$ соответствует m решений однородного уравнения:

$$e^{(a+jb)x}, xe^{(a+jb)x},\ldots,x^{m-1}e^{(a+jb)x}, \tag{13}$$

а корню $a-jb$ – еще m решений:

$$e^{(a-b)x}, xe^{(a-jb)x},\ldots,x^{m-1}e^{(a-jb)x}, \tag{14}$$

причем, эти решения вместе с решениями y_{2m+1}, ..., y_n, соответствующими другим корням характеристического уравнения, образуют систему линейно-независимых решений. Выделив в системе решений (13) действительные и мнимые части, получим $2m$ новых функций

$$\begin{aligned}&e^{ax}\cos bx, xe^{ax}\cos bx,\ldots,x^{m-1}e^{ax}\cos bx,\\&e^{ax}\sin bx, xe^{ax}\sin bx,\ldots,x^{m-1}e^{ax}\sin bx.\end{aligned} \tag{15}$$

Эти функции являются решениями однородного уравнения как линейные комбинации решений (13) и (14), получаемые по формулам Эйлера. Они представляют собой линейно-независимые решения. Действительно, составим линейную комбинацию из новых функций и функций $y_{2m+1},\ldots,y_n$ и приравняем ее нулю:

$$\sum_{i=0}^{m-1}\alpha_i x^i e^{ax}\cos bx+\sum_{i=0}^{m-1}\beta_i x^i e^{ax}\sin bx+\sum_{i=2m+1}^{n}\gamma_i y_i=$$

$$= e^{ax}\left(\sum_{i=0}^{m-1}\alpha_i x^i\frac{e^{bjx}+e^{-bjx}}{2}+\sum_{i=0}^{m-1}\beta_i x^i\frac{e^{bjx}-e^{-bjx}}{2j}\right)+\sum_{i=2m+1}^{n}\gamma_i y_i =$$

$$= \sum_{i=0}^{m-1}\left(\frac{\alpha_i}{2}+\frac{\beta_i}{2j}\right)x^i e^{(a+bj)x}+\sum_{i=0}^{m-1}\left(\frac{\alpha_i}{2}-\frac{\beta_i}{2j}\right)x^i e^{(a-bj)x}+\sum_{i=2m+1}^{n}\gamma_i y_i = 0.$$

Так как функции, входящие в последнее выражение для линейной комбинации, линейно-независимы, то все ее коэффициенты должны равняться нулю:

$$\frac{\alpha_i}{2}+\frac{\beta_i}{2j}=0,\ \frac{\alpha_i}{2}-\frac{\beta_i}{2j}=0,\ i=\overline{0,m-1};\ \gamma_i=0,\ i=\overline{2m+1,n}.$$

Как мы выяснили в предыдущем п., такие системы для пар неизвестных (α_i,β_i) дают единственные решения $\alpha_i=\beta_i=0$. Это доказывает линейную независимость системы решений, составленной из функций (15) и функций $y_{2m+1},\ldots,$ y_n.

Таким образом можно избавиться от всех комплексных решений, соответствующих кратным комплексным корням, и получить фундаментальную систему решений, состоящую только из вещественных функций.

Пример 4. *Решить уравнение* $y^{(5)}-y^{(4)}+8y'''-8y''+16y'-16y=0.$

Решение. Составим характеристическое уравнение:

$$p^5-p^4+8p^3-8p^2+16p-16=0,$$
$$p^4(p-1)+8p^2(p-1)+16(p-1)=0,\ (p-1)(p^4+8p^2+16)=0,$$
$$(p-1)(p^2+4)^2=0.$$

Корнями уравнения являются $p_1=1$, $p_{2,3}=2j$, $p_{4,5}=-2j$. Им соответствуют решения дифференциального уравнения $y_1=e^x$, $y_{2,3}=e^{2jx}$, $y_{4,5}=e^{-2jx}$. Заменив решения, соответствующие кратным корням, решениями вида (13) и (14), получим новую систему решений $y_1=e^x$, $y_2=e^{2jx}$, $s_3=xe^{2jx}$, $y_4=e^{-2jx}$, $s_5=xe^{-2jx}$. Остается перейти к решениям (15), чтобы получить фундаментальную систему решений из действительных функций: $y_1=e^x$, $z_2=\cos 2x$, $z_3=x\cos 2x$, $z_4=\sin 2x$, $z_5=x\sin 2x$. Общее решение заданного уравнения имеет вид

$$y(x)=C_1e^x+(C_2+C_3x)\cos 2x+(C_4+C_5x)\sin 2x.$$

□

Изложенные методы решения линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами успешно применяются для решения задач электро- и радиотехники[1)].

