УКРАЇНСЬКА ДЕРЖАВНА АКАДЕМІЯ
ЗАЛІЗНИЧНОГО ТРАНСПОРТУ

ДОНЕЦЬКИЙ ІНСТИТУТ ЗАЛІЗНИЧНОГО ТРАНСПОРТУ

Кафедра вищої математики і фізики

Ю.М. ВОЛЧЕНКО

ЛІНІЙНІ ПРОСТОРИ ТА ЛІНІЙНІ ОПЕРАТОРИ

МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ
з дисципліини
«Вища математика»
для студентів спеціальності
«Автоматика та автоматизація на транспорті»

Донецьк

2003

Волченко Ю.М. Лінійні простори та лінійні оператори. Методичні рекомендації з дисципліни «Вища математика» – Донецьк: ДонІЗТ, 2003. – 80 с.

У компактному викладі подано теоретичний матеріал розділу «Елементи лінійної алгебри», необхідний для вивчення аналітичної геометрії, диференціальних рівнянь, теорії рядів і інших розділів вищої математики. Показано узагальнення деяких геометричних термінів на багатовимірні простори. Розглянуто застосування понять лінійного простору і лінійного оператора до розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь і зведенню рівнянь кривих і поверхонь другого порядку до канонічного виду. Виклад супроводжується прикладами.

Іл.: 6, табл.: 1, бібліогр.: 7 найм.

Методичні матеріали розглянуті й рекомендовані до друку на засіданні кафедри вищої математики і фізики 28 серпня 2003 р., протокол № 1.

Рецензенти:

Проф. О.О. Ігнатьєв,
доц. В.Я. Броді

Зміст

1 Лінійний простір

1.1 Означення і приклади

Лінійний простір є узагальненням поняття множини векторів (двовимірних або тривимірних). Необхідність такого узагальнення викликана тим фактом, що в багатьох розділах математики і прикладних наук велика кількість об'єктів має властивості векторів: їх можна дадавати, множити на число або один на одного, причому, ці операції мають такі ж властивості, що й аналогічні операції для векторів; для цих об'єктів можна вводити поняття лінійної незалежності і базиси. Таким чином, виникає можливість вивчити властивості зазначених об'єктів з єдиних позицій, не відволікаючи на їхні окремі особливості.

Для реалізації такого підходу насамперед треба вказати невелику кількість загальних властивостей векторів (які і роблять, власне, вектори тим, чим вони є), з яких випливають всі інші їхні властивості.

Множина об'єктів $\mathcal{L}$ називається ***лінійним простором***, а його елементи $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$ — ***векторами***, якщо в $\mathcal{L}$ означені дві операції над векторами:

1) перша операція ставить у відповідність будь-яким двом векторам $\mathbf{x}$ і $\mathbf{y}$ третій вектор, що називається їхньою ***сумою***і позначається $\mathbf{x}+\mathbf{y}$ (операція ***додавання*** векторів);

2) друга операція ставить у відповідність будь-якому вектору $\mathbf{x}$ і числу λ вектор, що називається ***добутком*** $\mathbf{x}$ на λ і позначається $\lambda\mathbf{x}$ (операція ***множення*** вектора на число); причому, ці операції задовольняють таким аксіомам:

1. $\mathbf{x}+\mathbf{y}=\mathbf{y}+\mathbf{x}$ (комутативність додавання).

2. $(\mathbf{x}+\mathbf{y})+\mathbf{z}=\mathbf{x}+(\mathbf{y}+\mathbf{z})$ (асоціативність додавання).

3. $\exists(\mathbf{o})\forall(\mathbf{x})\ \mathbf{x}+\mathbf{o}=\mathbf{x}$ (існування нульового вектора).

4. $\forall(\mathbf{x})\exists(-\mathbf{x})\ \mathbf{x}+(-\mathbf{x})=\mathbf{o}$ (існування вектора, протилежного вектору $\mathbf{x}$).

5. $1\cdot\mathbf{x}=\mathbf{x}$ (добуток одиниці на вектор не змінює останній).

6. $\lambda(\mu\mathbf{x})=(\lambda\mu)\mathbf{x}$ (асоціативність множення на число).

7. $\lambda(\mathbf{x}+\mathbf{y})=\lambda\mathbf{x}+\lambda\mathbf{y}$ (дистрибутивність множення на число відносно додавання векторів).

8. $(\lambda+\mu)\mathbf{x}=\lambda\mathbf{x}+\mu\mathbf{x}$ (дистрибутивність множення на число відносно додавання чисел).

Вектор $\mathbf{o}$ називається ***нульовим вектором***, вектор $-\mathbf{x}$ — вектором, ***протилежним*** вектору $\mathbf{x}$. Суму векторів $\mathbf{x}$ и $-\mathbf{y}$ будемо називати ***різницею векторів*** і позначати $\mathbf{x}-\mathbf{y}$.

Якщо числа, на які множаться вектори, дійсні, $\mathcal{L}$ назвемо ***дійсним*** лінійним простором; якщо ці числа комплексні, то — ***комплексним*** лінійним простором. Якщо буде передбачатися, що $\mathcal{L}$ може бути як дійсним, так і комплексним, то будемо його іменувати просто лінійним простором.

З введених аксіом дістаємо такі твердження.

1°. *Нульовий вектор — единий.*

Дійсно, припустимо, що існують два нульових вектори $\mathbf{o}_1$ і $\mathbf{o}_2$. Тоді по третій аксіомі $\mathbf{o}_1+\mathbf{o}_2=\mathbf{o}_1=\mathbf{o}_2$.

2°. *Вектор* $\mathbf{x}$ *має единий, протилежний йому, вектор* $-\mathbf{x}$.

Якщо припустити, що вектор $\mathbf{x}$ має два різних протилежних вектори $-\mathbf{x}_1$ і $-\mathbf{x}_2$, то по другій, третій і четвертій аксіомам буде виконуватись, що

$$(-\mathbf{x}_1)+\mathbf{x}+(-\mathbf{x}_2)=((-\mathbf{x}_1)+\mathbf{x})+(-\mathbf{x}_2)=\mathbf{o}+(-\mathbf{x}_2)=-\mathbf{x}_2,$$

і

$$(-\mathbf{x}_1)+\mathbf{x}+(-\mathbf{x}_2)=(-\mathbf{x}_1)+(\mathbf{x}+(-\mathbf{x}_2))=(-\mathbf{x}_1)+\mathbf{o}=-\mathbf{x}_1.$$

Виходить, що вектори $(-\mathbf{x}_1)$ і $(-\mathbf{x}_2)$ не можуть бути різними.

3°. *Вектор* $\mathbf{o}$ *є протилежним до самого себе.*

Виходить з того, що $\mathbf{o}+\mathbf{o}=\mathbf{o}$.

4°. *Вектор* $\mathbf{x}$ *протилежний вектору* $-\mathbf{x}$*:* $-(-\mathbf{x})=\mathbf{x}$.

Прямо виходить з першої та четвертої аксіом.

5°. *Справедлива рівність* $0\mathbf{x} = \mathbf{o}$.

Справді, $0\mathbf{x} = 0\mathbf{x} + \mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = (0+1)\mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = \mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = \mathbf{o}$.

6°. *Справедлива рівність* $(-1)\mathbf{x} = -\mathbf{x}$.

Дійсно, $(-1)\mathbf{x} + \mathbf{x} = (-1+1)\mathbf{x} = 0\mathbf{x} = \mathbf{o}$. Тому $(-1)\mathbf{x}$ є вектором протилежним вектору $\mathbf{x}$, а оскільки такий вектор за доведеним в 2 единий, то $(-1)\mathbf{x} = -\mathbf{x}$.

7°. *Добуток будь-якого числа на нульовий вектор дорівнює нульовому вектору:* $\lambda\mathbf{o} = \mathbf{o}$.

Випливає з ланцюжка рівностей: $\lambda\mathbf{o} = \lambda(\mathbf{x} - \mathbf{x}) = \lambda\mathbf{x} - \lambda\mathbf{x} = \mathbf{o}$.

8°. *Якщо* $\lambda\mathbf{x} = \mathbf{o}$, *то або* $\lambda = 0$, *або* $\mathbf{x} = \mathbf{o}$.

Нехай, наприклад, $\lambda \neq 0$. Помножимо рівність $\lambda\mathbf{x} = \mathbf{o}$ на λ^{-1}: $1\mathbf{x} = \mathbf{o}$, тобто $\mathbf{x} = \mathbf{o}$.

Розглянемо приклади векторних просторів, багато з яких мають важливе самостійне значення в різних розділах математики.

Приклад 1.1 (Звичайні вектори)**.** *Оскільки звичайні вектори, вивчені в розділі векторної алгебри, зі звичайними операціями додавання векторів і множення вектора на число задовольняють всім аксіомам лінійного простору, то множини векторів на площині й у просторі утворюють лінійні простори.*

Координатна форма запису векторів у двовимірному просторі має вигляд двійок чисел: (a_1, a_2); у тривимірному пространстве — трійок чисел: (a_1, a_2, a_3). Множина невідомих в алгебраїчному рівнянні, множина вільних членів у правих частинах системи алгебраїчних рівнянь, множина коефіцієнтів при невідомих у тому ж рівнянні такої системи можуть бути подані n числами: $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. За аналогією з двійками й трійками чисел такий запис будемо називати ***n-ми чисел***. Множина показників роботи підприємства; множина характеристик роботи транспорту; множина величин, що описують стан погоди, теж можуть бути записані у вигляді n-ок чисел.

Приклад 1.2 (Простір $\mathbf{R}^n$)**.** *Показати, що множина всіх n-ок чисел є лінійним простором.*

Розв'язання. Насамперед введемо операції додавання n-ок чисел (векторів) $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ і $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ в такому просторі:

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) = \\ = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n),$$

и множення n-ки чисел на число:

$$\lambda\mathbf{x} = \lambda(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n).$$

Якщо нульовим вектором вважати n-ку $\mathbf{o} = (0, 0, \ldots 0)$, а вектором, протилежним вектору $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, вектор $-\mathbf{x} = (-x_1, -x_2, \ldots, -x_n)$, то всі аксіоми лінійного простору будуть виконані. Наприклад, сьома аксіома:

$$\begin{aligned}\lambda(\mathbf{x} + \mathbf{y}) &= \lambda[(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n)] = \\ &= \lambda(x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n) = \\ &= (\lambda(x_1 + y_1), \lambda(x_2 + y_2), \ldots, \lambda(x_n + y_n)) = \\ &= (\lambda x_1 + \lambda y_1, \lambda x_2 + \lambda y_2, \ldots, \lambda x_n + \lambda y_n) = \\ &= \lambda(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \lambda(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \lambda\mathbf{x} + \lambda\mathbf{y}.\end{aligned}$$

Перевірку інших аксіом виконайте самостійно. Лінійний простір усіх n-ок чисел позначається $\mathbf{R}^n$. □

Розглянемо множину многочленів степеня не вище n-го:

$$P_n(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots + a_n t^n, \tag{1.1}$$

для яких додавання і множення на число означені звичайним чином:

$$\begin{aligned}P_n(t) + Q_n(t) &= (a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots + a_n t^n) + \\ &+ (b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \ldots + b_n t^n) = \\ &= (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)t + (a_2 + b_2)t^2 + \ldots + (a_n + b_n)t^n; \\ \lambda P_n(t) &= \lambda(a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots + a_n t^n) = \\ &= (\lambda a_0) + (\lambda a_1)t + (\lambda a_2)t^2 + \ldots + (\lambda a_n)t^n.\end{aligned}$$

Приклад 1.3. *Показати, що множина усіх многочленів степеня не вище n-го є лінійним простором.*

Розв'язання. Операції додавання многочленів і множення многочлена на число виконуються фактично над коефіцієнтами многочленів, тому кожний многочлен можна замінити m-ою чисел ($m = n + 1$) і виконувати відповідні дії над m-ками чисел. Але, як було показано, m-ки чисел утворюють лінійний простір, тому і множина многочленів степеня не вище n-го є лінійним простором. □

Приклад 1.4. *Якщо не обмежувати степінь многочлена деяким числом, то многочлен (1.1) уже не можна записати m-ою чисел, а тільки за допомогою нескінченного вектора $\mathbf{x} = (a_0, a_1, \ldots, a_n, 0, 0, \ldots)$. Чи буде множина всіх многочленів лінійним простором?*

Розв'язання. Введемо для таких векторів, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ і $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots)$, що є нескінченними послідовностями, операції додавання і множення на число:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} + \mathbf{y} &= (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) + (y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots) = \\ &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n, \ldots), \\ \lambda\mathbf{x} &= \lambda(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n, \ldots). \end{aligned} \tag{1.2}$$

Якщо нульовим вектором вибрати нескінченну послідовність нулів $\mathbf{o} = (0, 0, \ldots)$, а вектором, протилежним вектору $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$, вважати вектор $-\mathbf{x} = (-x_1, -x_2, \ldots, -x_n, \ldots)$, то так само, як і для n-ок чисел, неважко побачити, що всі аксіоми лінійного простору будуть виконані. Виходить, множина всіх многочленів теж є лінійним простором. □

Приклад 1.5. *Множина функцій виду $f(x)$, неперервних на відрізку $[a, b]$, безсумнівно, є лінійним простором зі звичайними операціями додавання функцій і множення функції на число. Нульовим вектором у цьому просторі можна вважати функцію, що тотожно дорівнює нулю на відрізку $[a, b]$, а вектором, протилежним функції $f(x)$, — функцію $-f(x)$.*

Приклад 1.6. *Множина матриць розміру $m \times n$ (з m рядків і n стовпців) утворює лінійний простір, причому додавання матриць і множення матриці на число означаються звичайним способом. Роль нульового вектора відіграє нульова матриця, а роль матриці, протилежної матриці A, — матриця $-A$. Очевидно, всі аксіоми лінійного простору виконуються.*

1.2 Лінійна незалежність

Важливим поняттям теорії лінійних просторів є поняття лінійної незалежності векторів, яке, взагалі говорячи, означає, що жоден ненульовий вектор з даної сукупності векторів не можна подати у вигляді суми добутків інших векторів на деякі числа. Така сума векторів $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ називається ***лінійною комбінацією векторів***:

$$\lambda_1 \mathbf{x}_1 + \lambda_2 \mathbf{x}_2 + \ldots + \lambda_n \mathbf{x}_n,$$

де $\lambda_2, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ — числа, що називаються ***коефіцієнтами лінійної комбінації***. Лінійна комбінація векторів називається ***тривіальною***, якщо всі її коефіцієнти дорівнюють нулю; у супротивному випадку вона називається ***нетривіальною***. Точне означення лінійної незалежності таке: вектори $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ називаються ***лінійно незалежними***, якщо тільки їх тривіальна лінійна комбінація дорівнює нульовому вектору. У протилежному випадку вони називаються ***лінійно залежними*** .

Якщо вектори лінійно залежні, знайдеться їх нетривіальна лінійна комбінація, що дорівнює нульовому вектору:

$$\lambda_1 \mathbf{x}_1 + \lambda_2 \mathbf{x}_2 + \ldots + \lambda_n \mathbf{x}_n = \mathbf{o}. \tag{1.3}$$

Це означає, що хоча б один з коефіцієнтів лінійної комбінації (наприклад, без утрати загальності, λ_1) не дорівнює нулю. Тоді вектор $\mathbf{x}_1$ можна виразити через інші вектори:

$$\mathbf{x}_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\mathbf{x}_1 - \ldots - \frac{\lambda_n}{\lambda_1}\mathbf{x}_n, \tag{1.4}$$

тобто подати його у вигляді лінійної комбінації векторів $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$. Якщо ж вектори лінійно незалежні, це зробити не вдасться, тому що в рівності (1.3) всі коефіцієнти лінійної комбінації дорівнюють нулю.

Нескінченна система векторів $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n, \ldots$ називається ***лінійно незалежною***, якщо будь-яка скінченна підсистема цих векторів лінійно незалежна. В протилежному випадку нескінченна система векторів називається ***лінійно залежною***.

Теорема 1.1. *Якщо серед векторів $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ є нульовий вектор, то вся система векторів лінійно залежна.*

Доведення. Нехай, наприклад, $\mathbf{x}_1 = \mathbf{o}$, тоді для нетривіальної лінійної комбінації дістаємо $1\mathbf{x}_1 + 0\mathbf{x}_2 \ldots + 0\mathbf{x}_n = \mathbf{o}$, що означає лінійну залежність векторів. □

Теорема 1.2. *Якщо серед векторів $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ деякі утворюють лінійно залежну систему, то і вся система $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ лінійно залежна.*

Доведення. Нехай вектори $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k$, $k < n$, лінійно залежні, тоді існує їхня нетривіальна лінійна комбінація $\lambda_1\mathbf{x}_1 + \ldots + \lambda_k\mathbf{x}_k$, що дорівнює нульовому вектору. Але тоді й нетривіальна лінійна комбінація $\lambda_1\mathbf{x}_1 + \ldots + \lambda_k\mathbf{x}_k + 0\mathbf{x}_{k+1} + \ldots + 0\mathbf{x}_n$ теж дорівнює нульовому вектору. Виходить, система векторів $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ лінійно залежна. □

Висновок 1.1. *Якщо вектори $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ лінійно незалежні, то й будь-яка їхня підсистема лінійно незалежна.*

Для звичайних векторів на площині в розділі векторної алгебри доводиться теорема про те, що будь-який вектор може бути поданий однозначно у вигляді лінійної комбінації двох неколінеарних векторів. З подальших тверджень буде випливати, що на площині будь-яка система з числа векторів, більшого двох, лінійно залежна.