В Приложении также показано применение системы *Mathematica* к решению рассматриваемого типа уравнений[2)].

Приложение

[1)] Применим рассмотренные методы решения дифференциальных уравнений к анализу процессов, происходящих в колебательном контуре, изображенном на рис. 1.

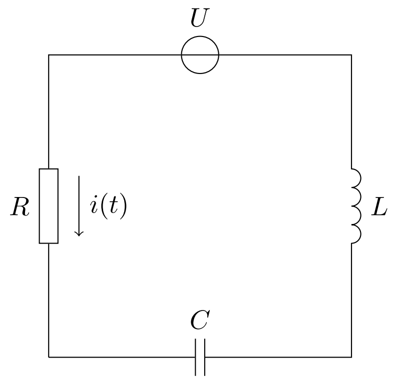

Рис. 1. RLC-контур.

По сравнению с изученными ранее контурами, данный контур содержит не два, а три вида элементов: резистор R, индуктивность L и емкость C. Входное напряжение $u(t)$ теперь должно равняться сумме трех падений напряжений: на резисторе, $u_R = Ri$; на индуктивности, $u_L = L\frac{di}{dt}$; на емкости, $u_C = \frac{q}{C}$, где i — ток в контуре, q — заряд конденсатора. Получаем уравнение

$$L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{q}{C} = u(t).$$

Продифференцируем это уравнение по t, учитывая, что $\frac{dq}{dt} = i$:

$$L\frac{d^2i}{dt^2} + R\frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = \frac{du}{dt}.$$

Приходим к уравнению, которое называется ***уравнением электрических колебаний***:

$$\boxed{\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{R}{L}\cdot\frac{di}{dt} + \frac{1}{LC}\,i = \frac{1}{L}\cdot\frac{du}{dt}.} \qquad (\Pi1)$$

Мы видим, что это — линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Пока что мы умеем решать лишь однородные уравнения такого типа. Однородное уравнение получается из уравнения (П1) при постоянном входном напряжении: $u(t) \equiv U = \mathrm{const}$, имеет вид

$$\boxed{\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{R}{L}\cdot\frac{di}{dt} + \frac{1}{LC}\,i = 0} \qquad (\Pi2)$$

и называется ***уравнением свободных колебаний***. Очевидно, его тривиальным решением будет функция $i(t) \equiv 0$. Начальные условия задают ток и скорость его изменения в момент времени t_0:

$$i(t_0) = i_0, \ \ \frac{di\,(t_0)}{dt} = i_0'. \qquad (\Pi3)$$

Составим характеристическое уравнение для уравнения (П2):

$$p^2 + \frac{R}{L}p + \frac{1}{LC} = 0. \tag{П4}$$

Его дискриминант $D = \frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}$ может быть положительным или отрицательным числом, или нулем. В зависимости от этого в контуре могут наблюдаться качественно различные явления. Рассмотрим все случаи.

Отсутствие колебаний. Быстрое затухание

Пусть $D > 0$. В этом случае корни характеристического уравнения (П4) действительны и различны:

$$p_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}} = -\alpha \pm \overline{\beta},$$

где $\alpha = \frac{R}{2L} > 0, \overline{\beta} = \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}} > 0$. Отметим, что оба корня отрицательны:

$$p_{1,2} < 0 \Longleftrightarrow -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}} < 0 \Longleftrightarrow \pm\sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}} < \frac{R}{2L} \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow \frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC} < \frac{R^2}{4L^2} \Longleftrightarrow \frac{1}{LC} > 0.$$

Общее решение уравнения имеет вид

$$i(t) = C_1 e^{p_1 t} + C_2 e^{p_2 t}. \tag{П5}$$

Найдем частное решение, удовлетворяющее начальным условиям (П3). Для этого сначала продифференцируем общее решение:

$$i'(t) = C_1 p_1 e^{p_1 t} + p_2 C_2 e^{p_2 t}.$$

Теперь используем начальные условия:

$$i(t_0) = C_1 e^{p_1 t_0} + C_2 e^{p_2 t_0} = i_0,$$
$$\frac{di(t_0)}{dt} = C_1 p_1 e^{p_1 t_0} + C_2 p_2 e^{p_2 t_0} = i'_0.$$