Теорема 1.3. *Два вектори на площині лінійно залежні тоді й тільки тоді, коли вони колінеарні.*

Доведення. Якщо вектори $\mathbf{a}$ і $\mathbf{b}$ лінійно залежні, то існує нетривіальна лінійна комбінація $\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b} = \mathbf{o}$. Нехай, наприклад, $\mu \neq 0$, тоді $\mathbf{b} = -\frac{\lambda}{\mu}\mathbf{a}$. Виходить, вектори $\mathbf{a}$ і $\mathbf{b}$ колінеарні.

Навпаки, нехай вектори $\mathbf{a}$ і $\mathbf{b}$ колінеарні. Якщо вектор $\mathbf{a}$ нульовий, то вектори $\mathbf{a}$ і $\mathbf{b}$ лінійно залежні, і теорема доведена.

Якщо ж $\mathbf{a} \neq \mathbf{o}$, то, як було показано в розділі векторної алгебри, $\mathbf{b} = \lambda\mathbf{a}$, де λ — деяке число. Виходить, нетривіальна лінійна комбінація дорівнює нульовому вектору: $\lambda\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{o}$, і вектори $\mathbf{a}$ і $\mathbf{b}$ лінійно залежні. □

Висновок 1.2. *Два вектори на площині лінійно незалежні тоді й тільки тоді, коли вони неколінеарні.*

Так само для векторів у просторі доводилося, що будь-який вектор може бути поданий однозначно у вигляді лінійної комбінації трьох некомпланарних векторів. З доказуваних нижче теорем виходить, що в просторі будь-яка система з числа векторів, більшого трьох, лінійно залежна.

Теорема 1.4. *Три вектори в просторі лінійно залежні тоді й тільки тоді, коли вони компланарні.*

Доведення. Нехай вектори $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ і $\mathbf{c}$ лінійно залежні. Тоді один з них є лінійною комбінацією двох інших векторів (див. (1.4)): $\mathbf{c} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}$. Якщо $\mathbf{a}$ і $\mathbf{b}$ колінеарні, то після суміщення їх початків, вони опиняться на одній прямій, але тоді і вектор $\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}$ опиниться на тій самій прямій. Виходить, усі три вектори $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ і $\mathbf{c}$ будуть не тільки компланарні, але й колінеарні. Якщо ж вектори $\mathbf{a}$ і $\mathbf{b}$ неколінеарні, то після суміщення початків усіх трьох векторів вектори $\mathbf{a}$ і $\mathbf{b}$ не будуть розташовані на одній і тій самій прямій. Отже, через три точки — їхній спільний початок і кінці — можна буде провести площину. Тоді в цій площині будуть також розташовані вектори $\lambda\mathbf{a}$ і $\mu\mathbf{b}$, а також паралелограм, на них побудований. Але його діагональ саме буде вектором $\mathbf{c}$ (додавання векторів за правилом паралелограма). Виходить, усі три вектори $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ і $\mathbf{c}$ будуть розташовані в одній площині, що означає їхню компланарність.

Навпаки, нехай вектори $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ і $\mathbf{c}$ компланарні. Якщо які-небудь два з цих векторів колінеарні, то з попередньої теореми вони лінійно залежні, а тоді всі три вектори теж лінійно залежні за теоремою 1.2. Якщо ж ніякі два вектори не колінеарні, то за теоремою про розкладання на площині $\mathbf{c} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}$, або $\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b} - \mathbf{c} = \mathbf{o}$ і, отже, вектори $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ і $\mathbf{c}$ лінійно залежні. □

Висновок 1.3. *Три вектори в просторі лінійно незалежні тоді й тільки тоді, коли вони некомпланарні.*

Теорема 1.5. *В лінійному просторі $\mathbf{R}^n$ будь-які n векторів $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ лінійно незалежні тоді й тільки тоді, коли визначник Δ, складений з цих векторів, не дорівнює нулеві.*

Доведення. Припустимо, що вектори $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ лінійно незалежні. Тоді лінійна однорідна система рівнянь

$$\lambda_1\mathbf{x}_1 + \lambda_2\mathbf{x}_2 + \ldots + \lambda_n\mathbf{x}_n = \mathbf{o} \tag{1.5}$$

відносно невідомих $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ має єдиний розв'язок $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$, $\ldots$, $\lambda_n = 0$. Це означає, що її головний визначник $\Delta \neq 0$.

Навпаки, якщо цей визначник не дорівнює нулю, то система рівнянь (1.5) відносно невідомих $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ має єдиний розв'язок. Але один розв'язок завжди є: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$, $\ldots$, $\lambda_n = 0$. Отже, інших розв'язків бути не може, і вектори $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ лінійно незалежні. □

Теорема 1.6. *У лінійному просторі $\mathbf{R}^n$ будь-яка система з $(n+1)$-го вектора лінійно залежна.*

Доведення. Розглянемо систему векторів $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n, \mathbf{x}_{n+1}$. Якщо вектори $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ лінійно залежні, то за теоремою 1.2 лінійно залежні і вектори $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n, \mathbf{x}_{n+1}$, і теорема доведена.

Припустимо тепер, що вектори $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ лінійно незалежні і вектор $\mathbf{x}_{n+1} \neq \mathbf{o}$ (інакше вся система векторів лінійно залежна і теорема доведена). Тоді система рівнянь

$$\lambda_1 \mathbf{x}_1 + \lambda_2 \mathbf{x}_2 + \ldots + \lambda_n \mathbf{x}_n = \mathbf{x}_{n+1}$$

має єдиний розв'язок, тому що за попередньою теоремою її головний визначник не дорівнює нулю, причому, це рішення ненульове, бо інакше вектор $\mathbf{x}_{n+1}$ виявиться нульовим, що суперечить припущенню. Остання рівність означає лінійну залежність векторів $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n, \mathbf{x}_{n+1}$. □

У просторі многочленів степеня не вище n-го будь-який многочлен може бути поданий m-ою $(m = n + 1)$ своїх коефіцієнтів, тому відповідно до тільки що доведеної теореми система з $(n+1)$-го многочлена лінійно незалежна, якщо складений з відповідних m-ок визначник не дорівнює нулю. З цієї ж теореми випливає, що будь-які $n + 2$ многочлени лінійно залежні в цьому просторі. Зокрема , лінійно незалежною є система $\mathbf{x}_1 = 1$, $\mathbf{x}_2 = t$, $\mathbf{x}_3 = t^2, \ldots,$ $\mathbf{x}_n = t^n$, оскільки їй відповідають m-ки, що утворюють визначник

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Лінійна незалежність цієї системи випливає також з того, що многочлен $\lambda_0 + \lambda_1 t + \lambda_2 t^2 + \ldots + \lambda_n t^n$ може дорівнювати нулю лише тоді, коли всі його коефіцієнти дорівнюють нулю.

У просторі всіх многочленів існує нескінченна лінійно незалежна система векторів $\mathbf{x}_1 = 1$, $\mathbf{x}_2 = t$, $\mathbf{x}_3 = t^2$, $\ldots$, $\mathbf{x}_n = t^n, \ldots$. Дійсно, будь-яка скінченна підсистема таких векторів має вигляд $\mathbf{x}_k = t^\alpha$, $\mathbf{x}_l = t^\beta$, $\ldots$, $\mathbf{x}_s = t^\gamma$, де всі показники α, β, $\ldots$, γ різні і належать розширеній множині натуральних чисел $N_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$. Нехай $\xi = \max(\alpha, \beta, \ldots, \gamma)$. Як було показано, система векторів $\mathbf{x}_1 = 1$, $\mathbf{x}_2 = t$, $\mathbf{x}_3 = t^2$, $\ldots$, $\mathbf{x}_\xi = t^\xi$ лінійно незалежна, а тоді лінійно незалежна і система векторів $\mathbf{x}_k = t^\alpha$, $\mathbf{x}_l = t^\beta$, $\ldots$, $\mathbf{x}_s = t^\gamma$ (висновок 1.1).

Оскільки многочлени $\mathbf{x}_1 = 1$, $\mathbf{x}_2 = t$, $\mathbf{x}_3 = t^2, \ldots, \mathbf{x}_n = t^n, \ldots$ неперервні, то вони дають приклад лінійно-незалежної системи векторів і в просторі всіх неперервних функцій.

У просторі всіх матриць розміру $m \times n$ лінійно незалежну систему з mn векторів утворюють матриці $\mathbf{A}_{ij}$, в яких елемент $a_{ij} = 1$, а інші елементи дорівнюють нулю. Справді,

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\lambda_{ij}\mathbf{A}_{ij} = \mathbf{O}$$

($\mathbf{O}$ — нульова матриця), якщо тільки всі $\lambda_{ij} = 0$. При цьому для будь-якої матриці $\mathbf{A}$ розміру $m \times n$ справедлива рівність

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\mathbf{A}_{ij},$$

яке означає, що система з $mn + 1$ матриці вже буде лінійно залежною.

1.3 Базис

Базиси дозволяють записувати вектори лінійного простору в компонентній (координатній) формі так само, як записуються звичайні вектори.

Базисом у лінійному просторі називається скінченна упорядкована система лінійно незалежних векторів, яка має таку властивість, що будь-який вектор лінійного простору є їхньою лінійною комбінацією.

Базис з n векторів будемо позначати $< \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n >$, а вектори $\mathbf{e}_i$ називати базисними. Якщо базис існує, лінійний простір називається ***скінченновимірним*** (**n-*вимірним***), а число n — ***вимірністю*** простору. Якщо ж для будь-якого n у лінійному просторі існує система з n лінійно незалежних векторів, то лінійний простір називається ***нескінченновимірним***.

В n-вимірному просторі будь-який вектор можна записати у вигляді лінійної комбінації векторів базису, що називається ***розкладом вектора за базисом***, а коефіцієнти лінійної комбінації — ***коефіцієнтами розкладу***:

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + \dots + x_n\mathbf{e}_n = [\mathbf{x}]^T[\mathbf{e}].$$

Числа x_1, ..., x_n називаються ***компонентами*** або ***координатами*** вектора $\mathbf{x}$, а запис $[\mathbf{x}]$, $[\mathbf{x}]_\mathbf{e}$ означає зображення компонентів вектора у вигляді матриці розміру $n \times 1$, тобто у вигляді вектора-стовпця (з додаванням позначення базису, якщо це істотно):

$$[\mathbf{x}] = \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Базис будемо записувати в такий же спосіб:

$$[\mathbf{e}] = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \cdots \\ \mathbf{e}_n \end{pmatrix}.$$

Тоді вираз $[\mathbf{x}]^T[\mathbf{e}]$ — це просто множення двох матриць:

$$[\mathbf{x}]^T[\mathbf{e}] = (x_1, \ldots, x_n) \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \cdots \\ \mathbf{e}_n \end{pmatrix} = x_1\mathbf{e}_1 + \ldots + x_n\mathbf{e}_n.$$

Теорема 1.7. *Координати вектора в n-вимірному просторі визначаютьcя однозначно.*

Доведення. Припустимо, що вектор має два розклади за базисом:

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + \ldots + x_n\mathbf{e}_n; \ \mathbf{x} = y_1\mathbf{e}_1 + \ldots + y_n\mathbf{e}_n.$$

Віднімаючи від однієї рівності другу, дістаємо

$$(x_1 - y_1)\mathbf{e}_1 + \ldots + (x_n - y_n)\mathbf{e}_n = \mathbf{o}.$$

Оскільки вектори $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ лінійно незалежні, то ця рівність можлива тільки при нульових коефіцієнтах лінійної комбінації: $x_1 = y_1$, $\ldots$, $x_n = y_n$. □

Теорема 1.8. *В скінченновимірному просторі два різних базиси зав-жди складаютьcя з тієї ж самої кількості базисних векторів.*

Доведення. Нехай в лінійному просторі існують два базиси $< \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n >$ і $< \mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_m >$, причому, $m > n$. Розкладемо вектори $\mathbf{f}_i$, $i = \overline{1, m}$, за векторами першого базису:

$$\mathbf{f}_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}\mathbf{e}_j, \ i = \overline{1, m}, \tag{1.6}$$

де α_{ij} — коефіцієнти розкладання вектора $\mathbf{f}_i$ за базисом $< \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n >$. Побудуємо з коефіцієнтів розкладу матрицю

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \ldots & \alpha_{1m} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{m1} & \ldots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}.$$

Оскільки $m > n$, то рядки матриці як n-ки чисел у просторі $\mathbf{R}^n$ лінійно залежні за теоремою 1.6. Це означає, що існує їхня нетривіальна лінійна комбінація з коефіцієнтами $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$, що дорівнює нульовому вектору:

$$\lambda_1(\alpha_{11}, \ldots, \alpha_{1n}) + \ldots + \lambda_m(\alpha_{m1}, \ldots, \alpha_{mn}) = (0, \ldots, 0),$$

або

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \alpha_{ij} = 0, \; j = \overline{1, n}. \tag{1.7}$$

Побудуємо нетривіальну лінійну комбінацію для векторів базису $< \mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_m >$ і перетворимо її за допомогою формули (1.6):

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \mathbf{f}_i = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} \mathbf{e}_j = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \alpha_{ij} \right) \mathbf{e}_j = \mathbf{o},$$

бо вирази в круглих дужках дорівнюють 0 внаслідок рівностей (1.7). Виходить, вектори $\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_m$ лінійно залежні і не можуть утворювати базис. Отже, $m = n$. □

Теорема 1.9. *В n-вимірному просторі кожна упорядкована система з n лінійно незалежних векторів є базисом.*

Доведення. Якщо ці вектори не є базисом, то тоді у просторі існує $n+k$ ($k \geq \geq 1$) незалежних векторів. Якщо це справедливо для будь-якого k, то простір нескінченновимірний, щó суперечить умові теореми. Нехай в просторі є $n+k$ незалежних векторів, а будь-які $n+k+1$ векторів лінійно залежні. Тоді базис складається з $n+k$ векторів, а це суперечить теоремі 1.8. □

Використовуючи результати попередніх п., відзначимо, що базисом простору звичайних векторів на площині є будь-як упорядкована пара неколінеарних векторів, що належать площині; розмірність простору дорівнює 2.

Базис звичайних векторів у просторі утворює будь-яка трійка некомпланарних векторів; розмірність простору дорівнює 3.

Базис простору $\mathbf{R}^n$ — будь-які n векторів $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$, для яких складений з них визначник $\neq 0$; вимірність простору дорівнює n. Відзначимо, що в базисі

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0), \; \mathbf{e}_2 = (0, 1, \ldots, 0), \; \ldots, \; \mathbf{e}_n = (0, 0, \ldots, 1) \tag{1.8}$$

вектор $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n$ має компоненти, які збігаються з набором чисел, що визначають n-ку.

У просторі многочленів степеня не вище n-го базисом є упорядкована множина $< 1, t, t^2, \ldots, t^n >$, вимірність простору дорівнює $n+1$.

Простори всіх многочленів і функцій, неперервних на відрізку $[a, b]$, нескінченновимірні.

У просторі матриць розміру $m \times n$ базисом є упорядкована множина

$$< \mathbf{A}_{11}, \ldots, \mathbf{A}_{1n}, \mathbf{A}_{21}, \ldots, \mathbf{A}_{2n}, \ldots, \mathbf{A}_{m1}, \ldots, \mathbf{A}_{mn} >;$$

вимірність простору дорівнює mn.

Розглянемо, який вигляд в n-вимірному просторі з базисом $< \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n >$ набувають властивості векторів, заданих своїми компонентами.

Нехай $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + \ldots + x_n\mathbf{e}_n = (x_1, \ldots, x_n)$, $\mathbf{y} = y_1\mathbf{e}_1 + \ldots + y_n\mathbf{e}_n = (y_1, \ldots, y_n)$.

1° *Для додавання (віднімання) двох векторів, треба додати (відняти) їхні відповідні компоненти:*

$$\mathbf{x} \pm \mathbf{y} = (x_1 \pm y_1, \ldots, x_n \pm y_n).$$

Дійсно,

$$\begin{aligned}\mathbf{x} \pm \mathbf{y} &= (x_1\mathbf{e}_1 + \ldots + x_n\mathbf{e}_n) \pm (y_1\mathbf{e}_1 + \ldots + y_n\mathbf{e}_n) = \\ &= (x_1 \pm y_1)\mathbf{e}_1 + \ldots + (x_n \pm y_n)\mathbf{e}_n.\end{aligned}$$

2° *Для множення вектора на число треба на це число помножити всі його компоненти:*

$$\lambda\mathbf{x} = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n).$$

Справді,

$$\lambda\mathbf{x} = \lambda(x_1\mathbf{e}_1 + \ldots + x_n\mathbf{e}_n) = (\lambda x_1)\mathbf{e}_1 + \ldots + (\lambda x_n)\mathbf{e}_n.$$

3° *Вектор тоді й тільки тоді має нульові компоненти, коли він нульовий:*

$$\mathbf{o} = (0, \ldots, 0).$$

Для нульового вектора $\mathbf{o} = \mathbf{x} - \mathbf{x} = (x_1 - x_1)\mathbf{e}_1 + \ldots + (x_n - x_n)\mathbf{e}_n = 0\mathbf{e}_1 + \ldots + 0\mathbf{e}_n$.