Решим полученную систему относительно неизвестных C_1 и C_2 по правилу Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} e^{p_1 t_0} & e^{p_2 t_0} \\ p_1 e^{p_1 t_0} & p_2 e^{p_2 t_0} \end{vmatrix} = (p_2 - p_1)\, e^{(p_1+p_2)t_0},$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} i_0 & e^{p_2 t_0} \\ i'_0 & p_2 e^{p_2 t_0} \end{vmatrix} = (i_0 p_2 - i'_0) e^{p_2 t_0},$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} e^{p_1 t_0} & i_0 \\ p_1 e^{p_1 t_0} & i'_0 \end{vmatrix} = (i'_0 - i_0 p_1) e^{p_1 t_0},$$

$$C_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{i_0 p_2 - i'_0}{p_2 - p_1}\, e^{-p_1 t_0},\ C_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{i'_0 - i_0 p_1}{p_2 - p_1}\, e^{-p_2 t_0}.$$

Подставим эти значения произвольных постоянных в общее решение (П5) и получим искомое частное решение:

$$\boxed{i(t) = \frac{i_0 p_2 - i'_0}{p_2 - p_1}\, e^{p_1(t-t_0)} + \frac{i'_0 - i_0 p_1}{p_2 - p_1}\, e^{p_2(t-t_0)}}$$

Из-за отрицательности p_1 и p_2 ток с течением времени быстро («экспоненциально») стремится к нулю. Колебания не наблюдаются, потому что сопротивление R велико, т.е. $R^2 > 4L/C$, так как $\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC} > 0$ в силу положительности дискриминанта.

На рис. 2 с помощью анимации показано влияние параметров контура на протекающие в нем процессы. Щелкая на рис. мышкой или пользуясь медиаплеером, можно просмотреть три клипа. Первый из них демонстрирует, как изменяется форма графика тока при увеличении дискриминанта $D > 0$. На остальных двух клипах можно видеть влияние начальных условий на ток в контуре. Полезно также понаблюдать анимацию в пошаговом режиме.

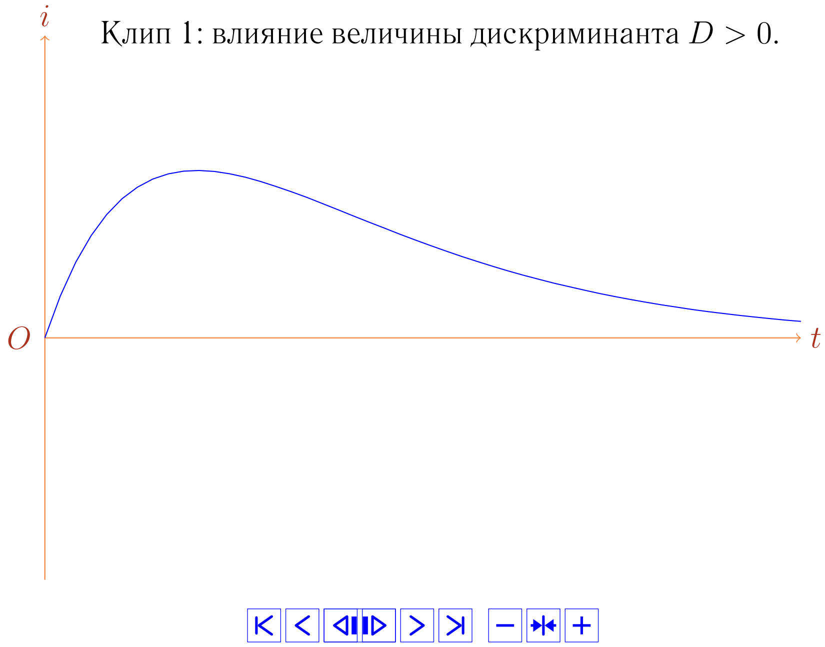

Рис. 2. Отсутствие колебаний: $D > 0$.