Навпаки, якщо $\mathbf{z} = 0\mathbf{e}_1 + \ldots + 0\mathbf{e}_n$, то

$$\forall(\mathbf{y})\ \mathbf{z} + \mathbf{y} = (0 + y_1)\mathbf{e}_1 + \ldots + (0 + y_n)\mathbf{e}_n = y_1\mathbf{e}_1 + \ldots + y_n\mathbf{e}_n = \mathbf{y}.$$

Це означає, що $\mathbf{z} = \mathbf{o}$.

4°. *Вектори дорівнюють один одному тоді й тільки тоді, коли мають однакові відповідні компоненти:*

$$\mathbf{x} = \mathbf{y} \Longleftrightarrow x_1 = y_1, \ldots, x_n = y_n.$$

Виходить з того, що

$$\mathbf{x} = \mathbf{y} \Longleftrightarrow \mathbf{x} - \mathbf{y} = \mathbf{o} \Longleftrightarrow (x_1 - y_1)\mathbf{e}_1 + \ldots + (x_n - y_n)\mathbf{e}_n = \mathbf{o}.$$

За попередньою властивістю $x_1 - y_1 = 0$, ..., $x_n - y_n = 0$, або $x_1 = y_1$, ... , $x_n = y_n$.

1.3. Базис

2 Геометрія лінійного простору

2.1 Афінний простір

У звичайному геометричному просторі спочатку вводиться поняття точки, а потім на основі цього поняття — поняття вектора як упорядкованої пари точок. У теорії лінійних просторів чинять навпаки: на базі вже наявного поняття вектора лінійного простору вводиться поняття точки, а потім інші, пов'язані з ним поняття.

Нехай маємо n-вимірний лінійний простір. Його елементи були названі векторами. Але можна згадати, що в звичайних геометричних просторах кожний вектор визначався двома точками: своїм початком і кінцем, а кожна точка являла собою кінець радіус-вектора. Основна відмінність радіус-векторів від інших векторів полягає в тому, що всі радіус-вектори виходять з однієї й тієї ж точки (початку координат). Але, взагалі кажучи, векторна алгебра розглядає вільні вектори, не прив'язані до будь-якої конкретної точки. Тому можна сказати, що точці відповідає цілий клас рівних один одному векторів, або, іншими словами, один і той самий вільний вектор.

Вчинимо навпаки: вектору поставимо у відповідність точку. Саме, ***точкою*** A лінійного простору назвемо деякий вектор $\mathbf{x}_A$. Таку точку не можна побудувати навіть у звичайному геометричному просторі, тому що для побудови потрібна система координат. Але спочатку переконаємося в тому, що введене поняття точки виправдує наше інтуїтивне уявлення про точки і вектори, а потім означимо систему координат.

Насамперед кожній парі точок A і B поставимо у відповідність вектор $\mathbf{z} = \mathbf{x}_A - \mathbf{x}_B$. Таким чином, кожна упорядкована пара різних точок A і B буде визначати єдиний вектор $\mathbf{z}$, причому, точка A буде вважатися початком вектора $\mathbf{z}$, а точка B — його кінцем.

З цього означення випливають два важливих твердження, що часто приймають за аксіоми точечно-векторного простору.

1°. *Для будь-якої точки A і будь-якого вектора $\mathbf{x}$ існує єдина точка B така, що $\mathbf{AB} = \mathbf{x}$ (вектор і його початок однозначно визначають кінець вектора).*

Дійсно, точкою B можна взяти точку $B = \mathbf{x}_A + \mathbf{x}$, бо тоді $\mathbf{AB} = (\mathbf{x}_A + \mathbf{x}) - \mathbf{x}_A = \mathbf{x}$.

2°. *Для будь-яких трьох точок A, B і C виконана рівність $\mathbf{AB} + \mathbf{BC} = \mathbf{AC}$ (додавання векторів за правилом трикутника).*

Справді, $\mathbf{AB} + \mathbf{BC} = (\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_A) + (\mathbf{x}_C - \mathbf{x}_B) = \mathbf{x}_C - \mathbf{x}_A = \mathbf{AC}$.

Лінійний n-вимірний простір, доповнений точками, що задовольняють цим твердженням, називається ***афінним*** (або ***точечно-векторним***) n-вимірним простором.

Розглянемо ще кілька наслідків.

3°. *Якщо $\mathbf{AB} = \mathbf{AC} = \mathbf{x}$, то $B = C$.*

Це відразу випливає з першого твердження.

4°. *Для будь-якої точки A вектор $\mathbf{AA} = \mathbf{o}$.*

Дійсно, з другого твердження випливає, що $\mathbf{AA} + \mathbf{AC} = \mathbf{AC}$. Але таку властивість має тільки нульовий вектор, тому $\mathbf{AA} = \mathbf{o}$.

5°. *Вектором, протилежним вектору $\mathbf{AB}$, є вектор $\mathbf{BA}$.*

Знову використовуючи друге твердження, дістаємо $\mathbf{AB} + \mathbf{BA} = \mathbf{AA} = \mathbf{x}_A - \mathbf{x}_A = \mathbf{o}$. Це означає, що $\mathbf{BA} = -\mathbf{AB}$.

6°. *Для будь-яких чотирьох точок A, B, A', B' рівність $\mathbf{AB} = \mathbf{A'B'}$ справедлива тоді й тільки тоді, коли $\mathbf{AA'} = \mathbf{BB'}$ (для будь-якого вектора $\mathbf{AB}$ з будь-якої точки A' можна відкласти рівний йому вектор $\mathbf{A'B'}$, див. мал. 2.1).*

Це випливає з рівності $\mathbf{AB} + \mathbf{BB'} = \mathbf{AB'} = \mathbf{AA'} + \mathbf{A'B'}$.

Тепер введемо систему координат. ***Декартовою системою координат*** в афінному n-вимірному просторі називається сукупність точки O (***початку координат***) і базису $< \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n >$, який будемо називати ***декартовым базисом***. У декартовому базисі кожній точці A простору відповідає єдиний вектор (радіус-вектор) $\mathbf{OA} = x_1\mathbf{e}_1 + \ldots + x_n\mathbf{e}_n$, координати якого називаються ***координатами*** точки A, так що точку можна записувати як $A(x_1, \ldots, x_n)$. Оскільки вектор $\mathbf{OO} = \mathbf{o} = 0\mathbf{e}_1 + \ldots + 0\mathbf{e}_n$, точка O має нульові координати.

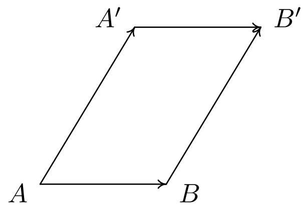

Рис. 2.1: До висновку 6

Якщо $A(x_1, \dots, x_n)$ і $B(y_1, \dots, y_n)$ — дві точки афінного простору, то з рівності $\mathbf{OA} + \mathbf{AB} = \mathbf{OB}$ маємо $\mathbf{AB} = \mathbf{OB} - \mathbf{OA} = (x_1 - y_1)\mathbf{e}_1 + \dots + (x_n - y_n)\mathbf{e}_n$. Таким чином, щоб дістати координати вектора, треба з координат його кінця відняти координати його початку.

Як відомо, в тривимірному просторі пряма з напрямним вектором $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3) \neq \mathbf{o}$, що проходить через точку $M_0(x^0, y^0, z^0)$, задається системою рівнянь

$$\frac{x - x^0}{a_1} = \frac{y - y^0}{a_2} = \frac{z - z^0}{a_3}.$$

За аналогією в декартовій системі координат афінного простору ***прямою*** з напрямним вектором $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n) \neq \mathbf{o}$, що проходить через точку $M_0(x_1^0, \dots, x_n^0)$, називають множину точок $M(x_1, \dots, x_n)$, координати яких задовольняють системі рівнянь

$$\frac{x_1 - x_1^0}{a_1} = \dots = \frac{x_n - x_n^0}{a_n}.$$

Якщо зрівняти всі ці відношення з одним і тим самим параметром t, то систему можна переписати так:

$$x_1 - x_1^0 = a_1 t, \dots, x_n - x_n^0 = a_n t.$$

Якщо тепер означити радіус-вектори точок $\mathbf{r} = \mathbf{OM} = (x_1, \dots, x_n)$, $\mathbf{r}_0 = \mathbf{OM}_0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$, то сукупність отриманих виразів можна замінити одним векторним рівнянням

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = \mathbf{a}t,$$

яке називається ***векторним рівнянням прямої***.

Площина в аналітичній геометрії описується, наприклад, своїм загальним рівнянням $Ax + By + Cz + D = 0$. В афінному просторі площині відповідає ***гіперплощина***, якою називається множина точок $M(x_1, \ldots, x_n)$, координати яких задовольняють рівнянню

$$A_1 x_1 + \cdots + A_n x_n + A = 0$$

за умови, що вектор ***нормалі*** $\mathbf{n} = (A_1, \cdots, A_n) \neq \mathbf{o}$.

2.2 Евклідів простір

Уведені поняття ще не дозволяють знаходити відстані між точками в афінному просторі або кути між векторами й іншими геометричними об'єктами в просторі лінійному. Щоб уможливити це, треба ввести ще одну операцію — скалярне множення векторів. У даному п. будемо розглядати тільки дійсні лінійні простори. Узагальнюючи властивості скалярного множення звичайних векторів, ***скалярним множенням*** векторів $\mathbf{x}$ і $\mathbf{y}$ лінійного простору називають операцію, що ставить у відповідність цим векторам дійсне число $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$, яке називають ***скалярним добутком*** векторів $\mathbf{x}$ і $\mathbf{y}$ і яке має такі властивості.

1°. $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} \geq 0$, *причому, якщо* $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = 0$, *то* $\mathbf{x} = \mathbf{o}$.

2°. $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{x}$.

3°. $(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \cdot \mathbf{z} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{z} + \mathbf{y} \cdot \mathbf{z}$.

4°. $(\alpha \mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = \alpha(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})$.

Тут $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$ — довільні вектори, α — довільне число. Для стислості будемо далі позначати $\mathbf{x}^2 = \mathbf{x} \cdot \mathbf{x}$.

Лінійний простір, у якому є операція скалярного множення векторів, називається ***евклідовим*** простором. Афінний n-вимірний простір, якщо в ньому означений скалярний добуток векторів, будемо називати ***евклідовим аффінним простором***.

Доведемо висновки, що випливають з цих аксіом.

1°. $\mathbf{x} \cdot (\alpha \mathbf{y}) = \alpha(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})$.

Дійсно, на підставі другої і четвертої аксіом $\mathbf{x} \cdot (\alpha \mathbf{y}) = (\alpha \mathbf{y}) \cdot \mathbf{x} = \alpha(\mathbf{y} \cdot \mathbf{x}) = \alpha(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})$.

2°. $\mathbf{x} \cdot (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{x} \cdot \mathbf{z}$.

Випливає з $\mathbf{x} \cdot (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = (\mathbf{y} + \mathbf{z}) \cdot \mathbf{x} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{z} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{x} \cdot \mathbf{z}$.

3°. $\left(\sum\limits_{k=1}^{m} \alpha_k \mathbf{x}_k\right) \cdot \mathbf{y} = \sum\limits_{k=1}^{m} \alpha_k (\mathbf{x}_k \cdot \mathbf{y})$, $\mathbf{x} \cdot \left(\sum\limits_{k=1}^{m} \alpha_k \mathbf{y}_k\right) = \sum\limits_{k=1}^{m} \alpha_k (\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}_k)$.

4°. $\mathbf{x} \cdot \mathbf{o} = 0$.

Оскільки $\mathbf{o} = 0\mathbf{x}$, то $\mathbf{x} \cdot \mathbf{o} = \mathbf{x} \cdot (0\mathbf{x}) = 0(\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}) = 0$.

Довжиною (***модулем***) вектора $\mathbf{x}$ називається корінь квадратний зі скалярного добутку вектора на себе. Позначається довжина вектора евклиіова простору так само, як і довжина звичайного вектора: $|\mathbf{x}| = \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}}$. З першої аксіоми скалярного добутку і висновка 4 випливає, що довжина вектора дорівнює нулю тоді й тільки тоді, коли вектор нульовий. В евклідовому афінному просторі довжина вектора $\mathbf{AB}$ визначає відстань між точками A і B.

З довжиною вектора пов'язані подальші твердження.

Теорема 2.1 (Нерівність Коші-Буняковського)**.**

$$|\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}| \leq |\mathbf{x}||\mathbf{y}|. \tag{2.1}$$

Доведення. Нехай $\mathbf{x}$ і $\mathbf{y}$ — довільні вектори евклідова простору, а α і β — довільні числа. Тоді з першої аксіоми скалярного добутку справедлива нерівність

$$(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}) \cdot (\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}) = \alpha^2\mathbf{x}^2 + 2\alpha\beta(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) + \beta^2\mathbf{y}^2 \geq 0, \tag{2.2}$$

причому, рівність нулю має місце тільки, коли $\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y} = \mathbf{o}$. Якщо покласти в останній нерівності $\alpha = \mathbf{y}^2$, а $\beta = -(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})$, дістанемо

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^2(\mathbf{y}^2)^2 - 2\mathbf{y}^2(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})^2 + (\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})^2\mathbf{y}^2 &= \mathbf{y}^2[\mathbf{x}^2\mathbf{y}^2 - 2(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})^2 + (\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})^2] = \\ &= \mathbf{y}^2[\mathbf{x}^2\mathbf{y}^2 - (\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})^2] \geq 0, \end{aligned}$$

звідки й випливає доказувана нерівність для $\mathbf{y} \neq \mathbf{o}$. Для $\mathbf{y} = \mathbf{o}$ нерівність (2.1) очевидна. $\square$

Висновок 2.1. *Рівність у формулі* (2.1) *має місце тоді й тільки тоді, коли* $\mathbf{x}$ *і* $\mathbf{y}$ *лінійно залежні.*

Доведення. Нехай $\mathbf{x}$ і $\mathbf{y}$ лінійно незалежні. Тоді для $\alpha \neq 0$ або $\beta \neq 0$ маємо $\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y} \neq \mathbf{o}$ і (2.2) перетворюється в строгу нерівність, а разом з ним стає строгою нерівністю і (2.1).

Навпаки. Нехай $\mathbf{x}$ і $\mathbf{y}$ лінійно залежні. Тоді існує їхня нетривіальна лінійна комбінація, яка дорівнює нульовому вектору: $\alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{y} = \mathbf{o}$. Множачи цю рівність по черзі на $\mathbf{x}$ і $\mathbf{y}$, дістаємо систему однорідних рівнянь

$$\begin{cases} \alpha\mathbf{x}^2 + \beta(\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}) = 0, \\ \alpha(\mathbf{y}\cdot\mathbf{x}) + \beta\mathbf{y}^2 = 0. \end{cases}$$

Оскільки вона має ненульовий розв'язок відносно α і β, то її визначник дорівнює нулю: $\mathbf{x}^2\mathbf{y}^2 - (\mathbf{x}\cdot\mathbf{y})^2 = 0$. □

Теорема 2.2 (Нерівність Мінковського)**.**

$$|\mathbf{x} + \mathbf{y}| \leq |\mathbf{x}| + |\mathbf{y}|. \tag{2.3}$$

Доведення. Нехай $\mathbf{x}$ і $\mathbf{y}$ — довільні вектори евклідова простору. Тоді з нерівності (2.1) і з того, що $\mathbf{x}^2 = \mathbf{x}\cdot\mathbf{x} = |\mathbf{x}|^2$, маємо

$$\begin{aligned}(\mathbf{x}+\mathbf{y})^2 = \mathbf{x}^2 + 2(\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}) + \mathbf{y}^2 \leq \mathbf{x}^2 + 2|\mathbf{x}||\mathbf{y}| + \mathbf{y}^2 = \\ = |\mathbf{x}|^2 + 2|\mathbf{x}||\mathbf{y}| + |\mathbf{y}|^2 = (|\mathbf{x}| + |\mathbf{y}|)^2,\end{aligned}$$

звідки й випливає доказувана нерівність. □

Теорема 2.3.

$$|\mathbf{x}| - |\mathbf{y}| \leq |\mathbf{x} - \mathbf{y}|. \tag{2.4}$$

Доведення. На підставі нерівності Мінковського

$$|\mathbf{x}| \leq |\mathbf{x} - \mathbf{y} + \mathbf{y}| \leq |\mathbf{x} - \mathbf{y}| + |\mathbf{y}| \iff |\mathbf{x}| - |\mathbf{y}| \leq |\mathbf{x} - \mathbf{y}|.$$

□

Висновок 2.2.

$$||\mathbf{x}| - |\mathbf{y}|| \leq |\mathbf{x} - \mathbf{y}|. \tag{2.5}$$

Доведення. З (2.4) відразу випливає, що $|\mathbf{y}| - |\mathbf{x}| \leq |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$, або $-|\mathbf{x} - \mathbf{y}| \leq |\mathbf{x}| - |\mathbf{y}|$. Разом з (2.4) це дає $-|\mathbf{x} - \mathbf{y}| \leq |\mathbf{x}| - |\mathbf{y}| \leq |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$, що й треба було довести. □

Нерівності (2.3) і (2.5) називаються нерівностями трикутника: якщо вектори $\mathbf{x}$ і $\mathbf{y}$ являють собою різні сторони в трикутнику, то нерівності означають, що сторона трикутника не більше суми і не менше модуля різниці двох його інших сторін.

Нерівність Коші-Буняковського дає можливість ввести поняття кута між двома векторами в евклідовому просторі. Таким кутом називається число φ, $0 \le \varphi \le \pi$, що задовольняє рівності

$$\cos\varphi = \frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}}{|\mathbf{x}||\mathbf{y}|}. \tag{2.6}$$

Нерівність Коши-Буняковского гарантує, що введена величина може дійсно вважатися косинусом деякого кута, тобто буде виконуватися $|\cos\varphi| \le$ ≤ 1.

Вектори $\mathbf{x}$ і $\mathbf{y}$ називають ***ортогональними*** і пишуть $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$, якщо $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = 0$. Нульовий вектор вважається ортогональним будь-якому вектору.

Теорема 2.4. *Тільки нульовий вектор ортогональний будь-якому вектору.*

Доведення. Якщо $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = 0$ для будь-якого вектора $\mathbf{y}$, то, взявши $\mathbf{y} = \mathbf{x}$, дістанемо $\mathbf{x}\cdot\mathbf{x} = 0$, що за першою аксіомою скалярного добутку можливо лише для нульового вектора. □

Базис в евклідовому просторі називається ***ортогональним***, якщо вектори базису парами ортогональні.

Теорема 2.5. *Парами ортогональні й ненульові вектори лінійно незалежні.*

Доведення. Припустимо супротивне: що вектори $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, $\ldots$, $\mathbf{x}_m$ парами ортогональні й ненульові, але лінійно залежні. Тоді знайдеться їхня нетривіальна лінійна комбінація, яка дорівнює нульовому вектору:

$$\lambda_1\mathbf{x}_1 + \lambda_2\mathbf{x}_2 + \ldots + \lambda_m\mathbf{x}_m = \mathbf{o},$$

причому, для визначеності нехай $\lambda_1 \ne 0$. Помножимо обидві частини рівності на $\mathbf{x}_1$:

$$\lambda_1(\mathbf{x}_1\cdot\mathbf{x}_1) + \lambda_2(\mathbf{x}_2\cdot\mathbf{x}_1) + \ldots + \lambda_m(\mathbf{x}_m\cdot\mathbf{x}_1) = 0.$$

Внаслідок попарної ортогональности векторів отримана рівність спрощується до $\lambda_1(\mathbf{x}_1\cdot\mathbf{x}_1) = 0$. Оскільки вектор $\mathbf{x}_1$ ненульовий, то $\lambda_1 = 0$, що суперечить припущенню. □

Ортогональний базис в евклідовому просторі називається ***ортонормованим***, якщо вектори базису мають одиничну довжину. З тільки що доведеної теореми випливає, що ортонормований базис складається з лінійно незалежних векторів.

Нехай $< \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n >$ — базис евклідова простору і нехай у цьому базисі $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n$, $\mathbf{y} = y_1\mathbf{e}_1 + \cdots + y_n\mathbf{e}_n$. Тоді

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = (x_1\mathbf{e}_1 + \cdots x_n\mathbf{e}_n) \cdot (y_1\mathbf{e}_1 + \cdots y_n\mathbf{e}_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j). \tag{2.7}$$

Якщо базис $< \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n >$ ортонормований, то $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = 0$ $(i \neq j)$, а $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_i = 1$, і тому формула (2.7) стає такою:

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n. \tag{2.8}$$

У матричній формі формулу (2.8) можна записати так: $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = [\mathbf{x}]^T[\mathbf{y}]$.

Приклад 2.1. *У лінійному просторі* $\mathbf{R}^n$ *скалярним добутком векторів* $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ *і* $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$, *беруть величину* $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$.

Розв'язання. Неважко перевірити, що ця величина задовольняє всім аксіомам скалярного добутку. В ортонормованому базисі (1.8) вона обчислюється за формулою, що збігається з формулою (2.8). □

Приклад 2.2. *У просторі многочленів степеня не вище* n*-го скалярний добуток многочленів* $\mathbf{x} = P_n(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots + a_n t^n$ *і* $\mathbf{y} = Q_n(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \ldots + b_n t^n$ *можна визначити так:*

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = a_0 b_0 + a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n. \tag{2.9}$$

Розв'язання. Виконання аксіом скалярного добутку так само очевидно, як і в попередньому прикладі. В ортонормованому базисі $< 1, t, t^2, \ldots, t^n >$ обчислення скалярного добутку фактично виконується за формулою (2.9). □

Приклад 2.3. *У просторі всіх многочленів скалярним добутком многочленів* $\mathbf{x} = P_n(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots + a_n t^n$ *и* $\mathbf{y} = Q_m(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \ldots + b_m t^m$ *вважають величину*

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = a_0 b_0 + a_1 b_1 + \ldots + a_k b_k,$$

де $k = \min(n, m)$.

Приклад 2.4. *У просторі матриць розміру $m \times n$ скалярний добуток двох матриць $\mathbf{x} = \{a\}_{ij}$ і $\mathbf{y} = \{b\}_{ij}$ задається формулою*

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{ij}. \tag{2.10}$$

Розв'язання. І в цьому прикладі очевидне виконання аксіом скалярного добутку. Відзначимо, що скалярний добуток матриць (множаться відповідні елементи матриць) відрізняється від звичайного добутку матриць. Обчислення скалярного добутку в ортонормованому базисі

$$< \mathbf{A}_{11}, \ldots, \mathbf{A}_{1n}, \mathbf{A}_{21}, \ldots, \mathbf{A}_{2n}, \ldots, \mathbf{A}_{m1}, \ldots, \mathbf{A}_{mn} >$$

збігається з формулою (2.10). □

В евклідовому афінному просторі можна говорити про кути між прямими і гіперплощинами, про їхню паралельність або перпендикулярність.

Вектори $\mathbf{x}$ і $\mathbf{y}$ лінійного простору називають ***колінеарними*** і пишуть $\mathbf{x} \parallel \mathbf{y}$, якщо вони лінійно залежні. Очевидно, що нульовий вектор колінеарний будь-якому вектору. Зокрема, якщо $\mathbf{x}$ і $\mathbf{y}$ ненульові, відшукається число $\lambda \neq 0$ таке, що $\mathbf{y} = \lambda \mathbf{x}$. Якщо простір n-вимірний, компоненти колінеарних векторів $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ і $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ пропорційні:

$$\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} = \cdots = \frac{x_n}{y_n}, \tag{2.11}$$

причому, якщо $x_i = y_i = 0$, то i-е відношення відкидають, а, якщо $x_i \neq 0$, $y_i = 0$, вважають, що пропорція не виконується (тобто в цьому випадку $\mathbf{x} \nparallel \mathbf{y}$).

Кутом між прямими

$$l_1 : \frac{x_1 - x_1^1}{a_0} = \cdots = \frac{x_n - x_n^1}{a_n}, \tag{2.12}$$

$$l_2 : \frac{x_1 - x_1^2}{b_0} = \cdots = \frac{x_n - x_n^2}{b_n}$$

називається кут між їхніми напрямними векторами $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ і $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_n)$; паралельність і перпендикулярність прямих також визначаються відповідними поняттями для їхніх нормалей:

$$\cos \widehat{l_1, l_2} = \cos \widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}} = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|},$$

$$l_1 \parallel l_2 \Longleftrightarrow \mathbf{a} \parallel \mathbf{b} \Longleftrightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \cdots = \frac{a_n}{b_n},$$

$$l_1 \perp l_2 \Longleftrightarrow \mathbf{a} \perp \mathbf{b} \Longleftrightarrow a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n = 0.$$

Так само ***кутом між гіперплощинами***

$$p_1 : A_1 x_1 + \cdots + A_n x_n + A = 0 \tag{2.13}$$

$$p_2 : B_1 x_1 + \cdots + B_n x_n + B = 0$$

називається кут між їхніми нормалями $\mathbf{n}_1 = (A_1, \ldots, A_n)$ і $\mathbf{n}_2 = (B_1, \ldots, B_n)$; гіперплощини паралельні або перпендикулярні, якщо їхні нормалі відповідно колінеарні або ортогональні:

$$\cos \widehat{p_1, p_2} = \cos \widehat{\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2} = \frac{\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2}{|\mathbf{n}_1||\mathbf{n}_2|},$$

$$p_1 \parallel p_2 \Longleftrightarrow \mathbf{n}_1 \parallel \mathbf{n}_2 \Longleftrightarrow \frac{A_1}{B_1} = \frac{A_2}{B_2} = \cdots = \frac{A_n}{B_n},$$

$$p_1 \perp p_2 \Longleftrightarrow \mathbf{n}_1 \perp \mathbf{n}_2 \Longleftrightarrow A_1 B_1 + A_2 B_2 + \ldots + A_n B_n = 0.$$

Рівняння гіперплощини (2.13) можна записати у вигляді, що називається ***векторним рівнянням гіперплощини***:

$$\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{x} + A = 0,$$

де $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$.

Відстань від точки $M_0(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ до гіперплощини (2.13) знаходиться за формулою

$$d = \frac{|A_1 x_1^0 + \cdots + A_n x_n^0 + A|}{\sqrt{A_1^2 + \cdots + A_n^2}}. \tag{2.14}$$

Кутом між прямою (2.12) і гіперплощиною (2.13) називається число φ, $0 \le \varphi \le \pi/2$, що задовольняє рівності

$$\sin \varphi = \frac{|\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}_1|}{|\mathbf{a}||\mathbf{n}_1|}.$$

Приклад 2.5. *Чи будуть ортогональними вектори* $\mathbf{x} = (1, 0, 3, -2, 1)$ *і* $\mathbf{y} = (-3, 1, 2, 0, -4)$ *у просторі* $\mathbf{R}^5$*?*

2.2. Евклідів простір

Розв'язання. Знайдемо скалярний добуток цих векторів за формулою (2.8):

$$\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = 1\cdot(-3) + 0\cdot 1 + 3\cdot 2 - 2\cdot 0 + 1\cdot(-4) = -1 \neq 0.$$

Оскільки скалярний добуток не дорівнює нулю, то вектори не ортогональні. □

Приклад 2.6. *Перевірити колінеарність векторів* $\mathbf{x} = 9t - 6t^2 + 15t^3$ *і* $\mathbf{y} = 6t - 4t^2 + 10t^3$ *у просторі многочленів степеня не вище третього.*

Розв'язання. Використаємо формулу (2.11):

$$\frac{0}{0} = \frac{9}{6} = \frac{-6}{-4} = \frac{15}{10}.$$

Пропорція виконується (всі відношення, крім першого, дорівнюють 1,5, а перше можна відкинути), виходить, вектори-многочлени колінеарні. □

Приклад 2.7. *Знайти кут між векторами*

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix},\ \mathbf{y} = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

у просторі матриць розміру 2×2.

Розв'язання. Обчислимо скалярний добуток векторів за формулою (2.10):

$$\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \\ = 1\cdot(-1) - 2\cdot 4 + 3\cdot 2 + 1\cdot 5 = -1 - 8 + 6 + 5 = 2.$$

Знайдемо довжини векторів:

$$|\mathbf{x}| = \sqrt{\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}} = \sqrt{\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}} = \\ = \sqrt{1\cdot 1 - 2\cdot(-2) + 3\cdot 3 + 1\cdot 1} = \sqrt{15},$$

$$|\mathbf{y}| = \sqrt{\mathbf{y}\cdot\mathbf{y}} = \sqrt{\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}} = \\ = \sqrt{-1\cdot(-1) + 4\cdot 4 + 2\cdot 2 + 5\cdot 5} = \sqrt{46}.$$

Залишається застосувати формулу (2.6):

$$\cos\varphi = \frac{2}{\sqrt{15}\sqrt{46}} \approx 0,076139;$$
$$\varphi \approx 85^\circ 38'.$$

□

Приклад 2.8. *Знайти відстань від точки* $M_0(0;-1;2;3;0;-3)$ *до гіперплощини* $2x_1 + 4x_2 - x_5 + 3x_6 + 1 = 0$.

Розв'язання. Скористаємося формулою (2.14):

$$d = \frac{|2\cdot 0 + 4\cdot(-1) + 0\cdot 2 + 0\cdot 3 + -1\cdot 0 + 3\cdot(-3) + 1|}{\sqrt{2^2 + 4^2 + 0^2 + 0^2 + (-1)^2 + 3^2}} = \frac{12}{\sqrt{30}} \approx 2{,}19.$$

□

2.2. Евклідів простір

3 Лінійні оператори

3.1 Лінійний оператор і його матриця

Як в математиці, так і в технічних науках часто виникає необхідність перетворити лінійний простір: повернути, зсунути, стиснути і т.п. Ці операції виконують спеціальні об'єкти, які діють у лінійному просторі, що називають операторами або перетвореннями.

Оператором (перетворенням) $\mathcal{A}$, що діє в лінійному просторі $\mathcal{L}$, називається правило, за яким кожному вектору $\mathbf{x} \in \mathcal{L}$, ставиться у відповідність визначений вектор $\mathbf{y} \in \mathcal{L}$. Вектор $\mathbf{y}$ називається ***образом*** вектора $\mathbf{x}$, а вектор $\mathbf{x}$ — ***прообразом*** вектора $\mathbf{y}$ для оператора $\mathcal{L}$. Зв'язок між образом і прообразом записується у вигляді: $\mathbf{y} = \mathcal{A}\mathbf{x}$.

Оператор $\mathcal{A}$ називається ***лінійним***, якщо він має властивість

$$\mathcal{A}(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}) = \alpha\mathcal{A}\mathbf{x} + \beta\mathcal{A}\mathbf{y}$$

(лінійний оператор від лінійної комбінації векторів дорівнює лінійній комбінації їхніх образів), що називається ***властивістю лінійності***. З цієї властивості для $\alpha = 1$, $\beta = 1$ випливає, що лінійний оператор від суми векторів дорівнює сумі їхніх образів, а при $\beta = 0$ одержуємо, що постійний множник можна виносити за знак оператора. Далі розглядаються тільки лінійні оператори.

Оператор називається ***тотожним*** і позначається $\mathcal{E}$, якщо він не змінює вектор: $\mathcal{E}\mathbf{x} = \mathbf{x}$.

Нульовим називається оператор $\mathcal{O}$, що будь-який вектор перетворює в нульовий: $\mathcal{O}\mathbf{x} = \mathbf{o}$.

Нехай в n-вимірному лінійному просторі з базисом $< \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n >$ діє лінійний оператор $\mathcal{A}$. Позначимо образи базисних векторів для оператора $\mathcal{A}$ хвилькою: $\widetilde{\mathbf{e}}_1 = \mathcal{A}\mathbf{e}_1$, ... , $\widetilde{\mathbf{e}}_n = \mathcal{A}\mathbf{e}_n$, а їхні розклади за векторами базису в такий спосіб:

$$\widetilde{\mathbf{e}}_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\mathbf{e}_i,\ j = \overline{1,n}. \tag{3.1}$$

Нехай $\mathbf{y} = \mathcal{A}\mathbf{x}$, причому,

$$\mathbf{x} = \sum_{j=1}^{n} x_j\mathbf{e}_j, \tag{3.2}$$

$$\mathbf{y} = \sum_{i=1}^{n} y_i\mathbf{e}_i. \tag{3.3}$$

Використовуючи властивість лінійності оператора $\mathcal{A}$ і розклади (3.1) і (3.2), можна отримати ще один розклад вектора $\mathbf{y}$ за базисом:

$$\begin{aligned}\mathbf{y} = \mathcal{A}\mathbf{x} = \mathcal{A}\sum_{j=1}^{n} x_j\mathbf{e}_j = \sum_{j=1}^{n} x_j\mathcal{A}\mathbf{e}_j = \sum_{j=1}^{n} x_j\widetilde{\mathbf{e}}_j = \\ = \sum_{j=1}^{n} x_j\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\mathbf{e}_i = \sum_{i=1}^{n}\underbrace{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j}\,\mathbf{e}_i.\end{aligned} \tag{3.4}$$

Фігурною дужкою обведений коефіцієнт цього розкладу. Однак розкладання будь-якого вектора за базисом єдине і тому, порівнюючи формули (3.3) і (3.4), доходимо висновку, що

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j.$$

Введемо матрицю $\mathbf{A} = \{a_{ij}\}$ і за допомогою добутку матриць запишемо останню рівність в матричній формі:

$$[\mathbf{y}] = \mathbf{A}[\mathbf{x}]. \tag{3.5}$$

Таким чином, у даному базисі матриця $\mathbf{A}$ виконує над вектором $\mathbf{x}$ таку ж дію, як і оператор $\mathcal{A}$, тому що результатом обох дій є вектор $\mathbf{y}$. Матриця $\mathbf{A}$ називається ***матрицею лінійного оператора*** (у базисі $< \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n >$). Її стовпцями, як це видно з формули (3.1), є образи базисних векторів у координатній формі. Відзначимо, що дія оператора на вектор ніяк не пов'язана з базисом лінійного простору, наприклад, ця дію можна описати словами: «замінити вектор $\mathbf{x}$ протилежним йому вектором». У той же час матриця лінійного оператора тісно пов'язана з базисом: у різних базисах лінійний оператор може подаватися різними своїми матрицями.

Неважко побачити, що тотожному оператору відповідає одинична матриця, а нульовому — нульова.