Отсутствие колебаний. Медленное затухание

Пусть $D = 0$. Характеристическое уравнение (П4) имеет двукратный корень
$$p_{1,2} = -\frac{R}{2L} = -\alpha < 0.$$
В соответствии с теорией данного типа уравнений общее решение имеет вид
$$i(t) = (C_1 + C_2 t)\, e^{-\alpha t}. \tag{П6}$$
Найдем частное решение, удовлетворяющее начальным условиям (П3). Продифференцируем общее решение:
$$i'(t) = C_2 e^{-\alpha t} - \alpha\,(C_1 + C_2 t)\, e^{-\alpha t}.$$
Используем начальные условия:
$$i(t_0) = (C_1 + C_2 t_0)\, e^{-\alpha t_0} = i_0,$$
$$\frac{di(t_0)}{dt} = C_2 e^{-\alpha t_0} - \alpha\,(C_1 + C_2 t_0)\, e^{-\alpha t_0} = i_0'.$$
Решим полученную систем по правилу Крамера:
$$\Delta = \begin{vmatrix} e^{-\alpha t_0} & t_0 e^{-\alpha t_0} \\ -\alpha e^{-\alpha t_0} & (1 - \alpha t_0)\, e^{-\alpha t_0} \end{vmatrix} = e^{-2\alpha t_0},$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} i_0 & t_0 e^{-\alpha t_0} \\ i'_0 & (1-\alpha t_0)\, e^{-\alpha t_0} \end{vmatrix} = \left[i_0\,(1-\alpha t_0) - i'_0 t_0 \right] e^{-\alpha t_0},$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} e^{-\alpha t_0} & i_0 \\ -\alpha e^{-\alpha t_0} & i'_0 \end{vmatrix} = (i'_0 + \alpha i_0) e^{-\alpha t_0},$$

$$C_1 = \left[i_0\,(1-\alpha t_0) - i'_0 t_0 \right] e^{\alpha t_0},\ C_2 = (i'_0 + \alpha i_0) e^{\alpha t_0}.$$

Подставим эти значения произвольных постоянных в общее решение (П6) и получим искомое частное решение:

$$\boxed{i(t) = \left[i_0\,(1-\alpha t_0) - i'_0 t_0 + (i'_0 + \alpha i_0) t \right] e^{-\alpha(t-t_0)}}$$

И в данном случае колебания отсутствуют, так как сопротивление R все еще велико: $D = 0 \iff R^2 = 4L/C$. Однако затуханию тока некоторое время препятствует его наличие в качестве множителя перед экспонентой — ток стремится к нулю не так быстро, как в предыдущем случае.

Рис. 3 в анимационном режиме демонстрирует влияние параметра α и начальных условий на форму графика тока.

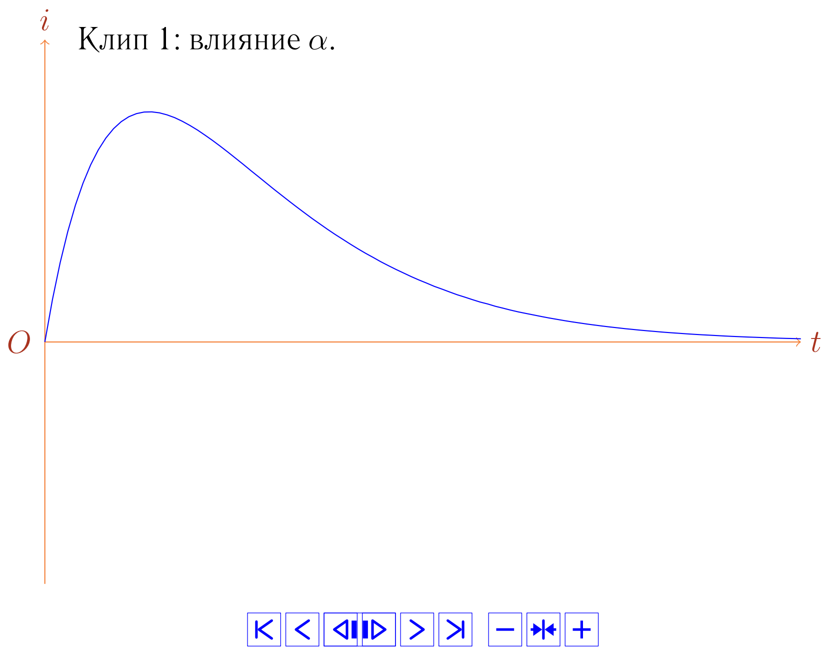

Рис. 3. Отсутствие колебаний: $D = 0$.