Формулу (3.1) з використанням операції множення матриць можна записати у вигляді

$$[\widetilde{\mathbf{e}}] = \mathbf{A}^T[\mathbf{e}]. \tag{3.6}$$

Теорема 3.1. *Матриця лінійного оператора в даному базисі визначена однозначно.*

Доведення. Нехай у даному базисі n-го простору лінійний оператор $\mathcal{A}$ має дві матриці: $\mathbf{A}$ і $\widetilde{\mathbf{A}}$. Тоді для будь-якого вектора $\mathbf{x}$ виконується $\mathbf{A}[\mathbf{x}] = \widetilde{\mathbf{A}}[\mathbf{x}]$, або $(\mathbf{A} - \widetilde{\mathbf{A}})[\mathbf{x}] = [\mathbf{o}]$. Будемо підставляти в цю рівність вектори (1.8). Ці підстановки по черзі покажуть, що стовпці матриці $\mathbf{A} - \widetilde{\mathbf{A}}$ складаються з нулів. Отже, $\mathbf{A} - \widetilde{\mathbf{A}} = \mathbf{O}$ і, виходить, $\mathbf{A} = \widetilde{\mathbf{A}}$. □

Теорема 3.2. *Кожна квадратна матриця розміру n може вважатися матрицею деякого лінійного оператора.*

Доведення. Нехай задана квадратна матриця $\mathbf{A}$ розміру n. Виберемо деякий n-вимірний простір з базисом $\mathbf{e} = < \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n >$. Позначимо через $\mathcal{A}$ лінійний оператор з такою дією: $\mathcal{A}\mathbf{x} = \mathbf{A}[\mathbf{x}]_\mathbf{e}$. Очевидно, такий оператор буде лінійним, бо

$$\mathcal{A}(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{z}) = \mathbf{A}(\alpha[\mathbf{x}]_\mathbf{e} + \beta[\mathbf{z}]_\mathbf{e}) = \alpha\mathbf{A}[\mathbf{x}]_\mathbf{e} + \beta\mathbf{A}[\mathbf{z}]_\mathbf{e} = \alpha\mathcal{A}\mathbf{x} + \beta\mathcal{A}\mathbf{z}$$

для будь-яких двох векторів $\mathbf{x}$ і $\mathbf{z}$. □

Приклад 3.1. *У просторі $\mathbf{R^2}$ лінійний оператор $\mathcal{A}$ кожний вектор $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ перетворює таким чином:*

$$\mathcal{A}\mathbf{x} = \mathcal{A}(x_1, x_2) = (x_1 - x_2, x_2).$$

Знайти матрицю цього оператора в базисах

$$\mathbf{e} =< \mathbf{e_1}, \mathbf{e_2} >, \ \mathbf{e}_1 = (1, 0), \ \mathbf{e}_2 = (0, 1) \tag{3.7}$$

і

$$\widetilde{\mathbf{e}} =< \widetilde{\mathbf{e_1}}, \widetilde{\mathbf{e_2}} >, \ \widetilde{\mathbf{e}}_1 = (0, 1), \ \widetilde{\mathbf{e}}_2 = (1, 0). \tag{3.8}$$

Розв'язання. Знайдемо образи базисних векторів у першому базисі:

$$\mathcal{A}\mathbf{e}_1 = \mathcal{A}(1,0) = (1-0,0) = (1,0) = \mathbf{e}_1,\ \mathcal{A}\mathbf{e}_2 = \mathcal{A}(0,1) = \\ = (0-1,1) = (-1,1) = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2.$$

Виходить, матриця оператора в першому базисі має вигляд

$$\mathbf{A} = (\mathcal{A}\mathbf{e}_1\ \mathcal{A}\mathbf{e}_2) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Аналогічно знаходимо матрицю оператора в другому базисі:

$$\mathcal{A}\widetilde{\mathbf{e}}_1 = \mathcal{A}(0,1) = (-1,1) = \widetilde{\mathbf{e}}_1 - \widetilde{\mathbf{e}}_2,\ \mathcal{A}\widetilde{\mathbf{e}}_2 = \mathcal{A}(1,0) = (1,0) = \widetilde{\mathbf{e}}_2,$$
$$\widetilde{\mathbf{A}} = (\mathcal{A}\widetilde{\mathbf{e}}_1\ \mathcal{A}\widetilde{\mathbf{e}}_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Видно, що в різних базисах матриці лінійного оператора різні. В першому базисі вектор $\mathbf{x}$ має розклад $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2$. Тоді

$$\mathbf{A}[\mathbf{x}]_{\mathbf{e}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} = (x_1 - x_2, x_2),$$

тобто множення матриці лінійного оператора на вектор робить з ним ту ж саму дію, що й сам оператор. Переконайтеся самостійно, що в другому базисі множення $\widetilde{\mathbf{A}}[\mathbf{x}]_{\widetilde{\mathbf{e}}}$ діє так само. □

Приклад 3.2. *Нехай оператор $\mathcal{A}$ виконує поворот звичайної площини xOy, яка вважається простором $\mathbf{R}^2$, на кут φ проти стрілки годинника. Таким чином, кожний вектор цього простору буде повернений на кут φ. Знайти матрицю цього оператора в ортонормованому базисі $\mathbf{e}_1 = (1;0)$, $\mathbf{e}_2 = (0;1)$.*

Доведення. Даний оператор лінійний, бо однаково: чи повернути спочатку вектори $\mathbf{x}$ і $\mathbf{y}$, а потім побудувати лінійну комбінацію повернених векторів, чи спочатку побудувати лінійну комбінацію векторів $\mathbf{x}$ і $\mathbf{y}$, а потім повернути її на кут φ (див рис. 3.1). Знайдемо образи векторів базису. Ці образи є одиничними векторами $\widetilde{\mathbf{e}}_1$, $\widetilde{\mathbf{e}}_2$, отриманими поворотом на кут φ проти годинникової стрілки векторів $\mathbf{e}_1$ і $\mathbf{e}_2$ (див. рис. 3.2). З малюнка видно, що $\widetilde{\mathbf{e}}_1$, $\widetilde{\mathbf{e}}_2$ мають такі координати в заданому базисі:

$$\widetilde{\mathbf{e}}_1 = \mathcal{A}\mathbf{e}_1 = (\cos\varphi, \sin\varphi),\ \widetilde{\mathbf{e}}_2 = \mathcal{A}\mathbf{e}_2 = (-\sin\varphi, \cos\varphi), \tag{3.9}$$

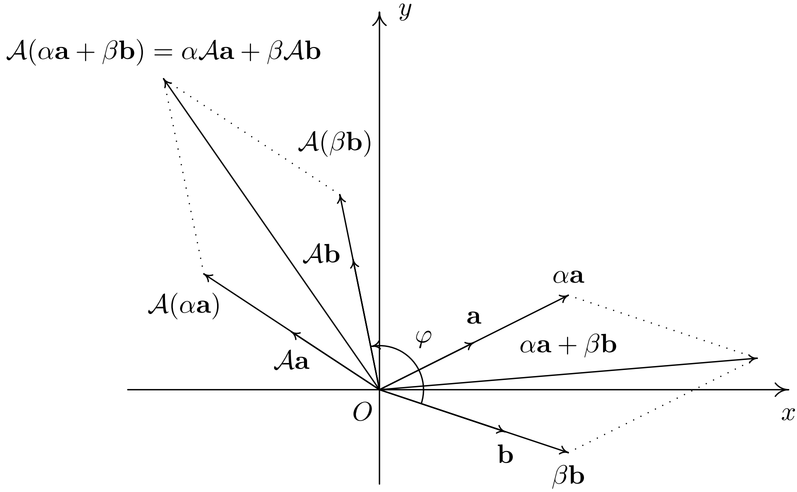

Рис. 3.1: Поворот на кут φ

отже, матриця оператора $\mathbf{A}$ має вигляд

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

За допомогою цієї матриці поворот будь-якого вектора $\mathbf{x} = (x, y)$ (а, виходить, і радіус-вектора, а, виходить, і будь-якої точки) на кут φ можна виконати за формулою (3.5):

$$[\mathbf{y}] = \begin{pmatrix} \widetilde{x} \\ \widetilde{y} \end{pmatrix} = \mathbf{A}^T[\mathbf{x}] =$$
$$= \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\varphi + y\sin\varphi \\ -x\sin\varphi + y\cos\varphi \end{pmatrix},$$

або в координатній формі:

$$\widetilde{x} = x\cos\varphi + y\sin\varphi,$$
$$\widetilde{y} = -x\sin\varphi + y\cos\varphi.$$

□

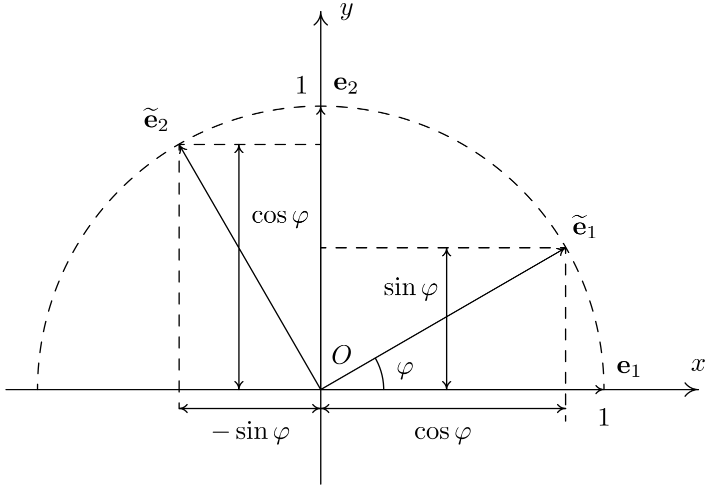

Рис. 3.2: Поворот базиса

Приклад 3.3. *Оператор $\mathcal{A}$, діючи на вектор $\mathbf{x}$ звичайної декартової площини, що вважається простором $\mathbf{R}^2$, дзеркально відбиває його відносно прямої l з напрямним вектором $\mathbf{s} = (s_1, s_2)$, $|\mathbf{s}| = 1$. Перевірити лінійність цього оператора і знайти його матрицю в базисі $\mathbf{e}_1 = (1; 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0; 1)$.*

Розв'язання. На рис. 3.3 видно, що сума вектора $\mathbf{x}$ і його образа $\mathbf{y}$ для такої дії оператора належить прямій l, щодо якої відбувається дзеркальне відображення, і довжина суми в два рази більше проекції вектора $\mathbf{x}$ на цю пряму. Алгебраїчно цей факт можна записати так: $\mathbf{x}+\mathbf{y} = 2(\mathbf{x}\cdot\mathbf{s})\mathbf{s}$. Звідси можна знайти образ $\mathbf{y} = \mathcal{A}\mathbf{x} = 2(\mathbf{x}\cdot\mathbf{s})\mathbf{s} - \mathbf{x}$. Оператор $\mathcal{A}$ лінійний, бо

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(\alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{z}) &= 2[(\alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{z})\cdot\mathbf{s}]\mathbf{s} - \alpha\mathbf{x} - \beta\mathbf{z} = \\ &= 2(\alpha\mathbf{x}\cdot\mathbf{s}+\beta\mathbf{z}\cdot\mathbf{s})\mathbf{s} - \alpha\mathbf{x} - \beta\mathbf{z} = \\ &= \alpha[2(\mathbf{x}\cdot\mathbf{s})\mathbf{s}-\mathbf{x}] + \beta[2(\mathbf{z}\cdot\mathbf{s})\mathbf{s}-\mathbf{z}] = \alpha\mathcal{A}\mathbf{x} + \beta\mathcal{A}\mathbf{z}.\end{aligned}$$

У координатній формі дія оператора записується таким чином ($\mathbf{x} =$

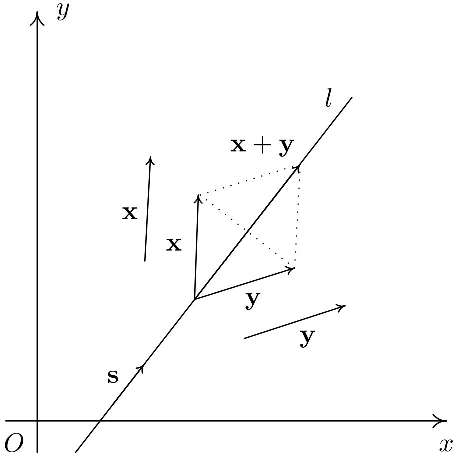

Рис. 3.3: Дзеркальне відображення

$= (x, y)$, $\mathbf{y} = (\widetilde{x}, \widetilde{y}))$:

$$\begin{aligned}\mathbf{y} &= (\widetilde{x}, \widetilde{y}) = \mathcal{A}\mathbf{x} = \mathcal{A}(x, y) = \\ &= 2[(x, y) \cdot (s_1, s_2)](s_1, s_2) - (x, y) = (2xs_1 + 2ys_2)(s_1, s_2) - (x, y) = \\ &= (2xs_1^2 + 2ys_1 s_2 - x, 2xs_1 s_2 + 2ys_2^2 - y).\end{aligned} \tag{3.10}$$

Застосовуючи цю формулу до векторів $\mathbf{e}_1$ і $\mathbf{e}_2$, дістаємо

$$\mathcal{A}\mathbf{e}_1 = \mathcal{A}(1, 0) = (2s_1^2 - 1, 2s_1 s_2),\ \mathcal{A}\mathbf{e}_2 = \mathcal{A}(0, 1) = (2s_1 s_2, 2s_2^2 - 1). \tag{3.11}$$

Виходить, матриця даного лінійного оператора має вигляд

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2s_1^2 - 1 & 2s_1 s_2 \\ 2s_1 s_2 & 2s_2^2 - 1 \end{pmatrix}.$$

$\square$

Приклад 3.4. *Оператор $\mathcal{A}$ називається* ***гомотетією*** *з коефіцієнтом λ, якщо для будь-якого вектора $\mathbf{x}$ лінійного простору $\mathcal{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$, $(\lambda \neq 0)$. Гомотетія називається також розтягом $(\lambda > 1)$ або стиском $(0 < \lambda < 1)$. Перевірити лінійність цього оператора в n-вимірному просторі і знайти його матрицю в базисі (1.8).*

Розв'язання. Лінійність оператора гомотетії випливає з виконання властивості

$$\mathcal{A}(\alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{y}) = \lambda(\alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{y}) = \alpha(\lambda\mathbf{x})+\beta(\lambda\mathbf{y}) = \alpha\mathcal{A}\mathbf{x}+\beta\mathcal{A}\mathbf{y}.$$

Образи базисних векторів мають вигляд

$$\begin{aligned}&\mathcal{A}\mathbf{e}_1 = \lambda\mathbf{e}_1 = (\lambda, 0, \ldots, 0),\ \mathcal{A}\mathbf{e}_2 = \lambda\mathbf{e}_2 = (0, \lambda, \ldots, 0),\ \ldots\ ,\\ &\mathcal{A}\mathbf{e}_n = \lambda\mathbf{e}_n = (0, 0, \ldots, \lambda),\end{aligned}$$

тому матриця такого оператора в потрібному базисі виходить діагональною:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda & \ldots & 0 \\ \multicolumn{4}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda \end{pmatrix}.$$

□

3.2 Дії з операторами

Виявляється, не тільки лінійні оператори виконують дії, але й над ними теж можна виконувати дії.

Нехай оператори $\mathcal{A}$ і $\mathcal{B}$ діють у лінійному просторі $\mathcal{L}$. Тоді їх ***сумою*** називають оператор, що позначається $\mathcal{A}+\mathcal{B}$ і дорівнює сумі дій операторів $\mathcal{A}$ і $\mathcal{B}$:

$$(\mathcal{A}+\mathcal{B})\mathbf{x} = \mathcal{A}\mathbf{x}+\mathcal{B}\mathbf{x}.$$

Добутком оператора $\mathcal{A}$ на число λ, називається оператор $\lambda\mathcal{A}$, що множить образ вектора $\mathbf{x}$ на число λ:

$$(\lambda\mathcal{A})\mathbf{x} = \lambda(\mathcal{A}\mathbf{x}).$$

Неважко переконатися в лінійності обох операторів. Множина лінійних операторів із введеними операціями додавання операторів і множення оператора на число сама є лінійним простором. Дійсно, нульовий оператор $\mathcal{O}$, що може вважатися нульовим вектором у просторі лінійних операторів, уже був введений у попередньому п. Оператором, протилежним оператору $\mathcal{A}$, будемо вважати оператор $-\mathcal{A} = (-1)\mathcal{A}$. Тоді аксіоми лінійного простору, введені в розділі 1.1, будуть у термінах операторів виглядати так:

1. $\mathcal{A}+\mathcal{B} = \mathcal{B}+\mathcal{A}$.

2. $(\mathcal{A}+\mathcal{B})+\mathcal{C}=\mathcal{A}+(\mathcal{B}+\mathcal{C})$.
3. $\exists(\mathcal{O})\forall(\mathcal{A})\ \mathcal{A}+\mathcal{O}=\mathcal{A}$.
4. $\forall(\mathcal{A})\exists(-\mathcal{A})\ \mathcal{A}+(-\mathcal{A})=\mathcal{O}$.
5. $1\cdot\mathcal{A}=\mathcal{A}$.
6. $\lambda(\mu\mathcal{A})=(\lambda\mu)\mathcal{A}$.
7. $\lambda(\mathcal{A}+\mathcal{B})=\lambda\mathcal{A}+\lambda\mathcal{B}$.
8. $(\lambda+\mu)\mathcal{A}=\lambda\mathcal{A}+\mu\mathcal{A}$.

Самостійно перевірте, що всі вони виконуються. Якщо простір $\mathcal{L}$ n-вимірний, то простір лінійних операторів має розмірність n^2.

Якщо $\mathcal{A}\mathbf{x}=\mathbf{o}$ тільки для вектора $\mathbf{x}=\mathbf{o}$, то оператор $\mathcal{A}$ називається ***невиродженим***; у супротивному випадку він називається ***виродженим***. Визначник матриці $\mathbf{A}$ невиродженого оператора не є нулем, інакше система рівнянь $\mathbf{A}[\mathbf{x}]=\mathbf{o}$ буде мати й ненульові розв'язки.

В подальшій таблиці, крім розглянутих, показані й інші часто використовувані оператори та дії над ними. Для n-вимірного простору наведені й матриці операторів, причому, оператори $\mathcal{A}$ і $\mathcal{B}$ мають, відповідно, матриці $\mathbf{A}$ і $\mathbf{B}$. Останні три оператори діють в евклідовому просторі, а відомості про їхні матриці справедливі тільки для ортонормованих базисів.

Відзначимо, що для кожного оператора існує єдиний спряжений йому оператор, а для кожного невиродженого оператора існує обернений йому оператор. Наприклад, ортогональний оператор є невиродженим.

Приклад 3.5. *Нехай площина xOy спочатку повертається на кут φ (оператор $\mathcal{A}$), а потім над нею виконується гомотетія з коефіцієнтом λ (оператор $\mathcal{B}$). Знайти лінійний опратор, що виконує перелічені дії в зазначеному порядку.*

Розв'язання. Оператор, що реалізує задану послідовність дій, — це добуток операторів $\mathcal{A}$ і $\mathcal{B}$: $(\mathcal{B}\circ\mathcal{A})\mathbf{x}=\mathcal{B}(\mathcal{A}\mathbf{x})$ (див. табл.). Важливо те, що отримані в прикладах 3.2 і 3.4 матриці операторів дозволяють знайти і матрицю $\mathbf{C}$ шуканого оператора:

$$\mathbf{C}=\mathbf{BA}=\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}=$$
$$=\begin{pmatrix}\lambda\cos\varphi & -\lambda\sin\varphi\\ \lambda\sin\varphi & \lambda\cos\varphi\end{pmatrix}=\lambda\mathbf{A}.$$

Назва оператора	**Позначення**	**Визначальна властивість**	**Матриця**
Тотожний оператор	$\mathcal{E}$	$\mathcal{E}\mathbf{x} = \mathbf{x}$	$\mathbf{E}$
Нульовий оператор	$\mathcal{O}$	$\mathcal{O}\mathbf{x} = \mathbf{o}$	$\mathbf{O}$
Сума операторів	$\mathcal{A} + \mathcal{B}$	$(\mathcal{A} + \mathcal{B})\mathbf{x} = \mathcal{A}\mathbf{x} + \mathcal{B}\mathbf{x}$	$\mathbf{A} + \mathbf{B}$
Добуток оператора на число	$\lambda\mathcal{A}$	$(\lambda\mathcal{A})\mathbf{x} = \lambda(\mathcal{A}\mathbf{x})$	$\lambda\mathbf{A}$
Добуток операторів	$\mathcal{B} \circ \mathcal{A}$	$(\mathcal{B} \circ \mathcal{A})\mathbf{x} = \mathcal{B}(\mathcal{A}\mathbf{x})$	$\mathbf{BA}$
Обернений оператор	$\mathcal{A}^{-1}$	$\mathcal{A}^{-1} \circ \mathcal{A} = \mathcal{A} \circ \mathcal{A}^{-1} = \mathcal{E}$	$\mathbf{A}^{-1}$
Оператор, спряжений оператору $\mathcal{A}$	$\mathcal{A}^*$	$\mathcal{A}\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot \mathcal{A}^*\mathbf{y}$	$\mathbf{A}^T$
Самоспряжений оператор	$\mathcal{A}$	$\mathcal{A} = \mathcal{A}^*$	$\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$
Ортогональний оператор	$\mathcal{A}$	$\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{A}^*$	$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^T$

Використовуючи цю матрицю, можна знаходити результат перетворення відразу, а не по черзі застосовуючи поворот і гомотетію. □

Оскільки ортогональний оператор є одним з найважливіших операторів, що діють в евклідовому просторі, розглянемо деякі його властивості.

Лема 3.1. *Якщо в евклідовому просторі для всіх векторів* $\mathbf{x}$ *виконується* $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{z}$, *то* $\mathbf{y} = \mathbf{z}$.

Доведення. Якщо $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{z}$, то $\mathbf{x} \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{z}) = 0$. Візьмемо $\mathbf{x} = \mathbf{y} - \mathbf{z}$, тоді $(\mathbf{y} - \mathbf{z})\cdot(\mathbf{y} - \mathbf{z}) = 0$. За першою аксіомою евклідова простору це можливо тільки у випадку, коли $\mathbf{y} - \mathbf{z} = \mathbf{o}$, тобто, коли $\mathbf{y} = \mathbf{z}$. □

Теорема 3.3. *Оператор* $\mathcal{A}$ *зберігає скалярний добуток векторів:* $\mathcal{A}\mathbf{x} \cdot \mathcal{A}\mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ *тоді й тільки тоді, коли він ортогональний.*

Доведення. Нехай оператор $\mathcal{A}$ зберігає скалярний добуток векторів. Тоді

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathcal{A}\mathbf{x} \cdot \mathcal{A}\mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot (\mathcal{A}^* \circ \mathcal{A})\mathbf{y}.$$

З леми відразу дістаємо, що $\mathcal{A}^* \circ \mathcal{A} = \mathcal{E}$. Виходить, що $\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^{-1}$ і тому оператор $\mathcal{A}$ ортогональний.

Нехай тепер оператор $\mathcal{A}$ ортогональний. Використовуючи означення спряженого й ортогонального операторів, дістаємо

$$\mathcal{A}\mathbf{x} \cdot \mathcal{A}\mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot (\mathcal{A}^* \circ \mathcal{A})\mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot (\mathcal{A}^{-1} \circ \mathcal{A})\mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot \mathcal{E}\mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}.$$

□

Висновок 3.1. *Ортогональний оператор зберігає довжини векторів, а в евклідовому афінному просторі — відстань між точками.*

Висновок 3.2. *В евклідовому афінному просторі ортогональний оператор зберігає кути між прямими та гіперплощинами, а тоді й їхню паралельність та перпендикулярність.*

Висновок 3.3. *Ортогональний оператор переводить ортонормований базис в ортонормований.*

Доведення. Нехай $< \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n >$ — ортонормований базис, а $< \widetilde{\mathbf{e}}_1, \ldots, \widetilde{\mathbf{e}}_n >$ — набір векторів, у які цей базис переводиться ортогональним оператором. З попередніх результатів одержуємо, що вектори $\widetilde{\mathbf{e}}_1, \ldots, \widetilde{\mathbf{e}}_n$ ортогональні і мають одиничну довжину, а тоді з теорем 2.5 и 1.8 випливає, що $< \widetilde{\mathbf{e}}_1, \ldots, \widetilde{\mathbf{e}}_n >$ — ортонормований базис. □

Матриця ортогонального оператора, як це зазначено в таблиці операторів, має властивість $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^T$. Така матриця називається ***ортогональною***.

Теорема 3.4. *Якщо оператор $\mathcal{A}$ переводить хоч один ортонормований базис $< \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n >$ в ортонормований базис $< \widetilde{\mathbf{e}}_1, \ldots, \widetilde{\mathbf{e}}_n >$, то такий оператор ортогональний.*

Доведення. Позначимо

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j; \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

З ортонормованості базисів $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$, $\widetilde{\mathbf{e}}_i \cdot \widetilde{\mathbf{e}}_j = \delta_{ij}$. Тому

$$\widetilde{\mathbf{e}}_i \cdot \widetilde{\mathbf{e}}_j = \mathcal{A}\mathbf{e}_i \cdot \mathcal{A}\mathbf{e}_j = \mathbf{e}_i \cdot (\mathcal{A}^* \circ \mathcal{A})\mathbf{e}_j = \delta_{ij}.$$

Від цієї рівності віднімемо рівність $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$ і дістанемо

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_i \cdot (\mathcal{A}^* \circ \mathcal{A})\mathbf{e}_j - \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = 0;\ i = \overline{1,n};\\ \mathbf{e}_i \cdot ((\mathcal{A}^* \circ \mathcal{A})\mathbf{e}_j - \mathbf{e}_j) = 0;\ i = \overline{1,n};\\ \mathbf{e}_i \cdot (\mathcal{A}^* \circ \mathcal{A} - \mathcal{E})\mathbf{e}_j = 0;\ i = \overline{1,n}.\end{aligned} \tag{3.12}$$

Якщо хоча б для одного j виконується $(\mathcal{A}^* \circ \mathcal{A} - \mathcal{E})\mathbf{e}_j \neq \mathbf{o}$, то з (3.12) випливає, що вектор $(\mathcal{A}^* \circ \mathcal{A} - \mathcal{E})\mathbf{e}_j$ ортогональний n векторам $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$. Тоді з теореми 2.5 дістаємо, що в n-вимірному просторі існує базис з $(n+1)$-го вектора: $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$, $(\mathcal{A}^* \circ \mathcal{A} - \mathcal{E})\mathbf{e}_j$. Оскільки таке неможливо, то всі вектори $(\mathcal{A}^* \circ \mathcal{A} - \mathcal{E})\mathbf{e}_j$, $j = \overline{1,n}$, нульові. Але тоді й оператор $\mathcal{A}^* \circ \mathcal{A} - \mathcal{E}$ теж нульовий. Дійсно, для будь-якого вектора $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + \ldots + x_n\mathbf{e}_n$ буде виконуватись

$$\begin{aligned}(\mathcal{A}^* \circ \mathcal{A} - \mathcal{E})\mathbf{x} = (\mathcal{A}^* \circ \mathcal{A} - \mathcal{E})(x_1\mathbf{e}_1 + \ldots + x_n\mathbf{e}_n) =\\ = x_1(\mathcal{A}^* \circ \mathcal{A} - \mathcal{E})\mathbf{e}_1 + \ldots + x_n(\mathcal{A}^* \circ \mathcal{A} - \mathcal{E})\mathbf{e}_n = \mathbf{o}.\end{aligned}$$

Але, коли $\mathcal{A}^* \circ \mathcal{A} - \mathcal{E} = \mathcal{O}$, то $\mathcal{A}^* \circ \mathcal{A} = \mathcal{E}$ і $\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{A}^*$, що й треба було довести. □

Теорема 3.5. *Визначник матриці ортогонального оператора дорівнює* ± 1*.*

Доведення. Нехай $\mathbf{A}$ — матриця ортогонального оператора. Тоді, як зазначено в таблиці операторів, $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^T$. Якщо помножити обидві частини цієї рівності на $\mathbf{A}$ зліва, дістанемо $\mathbf{A}\mathbf{A}^T = \mathbf{E}$. Враховуючи, що $|\mathbf{A}| = |\mathbf{A}^T|$, $|\mathbf{E}| = 1$, приходимо до рівняння $|\mathbf{A}|^2 = 1$. Це й означає, що $|\mathbf{A}| = \pm 1$. □

Приклад 3.6. *У прикладі 3.2 було показано, що поворот площини на кут* φ *є лінійним оператором і перетворює ортонормований базис* $\mathbf{e}_1 = (1;0)$, $\mathbf{e}_2 = (0;1)$ *в ортонормований базис* (3.9)*. Тому поворот є ортогональним оператором.*

Приклад 3.7. *У прикладі 3.3 лінійний оператор осьової симетрії на площині переводив ортонормований базис* $\mathbf{e}_1 = (1;0)$, $\mathbf{e}_2 = (0;1)$ *в ортонормо-*

ваний базис (3.11). *Ортонормованість останнього випливає з того, що*

$$\begin{aligned}\mathcal{A}\mathbf{e}_1\cdot\mathcal{A}\mathbf{e}_2 &= (2s_1^2-1, 2s_1s_2)\cdot(2s_1s_2, 2s_2^2-1) = \\ &= 4s_1^3s_2 - 2s_1s_2 + 4s_1s_2^3 - 2s_1s_2 = 4s_1s_2(s_1^2+s_2^2-1) = 0,\\ |\mathcal{A}\mathbf{e}_1| &= (2s_1^2-1)^2 + (2s_1s_2)^2 = 4s_1^4 - 4s_1^2 + 1 + 4s_1^2s_2^2 = \\ &= 4s_1^2(s_1^2+s_2^2-1)+1 = 1,\\ |\mathcal{A}\mathbf{e}_2| &= (2s_1s_2)^2 + (2s_2^2-1)^2 = 4s_1^2s_2^2 + 4s_2^4 - 4s_2^2 + 1 = \\ &= 4s_2^2(s_1^2+s_2^2-1)+1 = 1,\end{aligned}$$

тому що для одиничного вектора (s_1, s_2) *виконується* $s_1^2+s_2^2=1$. *Отже, оператор симетрії теж ортогональний.*

Приклад 3.8. *У прикладі 3.4 оператор* $\mathcal{A}$ *не ортогональний, бо він переводить ортонормований базис* (1.8) *тільки в ортогональний базис, але не в ортонормований (довжини нових базисних векторів у загальному випадку дорівнюють* $|\lambda|$*, а не 1).*

Наступна теорема показує, що будь-який ортогональний оператор на площині зводиться до вже розглянутих нами операторам повороту й осьової симетрії.

Теорема 3.6. *Ортогональний оператор на площині — це або поворот навколо початку координат на деякий кут, або дзеркальне відображення відносно деякої прямої.*

3.3 Перехід до нового базису

Нехай в n-вимірному просторі невироджений лінійний оператор $\mathcal{S}$ переводить базис $\mathbf{e} =< \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n >$ у базис $\widetilde{\mathbf{e}} =< \widetilde{\mathbf{e}}_1, \ldots, \widetilde{\mathbf{e}}_n >$. Перший базис умовно будемо називати старим, а второй — новим. Нехай вектор $\mathbf{x}$ у старому базисі має розклад $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + \ldots + x_n\mathbf{e}_n = [\mathbf{x}]_{\mathbf{e}}^T[\mathbf{e}]$. Які компоненти $\widetilde{x}_1, \ldots, \widetilde{x}_n$ цей вектор буде мати в новому базисі? Позначимо через $\mathbf{S}$, $|\mathbf{S}| \neq 0$, матрицю оператора $\mathcal{S}$ у старому базисі і застосуємо формулу (3.6): $[\widetilde{\mathbf{e}}] = \mathbf{S}^T[\mathbf{e}]$. Дістанемо

$$\mathbf{x} = [\mathbf{x}]_{\widetilde{\mathbf{e}}}^T[\widetilde{\mathbf{e}}] = [\mathbf{x}]_{\widetilde{\mathbf{e}}}^T\mathbf{S}^T[\mathbf{e}] = (\mathbf{S}[\mathbf{x}]_{\widetilde{\mathbf{e}}})^T\mathbf{e}, \tag{3.13}$$

де $[\mathbf{x}]_{\widetilde{\mathbf{e}}}^T = (\widetilde{x}_1, \ldots, \widetilde{x}_n)$ — зображення вектора $\mathbf{x}$ у новому базисі. Порівнюючи формулу (3.13) з розкладом $\mathbf{x} = [\mathbf{x}]_{\mathbf{e}}^T[\mathbf{e}]$ і, з огляду на однозначність розкладання вектора за базисом, дійдемо висновку, що

$$[\mathbf{x}]_{\mathbf{e}} = \mathbf{S}[\mathbf{x}]_{\widetilde{\mathbf{e}}}. \tag{3.14}$$

Ця формула називається ***переходом від нових компонентів вектора до старих***. Зворотний перехід одержимо, якщо помножимо обидві частини останньої рівності на матрицю $\mathbf{S}^{-1}$, зворотну матриці $\mathbf{S}$:

$$[\mathbf{x}]_{\widetilde{\mathbf{e}}} = \mathbf{S}^{-1}[\mathbf{x}]_{\mathbf{e}}. \tag{3.15}$$

Приклад 3.9. *Для приклада 3.1, знайти компоненти вектора* $\mathbf{x}$ *у базисі* (3.8)*, якщо в базисі* (3.7) *він має розклад* $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$*.*

Розв'язання. Спочатку знайдемо матрицю оператора, що переводить базис (3.7) у базис (3.8). Очевидно, стовпцями такої матриці є вектори базису (3.8):

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Неважко побачити, що матрицею, зворотною до матриці $\mathbf{S}$, буде вона сама і тому за формулою (3.15), знаходимо координати вектора $\mathbf{x}$ у новому базисі:

$$[\mathbf{x}]_{\widetilde{\mathbf{e}}} = \begin{pmatrix} \widetilde{x}_1 \\ \widetilde{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}.$$

Таким чином, перехід до нового базису означає просто перестановку компонентів вектора. □

Тепер додатково припустимо, що в n-вимірному просторі, крім оператора $\mathcal{S}$, діє оператор $\mathcal{A}$, що має матрицю $\mathbf{A}$ у базисі $\mathbf{e}$. Дослідимо, як зміниться ця матриця при переході до базису $\widetilde{\mathbf{e}}$. Нехай $\mathbf{y}$ — образ вектора $\mathbf{x}$ для оператора $\mathcal{A}$: $\mathbf{y} = \mathcal{A}\mathbf{x}$. З формули (3.14) $[\mathbf{x}]_{\mathbf{e}} = \mathbf{S}[\mathbf{x}]_{\widetilde{\mathbf{e}}}$, $[\mathbf{y}]_{\mathbf{e}} = \mathbf{S}[\mathbf{y}]_{\widetilde{\mathbf{e}}}$ і тому

$$\mathbf{S}[\mathbf{y}]_{\widetilde{\mathbf{e}}} = [\mathbf{y}]_{\mathbf{e}} = \mathbf{A}[\mathbf{x}]_{\mathbf{e}} = \mathbf{A}\mathbf{S}[\mathbf{x}]_{\widetilde{\mathbf{e}}}.$$

Множачи обидві частини цієї рівності зліва на $\mathbf{S}^{-1}$, знаходимо, що $[\mathbf{y}]_{\widetilde{\mathbf{e}}} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S}[\mathbf{x}]_{\widetilde{\mathbf{e}}}$. Таким чином,

$$\widetilde{\mathbf{A}} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S} \tag{3.16}$$

є матрицею оператора $\mathcal{A}$ в новому базисі (див. теорему 3.1).