Свободные колебания

Пусть, наконец, $D < 0$. Характеристическое уравнение (П4) имеет комплексно-сопряженные корни:

$$p_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm j\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} = -\alpha \pm j\beta,$$

где $\beta = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} > 0$. Следовательно, общее решение уравнения имеет вид

$$i(t) = (C_1 \cos\beta t + C_2 \sin\beta t)\, e^{-\alpha t}. \qquad \text{(П7)}$$

Найдем частное решение, удовлетворяющее начальным условиям (П3). Продифференцируем общее решение:

$$i'(t) = (-\beta C_1 \sin \beta t + \beta C_2 \cos \beta t)\, e^{-\alpha t} - \alpha (C_1 \cos \beta t + C_2 \sin \beta t)\, e^{-\alpha t} =$$
$$= -(\beta \sin \beta t + \alpha \cos \beta t)\, C_1 e^{-\alpha t} + \left(\beta \cos \beta t e^{-\alpha t} - \alpha \sin \beta t\right) C_2 e^{-\alpha t}.$$

Используем начальные условия:

$$i(t_0) = (C_1 \cos \beta t_0 + C_2 \sin \beta t_0)\, e^{-\alpha t_0} = i_0,$$
$$\frac{di(t_0)}{dt} = -(\beta \sin \beta t_0 + \alpha \cos \beta t_0)\, C_1 e^{-\alpha t_0} + (\beta \cos \beta t_0 - \alpha \sin \beta t_0)\, C_2 e^{-\alpha t_0} = i_0'.$$

Решим полученную систему по правилу Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cos \beta t_0 e^{-\alpha t_0} & \sin \beta t_0 e^{-\alpha t_0} \\ -(\beta \sin \beta t_0 + \alpha \cos \beta t_0)\, e^{-\alpha t_0} & (\beta \cos \beta t_0 - \alpha \sin \beta t_0)\, e^{-\alpha t_0} \end{vmatrix} =$$
$$= \left(\beta \cos^2 \beta t_0 + \beta \sin^2 \beta t_0\right) e^{-2\alpha t_0} = \beta e^{-2\alpha t_0},$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} i_0 & \sin \beta t_0 e^{-\alpha t_0} \\ i_0' & (\beta \cos \beta t_0 - \alpha \sin \beta t_0)\, e^{-\alpha t_0} \end{vmatrix} = \left[\beta i_0 \cos \beta t_0 - (i_0 \alpha + i_0') \sin \beta t_0\right] e^{-\alpha t_0},$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \cos \beta t_0 e^{-\alpha t_0} & i_0 \\ -(\beta \sin \beta t_0 + \alpha \cos \beta t_0)\, e^{-\alpha t_0} & i_0' \end{vmatrix} = \left[\beta i_0 \sin \beta t_0 + (i_0 \alpha + i_0') \cos \beta t_0\right] e^{-\alpha t_0},$$

$$C_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \left(i_0 \cos \beta t_0 - \frac{i_0 \alpha + i_0'}{\beta} \sin \beta t_0\right) e^{\alpha t_0},$$

$$C_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \left(i_0 \sin \beta t_0 + \frac{i_0 \alpha + i_0'}{\beta} \cos \beta t_0\right) e^{\alpha t_0}.$$

Подставим эти значения произвольных постоянных в общее решение (П7) и получим искомое частное решение:

$$i(t) = \left[\left(i_0 \cos \beta t_0 - \frac{i_0 \alpha + i_0'}{\beta} \sin \beta t_0\right) \cos \beta t + \right.$$
$$\left. + \left(i_0 \sin \beta t_0 + \frac{i_0 \alpha + i_0'}{\beta} \cos \beta t_0\right) \sin \beta t\right] e^{-\alpha (t - t_0)}.$$

Произведем тригонометрические преобразования:

$$i(t) = \left[i_0 \cos \beta (t - t_0) + \frac{i_0 \alpha + i_0'}{\beta} \sin \beta (t - t_0)\right] e^{-\alpha (t - t_0)}.$$

Обозначим $A = \sqrt{i_0^2 + (i_0 \alpha + i_0')^2 / \beta^2}$, $\sin \psi = i_0 / A$, $\cos \psi = (i_0 \alpha + i_0') / (\beta A)$ и еще упростим выражение для тока:

$$\boxed{i(t) = A \sin\left[\beta (t - t_0) + \psi\right] e^{-\alpha (t - t_0)}}$$

Это и есть формула электрических колебаний в контуре. Величина A называется ***амплитудой*** колебаний, β – их ***частотой***, ψ – ***начальной фазой***. Если $R \neq 0$, то $\alpha \neq 0$ и колебания называются ***затухающими***.

Если $R = 0$, то $\alpha = 0$, и формула для тока принимает вид

$$\boxed{i(t) = A \sin\left[\beta (t - t_0) + \psi\right].}$$

В этом случае колебания называются ***гармоническими*** (они не затухают), а величина $\beta = 1/\sqrt{LC}$ называется ***собственной частотой контура***.

Гармонические колебания показаны на заставке рис. 4. Щелкнув по нему мышкой можно увидеть, как увеличение параметра α приводит к затуханию колебаний. Во втором клипе демонстрируется влияние параметра $\beta = 1/\sqrt{LC}$ на частоту и частично на амплитуду колебаний. Влияние начального условия i_0 показано в третьем клипе.

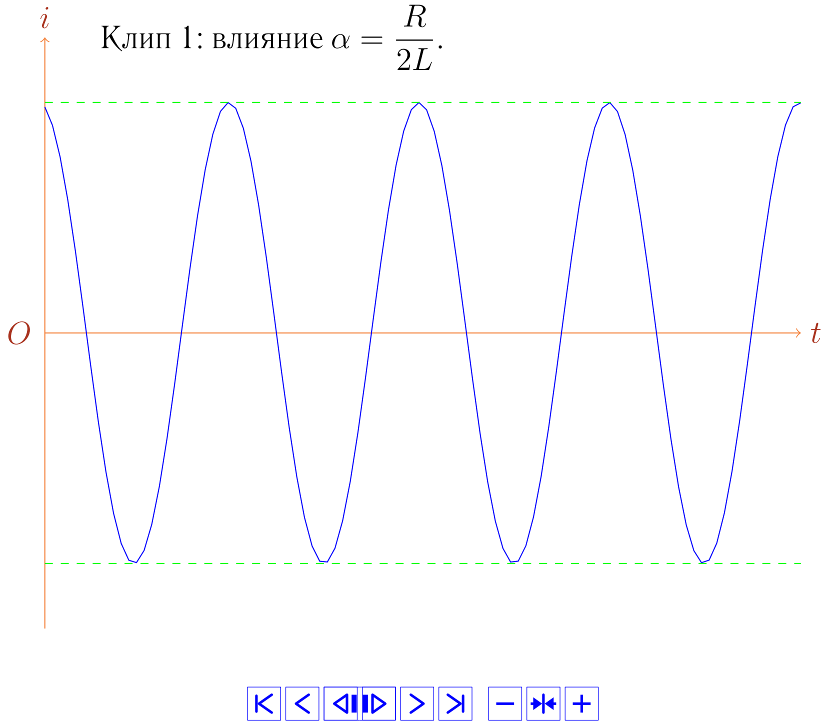

Рис. 4. Электрические колебания: $D < 0$.

Напоследок понаблюдайте с помощью анимации рис. 5, как неколебательный процесс в контуре превращается в колебательный и обратно при переходе дискриминанта D через 0.

[2)] Решение линейных однородных дифференциальных уравнений в системе *Mathematica* ничем не отличается от решения других дифференциальных уравнений. Соответствующие операторы и особенности применения системы были рассмотрены на лекции «Дифференциальные уравнения высших порядков». Поэтому сейчас мы только убедимся, что *Mathematica* легко решает примеры, разобранные на текущей лекции.

Первый пример:

```
DSolve[y'''[x] + 2y''[x] - y'[x] - 2y[x] == 0,y[x],x]
```

$\{\{y[x] \to e^{-2x} C[1] + e^{-x} C[2] + e^{x} C[3]\}\}$

Второй пример:

```
DSolve[y'''[x] - 7y''[x] + 16y'[x] - 12y[x] == 0,y[x],x]
```

$\{\{y[x] \to e^{2x} C[1] + e^{2x} x C[2] + e^{3x} C[3]\}\}$

Третий пример:

```
DSolve[y'''[x] - 3y''[x] + 9y'[x] + 13y[x] == 0,y[x],x]
```

$\{\{y[x] \to e^{-x} C[3] + e^{2x} C[2] \mathrm{Cos}[3x] + e^{2x} C[1] \mathrm{Sin}[3x]\}\}$