Приклад 3.10. *Для приклада 3.1 знайти матрицю оператора $\mathcal{A}$ в базисі* (3.8).

Розв'язання. У попередньому прикладі матриця $\mathbf{S}$ переходу від старого до нового базису була знайдена і виявилося, що вона дорівнює своїй зворотній матриці. Тому

$$\widetilde{\mathbf{A}} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Помножимо цю матрицю на вектор $\mathbf{x} = (x_1, x_2) = [\mathbf{x}]_{\widetilde{\mathbf{e}}}^T = (x_2, x_1)^T$:

$$\widetilde{\mathbf{A}}[\mathbf{x}]_{\widetilde{\mathbf{e}}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix} = \\ = x_2\widetilde{\mathbf{e}}_1 + (x_1 - x_2)\widetilde{\mathbf{e}}_2 = (x_1 - x_2, x_2).$$

□

3.4 Лінійні підпростори і СЛАР

Непорожня множина $\mathcal{L}'$ векторів лінійного простору $\mathcal{L}$ називається ***лінійним підпростором***, якщо будь-яка лінійна комбінація векторів з $\mathcal{L}'$ належить $\mathcal{L}'$. Неважко помітити, що нульовий вектор як добуток $0\mathbf{x}$ належить $\mathcal{L}'$, і вектор, протилежний вектору $\mathbf{x}$, як добуток $(-1)\mathbf{x}$ теж належить $\mathcal{L}'$. Тому всі аксіоми лінійного простору для $\mathcal{L}'$ виконуються і, виходить, лінійний підпростір сам є лінійним простором.

Зрозуміло, що вимірність підпростору не перевищує вимірності самого простору, тому що вектори, лінійно незалежні в підпросторі, залишаться такими в усім просторі.

Приклад 3.11. *У звичайному просторі всі прямі й площини, що проходять через початок координат, є лінійними підпросторами. У просторі многочленів степеня не вище n лінійні підпростори утворюють многочлени степеня не вище k ($k < n$).*

Розглянемо тепер розв'язки систем лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) з точки зору теорії лінійних просторів. Нехай є однорідна СЛАР вигляду

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n = 0, \end{cases} \tag{3.17}$$

яку можна записати коротко в матричній формі як

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{o}, \tag{3.18}$$

де

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{o} = \begin{pmatrix} 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Теорема 3.7. *Якщо $\mathbf{x}_1$ і $\mathbf{x}_2$ — розв'язки однорідної СЛАР (3.17), то їхня лінійна комбінація $\alpha\mathbf{x}_1 + \beta\mathbf{x}_2$ теж буде розв'язком цієї СЛАР.*

Доведення. Для доведення досить підставити зазначену лінійну комбінацію в ліву частину рівняння (3.18):

$$\mathbf{A}(\alpha\mathbf{x}_1 + \beta\mathbf{x}_2) = \alpha\mathbf{A}\mathbf{x}_1 + \beta\mathbf{A}\mathbf{x}_2 = \alpha\mathbf{o} + \beta\mathbf{o} = \mathbf{o}.$$

□

Таким чином, розв'язки однорідної СЛАР утворюють лінійний простір (виконання аксіом лінійного простору випливає з їхнього виконання для n-ок чисел і того, що $\mathbf{o}$ і $-\mathbf{x}$ є розв'язками однорідної СЛАР, якщо $\mathbf{x}$ є таким розв'язком).

Визначимо вимірність цього простору.

Теорема 3.8. *Якщо ранг матриці системи дорівнює r, то система має $n - r$ лінійно- незалежних розв'язків.*

Доведення. Як відомо, за допомогою елементарних перетворень матрицю системи (3.17) можна привести до східчастого вигляду ($c_{11} \neq 0$, …, $c_{rr} \neq$ $\neq 0$):

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1r} & c_{1r+1} & \ldots & c_{1n} \\ 0 & c_{22} & \ldots & c_{2r} & c_{2r+1} & \ldots & c_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & c_{rr} & c_{rr+1} & \ldots & c_{rn} \end{pmatrix},$$

якому відповідає СЛАР, еквівалентна системі (3.17):

$$\begin{cases} c_{11}x'_1 + c_{12}x'_2 + \ldots + c_{1r}x'_r & + \quad c_{1r+1}x'_{r+1} + \ldots + c_{1n}x'_n = 0, \\ \qquad\quad c_{22}x'_2 + \ldots + c_{2r}x'_r & + \quad c_{2r+1}x'_{r+1} + \ldots + c_{2n}x'_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ \qquad\qquad\qquad\quad c_{rr}x'_r & + \quad c_{rr+1}x'_{r+1} + \ldots + c_{rn}x'_n = 0. \end{cases} \tag{3.19}$$

Невідомі $x'_{r+1}, \ldots, x'_n$ називають ***вільними невідомими***, а невідомі $x'_1, \ldots, x'_r$ — ***базисними***. Запишемо $n-r$ розв'язків системи (3.19), вибравши вільні невідомі так, щоб $x'_{r+i} = 1$ у розв'язку $\mathbf{x}_i$, а в інших розв'язках, щоб $x'_{r+i} = 0$. Базисні невідомі знайдемо по вільним, застосувавши зворотний хід методу Гаусса до системи (3.19):

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} x_{11} \\ \ldots \\ x_{1r} \\ 1 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} x_{21} \\ \ldots \\ x_{2r} \\ 0 \\ 1 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix}, \ \ldots, \mathbf{e}_{n-r} = \begin{pmatrix} x_{n-r1} \\ \ldots \\ x_{n-rr} \\ 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{3.20}$$

Ці розв'язки лінійно незалежні, бо, якщо $\lambda_1\mathbf{e}_1 + \ldots + \lambda_{n-r}\mathbf{e}_{n-r} = \mathbf{o}$, то, використовуючи останні $n-r$ компонент векторів, дістанемо $\lambda_1 = \cdots = \lambda_{n-r} = 0$. □

Будь-яка система з $n-r$ лінійно-незалежних розв'язків однорідної системи (3.17) називається її ***фундаментальною системою розв'язків***.

Теорема 3.9. *Упорядкована система розв'язків* (3.20) *однорідної СЛАР з матрицею системи рангу r є базисом лінійного простору розв'язків цієї СЛАР.*

Доведення. Лінійна незалежність розв'язків (3.20) була показана в попередній теоремі.

Нехай

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_r \\ x_{r+1} \\ x_{r+2} \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$$

— довільний розв'язок системи (3.17). Розглянемо вектор-стовпець

$$\mathbf{y} = \mathbf{x} - x_{r+1}\mathbf{e}_1 - \ldots - x_n\mathbf{e}_{n-r} =$$
$$= \begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_r \\ x_{r+1} \\ x_{r+2} \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_{r+1}x_{11} \\ \ldots \\ x_{r+1}x_{1r} \\ x_{r+1} \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix} - \cdots - \begin{pmatrix} x_n x_{n-r1} \\ \ldots \\ x_n x_{n-rr} \\ 0 \\ 0 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \ldots \\ y_r \\ 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3.21}$$

Оскільки $\mathbf{y}$ є лінійною комбінацією векторів $\mathbf{x}, \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_{n-r}$, то $\mathbf{y}$ буде розв'язком системи (3.17), а тому й системи (3.19). Підставляючи в останню систему компоненти цього розв'язку $x_1' = y_1, \ldots, x_r' = y_r, x_{r+1}' = 0, \ldots, x_n' = 0$, одержимо однорідну систему рівнянь

$$\begin{cases} c_{11}y_1 + c_{12}y_2 + \ldots + c_{1r}y_r = 0, \\ \qquad\qquad c_{22}y_2 + \ldots + c_{2r}y_r = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad c_{rr}y_r = 0, \end{cases}$$

яка має єдиний розв'язок $y_1 = \ldots = y_r = 0$. Тому $\mathbf{y} = \mathbf{o}$ і з рівності (3.21) знаходимо, що

$$\mathbf{x} = x_{r+1}\mathbf{e}_1 + \ldots + x_n\mathbf{e}_{n-r}.$$

Остання рівність означає, що довільно взятий розв'язок однорідної СЛАР є лінійною комбінацією її розв'язків (3.20). Отже, ці розв'язки утворюють базис лінійного простору розв'язків однорідної СЛАР. □

3.4. ЛІнІйнІ пІдпростори І СЛАР

Висновок 3.4. *Вимірність простору розв'язків однорідної СЛАР дорівнює $n - r$, якщо ранг матриці системи дорівнює r.*

Висновок 3.5. *Будь-яка упорядкована фундаментальна система розв'язків однорідної СЛАР є базисом лінійного простору її розв'язків (див. теорему 1.9).*

Висновок 3.6. *Простір розв'язків однорідної СЛАР є $(n - r)$-вимірним підпростором лінійного простору n-ок чисел.*

Нехай $\mathbf{x}_1$, …, $\mathbf{x}_{n-r}$ — фундаментальна система розв'язків однорідної системи (3.17). З вищевикладеного випливає, що вектор-стовпець

$$\overline{\mathbf{x}} = C_1\mathbf{x}_1 + \ldots + C_{n-r}\mathbf{x}_{n-r} \tag{3.22}$$

буде розв'язком цієї системи для будь-яких значень сталих C_1, …, C_{n-r}, а, з іншого боку, будь-який розв'язок системи можна дістати з формули (3.22) для деяких значень цих сталих. Розв'язок (3.22) називається ***загальним розв'язком*** однорідної СЛАР.

Розглянемо тепер неоднорідну СЛАР

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{3.23}$$

де не всі b_i дорівнюють нулю. Цю систему можна записати в матричному вигляді

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \tag{3.24}$$

$\mathbf{b}^T = (b_1, \ldots, b_m)$. Однорідна СЛАР (3.17) називається ***відповідною*** неоднорідній СЛАР (3.23).

Теорема 3.10. *Нехай $\widetilde{\mathbf{x}}$ — який-небудь (частинний) розв'язок неоднорідної СЛАР (3.23), а $\overline{\mathbf{x}}$ — загальний розв'язок відповідної однорідної СЛАР. Тоді вектор-стовпець*

$$\mathbf{x} = \overline{\mathbf{x}} + \widetilde{\mathbf{x}} \tag{3.25}$$

буде розв'язком неоднорідної СЛАР (3.23) і, навпаки, будь-який розв'язок цієї СЛАР буде мати вигляд (3.25).

Доведення. Покажемо, що вектор-стовпець (3.25) є розв'язком неоднорідної системи. Для цього підставимо його в ліву частину рівняння (3.24):

$$\mathbf{A}\mathbf{x} \equiv \mathbf{A}(\overline{\mathbf{x}} + \widetilde{\mathbf{x}}) \equiv \mathbf{A}\overline{\mathbf{x}} + \mathbf{A}\widetilde{\mathbf{x}} \equiv \mathbf{o} + \mathbf{b} \equiv \mathbf{b},$$

бо $\mathbf{A}\overline{\mathbf{x}} \equiv \mathbf{o}$, а $\mathbf{A}\widetilde{\mathbf{x}} \equiv \mathbf{b}$, оскільки $\overline{\mathbf{x}}$ і $\widetilde{\mathbf{x}}$, відповідно, розв'язки однорідної і неоднорідної СЛАР. Виходить, $\mathbf{x}$ — розв'язок неоднорідної СЛАР.

Нехай тепер $\mathbf{y}$ — довільний розв'язок СЛАР (3.23). Покажемо, що він має вигляд (3.25). Візьмемо ще один розв'язок $\widetilde{\mathbf{x}}$ системи (3.23). Тоді, оскільки $\mathbf{A}\mathbf{y} \equiv \mathbf{b}$ і $\mathbf{A}\widetilde{\mathbf{x}} \equiv \mathbf{b}$, то, віднімаючи друг від друга ці рівності, дістаємо $\mathbf{A}(\mathbf{y} - \widetilde{\mathbf{x}}) \equiv \mathbf{o}$. Таким чином, вектор-стовпець $\mathbf{y} - \widetilde{\mathbf{x}}$ є розв'язком однорідної СЛАР. Але всі її розв'язки можна записати у вигляді (3.22) і тому $\mathbf{y} - \widetilde{\mathbf{x}} = \overline{\mathbf{x}}$. Виходить, $\mathbf{y} = \overline{\mathbf{x}} + \widetilde{\mathbf{x}}$. □

Розв'язок неоднорідної СЛАР (3.25) називається її ***загальним розв'язком***. Тому доведену теорему можна переформулювати так: *загальний розв'язок неоднорідної СЛАР є сумою її частинного розв'язку і загального розв'язку відповідної однорідної СЛАР.*

Приклад 3.12. *Знайти загальний розв'язок СЛАР*

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 3x_4 + 5x_5 &= 2, \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 4x_4 + x_5 &= 14, \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 5x_4 + 2x_5 &= 16, \\ x_1 + 3x_2 + 12x_3 + 5x_4 + 9x_5 &= 2, \\ 4x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 6x_4 + 3x_5 &= 18. \end{cases}$$

Розв'язання. Застосуємо до заданої системи метод Гаусса. Для цього помножимо перше рівняння послідовно на -2, -3, -1, -4 і результати множень додамо відповідно до другого, третього, четвертого і п'ятого рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 3x_4 + 5x_5 &= 2, \\ -x_2 - 3x_3 - 2x_4 - 9x_5 &= 10, \\ -2x_2 - 11x_3 - 4x_4 - 13x_5 &= 10, \\ x_2 + 8x_3 + 2x_4 + 4x_5 &= 0, \\ -3x_2 - 19x_3 - 6x_4 - 17x_5 &= 10. \end{cases}$$

Тепер друге рівняння помножимо послідовно на -2, 1, -3 і результати множень додамо відповідно до третього, четвертого і п'ятого рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 3x_4 + 5x_5 &= 2, \\ -x_2 - 3x_3 - 2x_4 - 9x_5 &= 10, \\ -5x_3 + 5x_5 &= -10, \\ 5x_3 - 5x_5 &= 10, \\ -10x_3 + 10x_5 &= -20. \end{cases}$$

Нарешті, третє рівняння додамо до четвертого і, помноживши на -2, додамо до п'ятого; відкинувши тотожності $0=0$, отримаємо систему

$$\begin{cases} x_1+2x_2+4x_3+3x_4+5x_5 &= \quad 2, \\ \qquad -x_2-3x_3-2x_4-9x_5 &= \quad 10, \\ \qquad\qquad\qquad -5x_3+5x_5 &= -10. \end{cases} \tag{3.26}$$

Розв'язуючи однорідну систему, що відповідає заданій, дістанемо СЛАР, що відрізняється від системи (3.26) тільки нулями в правих частинах рівнянь:

$$\begin{cases} x_1+2x_2+4x_3+3x_4+5x_5 &= 0, \\ \qquad -x_2-3x_3-2x_4-9x_5 &= 0, \\ \qquad\qquad\qquad -5x_3+5x_5 &= 0. \end{cases}$$

Очевидно, ранг матриці системи дорівнює 3 і її можна переписати таким чином:

$$\begin{cases} x_1+2x_2+4x_3 &= -3x_4-5x_5, \\ \qquad -x_2-3x_3 &= \quad 2x_4+9x_5, \\ \qquad\qquad -5x_3 &= \qquad -5x_5. \end{cases} \tag{3.27}$$

Базисні невідомі — x_1, x_2, x_3, вільні — x_4 і x_5. Отже, розв'язки однорідної системи утворюють двовимірний лінійний простір. Щоб знайти базис (3.20) у цьому просторі, візьмемо $x_4=1$, $x_5=0$ і застосуємо до системи (3.27) зворотний хід методу Гаусса. Дістанемо $x_1=1$, $x_2=-2$, $x_3=0$. Так само розв'язуючи для $x_4=0$, $x_5=1$, знайдемо, що $x_1=15$, $x_2=-12$, $x_3=1$. Отже, шуканий базис має вигляд:

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 15 \\ -12 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Виходить, загальний розв'язок однорідної системи буде таким:

$$\overline{\mathbf{x}} = C_1\mathbf{e}_1 + C_2\mathbf{e}_2.$$

Неоднорідну систему (3.26) перепишемо аналогічно системі (3.27), розділивши останнє рівняння на (-5):

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 2 - 3x_4 - 5x_5, \\ -x_2 - 3x_3 &= 10 + 2x_4 + 9x_5, \\ x_3 &= 2 + x_5. \end{cases}$$

Знайдемо її частинний розв'язок для $x_4 = x_5 = 0$. Дістанемо $x_3 = 2$, $x_2 = -16$, $x_1 = 26$. Цей розв'язок теж можна записати у вигляді вектора-стовпця

$$\widetilde{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 26 \\ -16 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Отже, загальний розв'язок заданої СЛАР має вигляд

$$\mathbf{x} = \overline{\mathbf{x}} + \widetilde{\mathbf{x}} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 15 \\ -12 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 26 \\ -16 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Надаючи різні значення константам C_1 і C_2, можна отримати всі можливі розв'язки СЛАР. □

3.5 Власні вектори

Важливе значення мають вектори, дія лінійного оператора на які зводиться до їхнього множення на деяке число. Образ вектора виходить колінеарним самому вектору, тобто образ вектора міститься на тій самій прямій, на якій знаходиться вихідний вектор. Таким чином, жоден вектор цієї прямої лінійний оператор не в змозі з неї пересунути — дія оператора не змінює цю пряму. В результаті при виконанні деяких умов усі такі прямі для даного оператора виявляються природними осями координат, тобто в цій системі координат матриця лінійного оператора і рівняння пов'язаних з ним геометричних об'єктів здобувають найбільш простий (канонічний) вигляд.