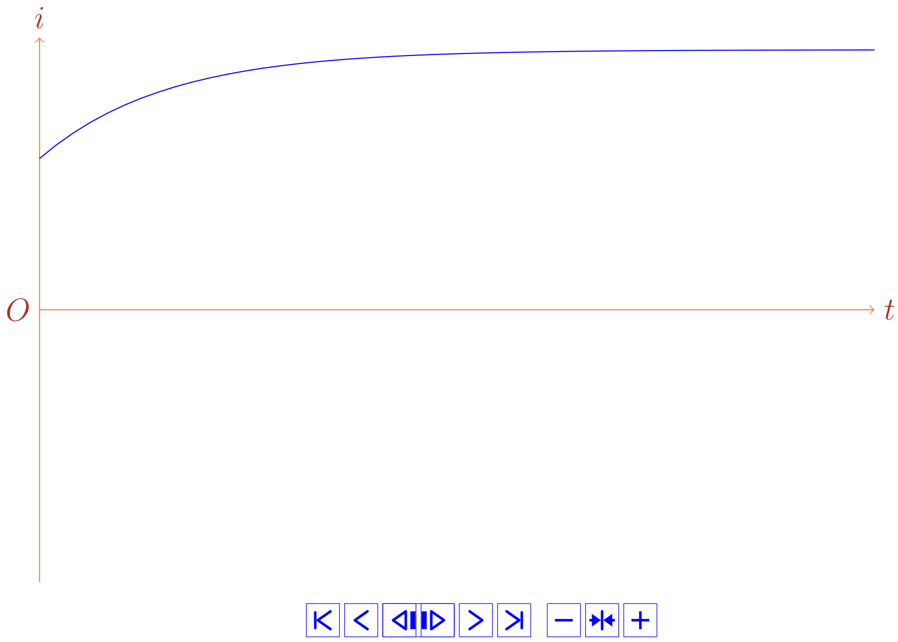

Рис. 5. Переход неколебательного режима в колебательный и обратно.

Четвертый пример:

```
DSolve[D[y[x],{x,5}] - D[y[x],{x,4}] + 8y'''[x] - 8y''[x] + 16y'[x]
    - 16y[x] == 0,y[x],x]
{{y[x] → e^x C[5] + C[1] Cos[2x] + x C[2] Cos[2x] + C[3] Sin[2x]
    + x C[4] Sin[2x]}}
```

Перейдем к примеру с колебательным контуром. Пусть вначале $D > 0$. Так как p_1 и p_2 — корни характеристического уравнения, то уравнение свободных колебаний можно записать как

$$i'' - (p_1 + p_2)i' + p_1p_2i = 0.$$

В таком виде и решим его в системе *Mathematica*, обозначив $i'(t_0) =$ `i1`:

```
DSolve[{i''[t] - (p1 + p2) i'[t] + p1 p2 i[t] == 0, i[t0] == i0,
    i'[t0] == i1}, i[t], t]
```

$$\left\{\left\{\mathtt{i[t]} \to \frac{e^{-p1\,t0-p2\,t0}\left(e^{p2\,t+p1\,t0}\,i1 - e^{p1\,t+p2\,t0}\,i1 - e^{p2\,t+p1\,t0}\,i0\,p1 + e^{p1\,t+p2\,t0}\,i0\,p2\right)}{-p1+p2}\right\}\right\}$$

или после упрощения:

```
Simplify[%]
```

$$\left\{\left\{\mathtt{i[t]} \to \frac{e^{-(p1+p2)\,t0}\left(e^{p2\,t+p1\,t0}(-i1 + i0\,p1) + e^{p1\,t+p2\,t0}(i1 - i0\,p2)\right)}{p1-p2}\right\}\right\}$$

Далее нетрудно привести его к виду, полученному на лекции.

Если $D = 0$, уравнение можно записать так:

$$i'' + 2\alpha i' + \alpha^2 i = 0.$$

Решение системы *Mathematica* практически не отличается от нашего:

```
DSolve[{i''[t] + 2α i'[t] + α^2 i[t] == 0, i[t0] == i0, i'[t0] == i1}, i[t], t]
```

$\{\{\mathtt{i[t]} \to \mathtt{e}^{-\mathtt{t}\,\alpha+\mathtt{t0}\,\alpha}\ (\mathtt{i0} + \mathtt{i1\,t} - \mathtt{i1\,t0} + \mathtt{i0\,t}\,\alpha - \mathtt{i0\,t0}\,\alpha)\}\}$

Поскольку для $D < 0$ корни характеристического уравнения равны $p_{1,2} - \alpha \pm j\beta$, то уравнение свободных колебаний представим в виде:

$$i'' + 2\alpha i' + (\alpha^2 + \beta^2)i = 0.$$

Его решение *Mathematica* выдает в комплексной форме:

$\mathtt{DSolve[\{i''[t]} + 2\alpha\,\mathtt{i'[t]} + (\alpha^2+\beta^2)\,\mathtt{i[t]} == \mathtt{0,i[t0]} == \mathtt{i0,i'[t0]} == \mathtt{i1\},i[t],t]}$

$$\Big\{\Big\{\mathtt{i[t]} \to \frac{1}{2\beta}\mathtt{e}^{-\mathtt{t0}\,(-\alpha-\mathtt{I}\,\beta)-\mathtt{t0}\,(-\alpha+\mathtt{I}\,\beta)}\Big(-\mathtt{I}\,\mathtt{e}^{\mathtt{t0}\,(-\alpha-\mathtt{I}\,\beta)+\mathtt{t}\,(-\alpha+\mathtt{I}\,\beta)}\,\mathtt{i1} + \mathtt{I}\,\mathtt{e}^{\mathtt{t}\,(-\alpha-\mathtt{I}\,\beta)+\mathtt{t0}\,(-\alpha+\mathtt{I}\,\beta)}\,\mathtt{i1} - \mathtt{I}\,\mathtt{e}^{\mathtt{t0}\,(-\alpha-\mathtt{I}\,\beta)+\mathtt{t}\,(-\alpha+\mathtt{I}\,\beta)}\,\mathtt{i0}\,\alpha + \mathtt{I}\,\mathtt{e}^{\mathtt{t}\,(-\alpha-\mathtt{I}\,\beta)+\mathtt{t0}\,(-\alpha+\mathtt{I}\,\beta)}\,\mathtt{i0}\,\alpha + \mathtt{e}^{\mathtt{t0}\,(-\alpha-\mathtt{I}\,\beta)+\mathtt{t}\,(-\alpha+\mathtt{I}\,\beta)}\,\mathtt{i0}\,\beta + \mathtt{e}^{\mathtt{t}\,(-\alpha-\mathtt{I}\,\beta)+\mathtt{t0}\,(-\alpha+\mathtt{I}\,\beta)}\,\mathtt{i0}\,\beta\Big)\Big\}\Big\}$$

Выделим действительное решение:

$\mathtt{ComplexExpand[\%]}$

$$\Big\{\Big\{\mathtt{i[t]} \to \mathtt{e}^{-\mathtt{t}\,\alpha+\mathtt{t0}\,\alpha}\,\mathtt{i0\,Cos}[\mathtt{t}\,\beta - \mathtt{t0}\,\beta] + \frac{\mathtt{e}^{-\mathtt{t}\,\alpha+\mathtt{t0}\,\alpha}\,\mathtt{i1\,Sin}[\mathtt{t}\,\beta - \mathtt{t0}\,\beta]}{\beta} + \frac{\mathtt{e}^{-\mathtt{t}\,\alpha+\mathtt{t0}\,\alpha}\,\mathtt{i0}\,\alpha\,\mathtt{Sin}[\mathtt{t}\,\beta - \mathtt{t0}\,\beta]}{\beta}\Big\}\Big\}$$

и упростим его:

$\mathtt{Simplify[\%]}$

$$\Big\{\Big\{\mathtt{i[t]} \to \frac{1}{\beta}\mathtt{e}^{(-\mathtt{t}+\mathtt{t0})\alpha}(\mathtt{i0}\,\beta\,\mathtt{Cos}[(\mathtt{t}-\mathtt{t0})\beta] + (\mathtt{i1}+\mathtt{i0}\,\alpha)\,\mathtt{Sin}[(\mathtt{t}-\mathtt{t0})\beta])\Big\}\Big\}$$

Понятно, что это – тот же результат, что и полученный на лекции.

Литература

[1] Бугров Я.С., Никольский С.М. *Высшая математика. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного.* – М.: Наука, 1985, – с. 65-77.

[2] Письменный Д.Т. *Конспект лекций по высшей математике.* – М.: Рольф, 2000. Ч. 2. – с. 31-39.

[3] Федорюк М.В. *Обыкновенные дифференциальные уравнения.* – М.: Наука, 1985, 39-50, 185-187.