Ненульовий вектор $\mathbf{x}$ називається ***власним*** вектором лінійного оператора $\mathcal{A}$, якщо

$$\mathcal{A}\mathbf{x} = p\mathbf{x}, \tag{3.28}$$

де p — число, яке називають ***власним числом***, або ***власним значенням*** лінійного оператора. Видно, що дійсно $\mathcal{A}\mathbf{x} \parallel p\mathbf{x}$.

Наприклад, власними векторами тотожного і нульового операторів є всі вектори лінійного простору, а власними значеннями, відповідно, 1 і 0.

Якщо вектор $\mathbf{x}$ — власний вектор оператора $\mathcal{A}$, то $\mu\mathbf{x}$ теж буде власним вектором цього оператора, тому що $\mathcal{A}(\mu\mathbf{x}) = \mu(\mathcal{A}\mathbf{x}) = \mu(p\mathbf{x}) = p(\mu\mathbf{x})$. Це й означає, що всі вектори прямої, на якій знаходиться вектор $\mathbf{x}$, оператор не в змозі з неї пересунути. Виходить, і вся пряма залишається під дією оператора незмінною.

Нехай лінійний оператор $\mathcal{A}$ діє в n-вимірному просторі з базисом $< \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n >$ і $\mathbf{A} = \{a_{ij}\}$ — його матриця в цьому базисі. Тоді рівність (3.28) для власного вектора $\mathbf{x}$, що має в даному базисі координати $[\mathbf{x}] = (x_1, \dots, x_n)^T$, можна переписати так:

$$\mathbf{A}[\mathbf{x}] = p[\mathbf{x}].$$

Вектор $\mathbf{x}$ і число p, що задовольняють такій рівності, називають ***власним вектором*** і відповідним йому ***власним числом (значенням)*** матриці $\mathbf{A}$. Останню рівність перепишемо як

$$(\mathbf{A} - p\mathbf{E})[\mathbf{x}] = [\mathbf{o}],$$

де $\mathbf{E}$ — одинична матриця n-го порядку, а потім подамо в координатній формі:

$$\begin{cases} (a_{11} - p)x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - p)x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + (a_{nn} - p)x_n = 0. \end{cases} \tag{3.29}$$

Оскільки власний вектор не дорівнює нулю за означенням, ця однорідна СЛАР обов'язково має ненульовий розв'язок. Але тоді її визначник дорівнює нулю:

$$|\mathbf{A} - p\mathbf{E}| = 0 \Longleftrightarrow \begin{vmatrix} a_{11} - p & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - p & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{22} & \dots & a_{nn} - p \end{vmatrix} = 0. \tag{3.30}$$

Розкриваючи його, дістанемо многочлен n-го степеня відносно p, що позначається $\varphi(p)$ і називається ***характеристичним многочленом матриці*** $\mathbf{A}$. Отже, рівняння (3.30), що називається ***характеристичним рівнянням матриці*** $\mathbf{A}$, має коренями її власні значення. Відзначимо, що в комплексному n-му просторі завжди є n (можливо, комплексних) власних значень матриці $\mathbf{A}$, а в дійсному просторі їх узагалі може не бути.

Теорема 3.11. *Характеристичний многочлен матриці лінійного оператора не залежить від вибору базису.*

Доведення. Нехай $\varphi(p) = |\mathbf{A} - p\mathbf{E}|$ — характеристичний многочлен матриці $\mathbf{A}$ в базисі $< \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n >$. Візьмемо ще один базис $< \widetilde{\mathbf{e}}_1, \ldots, \widetilde{\mathbf{e}}_n >$, в який перший базис переходить за допомогою матриці $\mathbf{S}$, $|\mathbf{S}| \neq 0$, тобто справедлива формула (3.16), де $\widetilde{\mathbf{A}}$ — матриця оператора $\mathcal{A}$ в другому базисі. Тоді

$$
\begin{aligned}
|\widetilde{\mathbf{A}} - p\mathbf{E}| &= |\mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S} - p\mathbf{E}| = |\mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S} - \mathbf{S}^{-1}p\mathbf{E}\mathbf{S}| = \\
&= |\mathbf{S}^{-1}(\mathbf{A} - p\mathbf{E})\mathbf{S}| = |\mathbf{S}^{-1}||\mathbf{A} - p\mathbf{E}||\mathbf{S}| = |\mathbf{A} - p\mathbf{E}| = \varphi(p).
\end{aligned}
$$

□

Ця теорема дозволяє назвати $\varphi(p)$ ***характеристичним многочленом***, а рівняння (3.30)— ***характеристичним рівнянням оператора*** $\mathcal{A}$.

З усього сказаного випливає такий алгоритм обчислення власних значень і відповідних їм власних векторів лінійного оператора $\mathcal{A}$ в n-вимірному просторі. Спочатку треба вибрати деякий базис і в цьому базисі знайти матрицю $\mathbf{A}$ лінійного оператора, потім розв'язати характеристичне рівняння (3.30). Його корені дадуть власні числа лінійного оператора. Нехай p_i — знайдене в такий спосіб власне число. Підставляючи його замість p у СЛАР (3.29) і розв'язуючи її, треба відшукати власний вектор $\mathbf{x}_i$ (в обраному базисі), що відповідає власному значенню p_i. Взагалі, таким чином можна знайти n власних значень і стільки ж відповідних їм власних векторів оператора $\mathcal{A}$.

Приклад 3.13. *Знайти власні вектори лінійного оператора, заданого в деякому базисі матрицею*

$$
\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 5 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.
$$

Розв'язання. Знайдемо характеристичний многочлен оператора (матриці):

$$
\begin{aligned}
|\mathbf{A} - p\mathbf{E}| &= \begin{vmatrix} 2-p & -1 & -2 \\ -1 & 5-p & 1 \\ -2 & 1 & 2-p \end{vmatrix} = \\
&= (2-p)^2(5-p) + 2 + 2 - 4(5-p) - 2(2-p) = \\
&= (4 - 4p + p^2)(5-p) + 4 - 20 + 4p - 4 + 2p = \\
&= 20 - 20p + 5p^2 - 4p + 4p^2 - p^3 + 6p - 20 = \\
&= -p^3 + 9p^2 - 18p.
\end{aligned}
$$

Отже, характеристичне рівняння матриці має вигляд

$$p(p^2 - 9p + 18) = 0.$$

Його корені $p_1 = 0$, $p_2 = 3$, $p_3 = 6$ будуть власними значеннями лінійного оператора. Знайдемо відповідні їм власні вектори.

Для цього складемо систему (3.29):

$$
\left\{
\begin{array}{c}
(2-p)x_1 - x_2 - 2x_3 = 0, \\
-x_1 + (5-p)x_2 + x_3 = 0, \\
-2x_1 + x_2 + (2-p)x_3 = 0,
\end{array}
\right. \tag{3.31}
$$

підставимо в неї $p = p_1 = 0$:

$$
\left\{
\begin{array}{c}
2x_1 - x_2 - 2x_3 = 0, \\
-x_1 + 5x_2 + x_3 = 0, \\
-2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0,
\end{array}
\right.
$$

і розв'яжемо. Якщо перше рівняння додати до третього, дістанемо рівність $0 = 0$, яку можна відкинути. Помноживши друге рівняння на 2 і додавши до першого, прийдемо до системи

$$
\left\{
\begin{array}{c}
9x_2 = 0, \\
-x_1 + 5x_2 + x_3 = 0.
\end{array}
\right.
$$

Її розв'язком буде $x_2 = 0$, $x_1 = \alpha$, $x_3 = \alpha$. Отже, власний вектор у даному випадку буде таким: $[\mathbf{x}_1] = (\alpha, 0, \alpha)^T$, $\alpha \neq 0$. Підставимо тепер у систему

(3.31) $p = 3$:

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 - 2x_3 = 0, \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, \\ -2x_1 + x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

Застосувавши до системи метод виключення невідомих, одержимо

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 - 2x_3 = 0, \\ \quad 3x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$$

Розв'язок системи буде таким: $x_2 = \beta$, $x_3 = -\beta$, $x_1 = \beta$. Відповідний власний вектор: $[\mathbf{x}_2] = (\beta, \beta, -\beta)^T$, $\beta \neq 0$. Підстановка в систему (3.31) $p = p_3 = 6$ дає СЛАР

$$\begin{cases} -4x_1 - x_2 - 2x_3 = 0, \\ -x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ -2x_1 + x_2 - 4x_3 = 0, \end{cases}$$

яка перетворюється в

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ \quad 3x_2 - 6x_3 = 0. \end{cases}$$

Розв'язуючи, знаходимо $x_3 = \gamma$, $x_2 = 2\gamma$, $x_1 = -\gamma$. Дістаємо третій власний вектор $[\mathbf{x}_3] = (-\gamma, 2\gamma, \gamma)^T$, $\gamma \neq 0$. □

Розглянемо теореми про власні вектори лінійного оператора, що пояснюють, чому власні вектори можуть бути координатними ортами в n-вимірному просторі, утворюючи в деякому сенсі найбільш зручну систему координат.

Теорема 3.12. *Власні вектори, що відповідають різним власним значенням самоспряженого оператора (симетричної матриці), ортогональні.*

Доведення. Нехай $\mathcal{A}$ — самосопряжений оператор, тобто $\mathcal{A} = \mathcal{A}^*$, а $\mathbf{x}$ і $\mathbf{y}$ — його власні вектори, що відповідають власним числам p і q, $p \neq q$. Тоді

$$\mathcal{A}\mathbf{x} = p\mathbf{x}, \qquad \mathcal{A}\mathbf{y} = q\mathbf{y}.$$

Помножимо першу рівність на $\mathbf{y}$. Тоді її ліва частина стане дорівнювати

$$\mathbf{y} \cdot \mathcal{A}\mathbf{x} = \mathcal{A}\mathbf{y} \cdot \mathbf{x} = q(\mathbf{y} \cdot \mathbf{x}),$$

а права частина набере вигляду

$$\mathbf{y} \cdot p\mathbf{x} = p(\mathbf{y} \cdot \mathbf{x}).$$

Оскільки ці частини тотожні, то $q(\mathbf{y} \cdot \mathbf{x}) = p(\mathbf{y} \cdot \mathbf{x})$, або $(q - p)(\mathbf{y} \cdot \mathbf{x}) = 0$. Оскільки $p \neq q$, то $\mathbf{y} \cdot \mathbf{x} = 0$, отже, $\mathbf{x}$ і $\mathbf{y}$ ортогональні. □

Теорема 3.13. *Власні значення дійсної симетричної матриці дійсні.*

Доведення. Спочатку покажемо, що для матриць $\mathbf{A} = \{a_{ij}\}$ і $\mathbf{B} = \{b_{ij}\}$, елементи яких є комплексними числами, справедлива рівність

$$\overline{\mathbf{AB}} = \overline{\mathbf{A}} \cdot \overline{\mathbf{B}}, \tag{3.32}$$

де $\overline{\mathbf{A}}$ — матриця, що складається з елементів, комплексно-спряжених відповідним елементам матриці $\mathbf{A}$. Дійсно, користуючись означенням операції множення матриць, дістаємо

$$\overline{\mathbf{AB}} = \overline{\sum_j a_{ij} b_{jk}} = \sum_j \overline{a_{ij} b_{jk}} = \sum_j \overline{a_{ij}}\,\overline{b_{jk}} = \overline{\mathbf{A}} \cdot \overline{\mathbf{B}}.$$

Припустимо тепер, що p — власне значення симетричної матриці $\mathbf{A}$, а $[\mathbf{x}]$ — відповідний власний вектор-стовпець. Тоді

$$\mathbf{A}[\mathbf{x}] = p[\mathbf{x}]. \tag{3.33}$$

Застосуємо до останньої рівності комплексне спряження, використовуючи рівність (3.32) і те, що матриця $\mathbf{A}$ складається з дійсних чисел:

$$\mathbf{A}\overline{[\mathbf{x}]} = \overline{p} \cdot \overline{[\mathbf{x}]}. \tag{3.34}$$

Це означає, що $\overline{p}$ теж буде власним значенням матриці $\mathbf{A}$, а вектор $\overline{[\mathbf{x}]}$ — відповідним йому власним вектором. З огляду на (3.34), помножимо рівність (3.33) на $\overline{[\mathbf{x}]}^T$. В лівій частині рівності одержимо $\overline{[\mathbf{x}]}^T \mathbf{A}[\mathbf{x}] = (\mathbf{A}\overline{[\mathbf{x}]})^T[\mathbf{x}] = \overline{p} \cdot \overline{[\mathbf{x}]}^T[\mathbf{x}]$, а її права частина буде дорівнювати $p\overline{[\mathbf{x}]}^T[\mathbf{x}]$. Отже, $\overline{p} \cdot \overline{[\mathbf{x}]}^T[\mathbf{x}] = p \cdot \overline{[\mathbf{x}]}^T[\mathbf{x}]$, або $(\overline{p} - p) \cdot \overline{[\mathbf{x}]}^T[\mathbf{x}] = 0$. Але, оскільки $\overline{[\mathbf{x}]}^T[\mathbf{x}] \neq 0$, то $p = \overline{p}$ і тому p — дійсне число. □

Теорема 3.14. *Якщо самоспряжений лінійний оператор у n-вимірному просторі має n парами різні власні значення, то з його власних векторів можна скласти ортонормований базис простору.*

Доведення. Виберемо деякий базис у лінійному просторі. У цьому базисі самоспряжений оператор буде мати деяку симетричну матрицю. Відповідно до попередньої теореми всі її власні значення будуть дійсними числами. За умовою доказуваної теореми ці числа парами різні, тому за теоремою 3.12 відповідні їм власні вектори будуть парами ортогональні. Нехай $\mathbf{s}_i$ — i-й власний вектор. Нормуємо його звичайним чином: $\mathbf{s}_i^0 = \mathbf{s}_i/|\mathbf{s}_i|$. Використовуючи теореми 1.9 і 2.5, дійдемо висновку, що $<\mathbf{s}_1^0,\dots,\mathbf{s}_n^0>$ — ортонормований базис. □

Теорема 3.15. *Матриця* $\mathbf{A}$ *лінійного оператора* $\mathcal{A}$ *у базисі* $<\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n>$ *має діагональний вигляд тоді й тільки тоді, коли всі вектори базиса — її власні вектори.*

Доведення. Нехай за базис $<\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n>$ правлять власні вектори матриці $\mathbf{A}$. Оскільки ця матриця складається з образів базисних векторів, а образ базисного вектора в даному випадку має вигляд $\mathcal{A}\mathbf{e}_i = p_i\mathbf{e}_i$, де p_i — власне значення матриці, що відповідає власному вектору $\mathbf{e}_i$, то

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} p_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & p_n \end{pmatrix}. \tag{3.35}$$

Навпаки. Нехай матриця $\mathbf{A}$ має діагональний вигляд (3.35). Оскільки її i-й стовпець є образом базисного вектора $\mathbf{e}_i$, то $\mathbf{A}\mathbf{e}_i = (0,\dots,0,p_i, 0,\dots,0)^T$. Це означає, що в даному базисі має місце розклад $\mathbf{A}\mathbf{e}_i = p_i\mathbf{e}_i$. Тобто $\mathbf{e}_i$ — власний вектор матриці $\mathbf{A}$, а p_i — відповідне йому власне значення. □

3.6 Квадратичні форми

Квадратичною формою n змінних x_1,...,x_n називається многочлен другого степеня цих змінних вигляду

$$Q(x_1,\dots,x_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j, \tag{3.36}$$

де a_{ij} — дійсні числа, що називаються ***коефіцієнтами квадратичної форми*** і задовольняють умову $a_{ij} = a_{ji}$.

Основною задачею теорії квадратичних форм, тісно пов'язаною зі зведенням рівнянь алгебраїчних ліній і поверхонь другого порядку до канонічного вигляду, є зведення квадратичної форми до так званої суми квадратів. Мається на увазі таке лінійне перетворення перемінних x_1, ..., x_n у виразі (3.36), після якого квадратична форма буде містити тільки квадрати перемінних з додатними або від'ємними коефіцієнтами при них. Одним зі способів розв'язання цієї задачі є ***метод Лагранжа***, або ***метод вилучення повних квадратів***.

Розглянемо цей метод. Якщо квадратична форма не містить жодного квадрата якої-небудь змінної, тобто для всіх m коефіцієнти $a_{mm} = 0$, але $Q(x_1, \ldots, x_n) \not\equiv 0$, то знайдуться змінні x_i і x_j, $i \neq j$, такі, що $a_{ij} \neq 0$. В цьому випадку робимо заміну $x_i = y_i - y_j$, $x_j = y_i + y_j$, $x_k = y_k$, $k \neq i$, $k \neq j$, і член квадратичної форми, утримуючий добуток змінних x_i і x_j, перетвориться на два доданки, які вже будуть містити квадрати змінних:

$$2a_{ij}x_ix_j = 2a_{ij}(y_i - y_j)(y_i + y_j) = 2a_{ij}y_i^2 - 2a_{ij}y_j^2.$$

Тому будемо тепер вважати, що квадратична форма містить квадрат хоча б однієї змінної, наприклад, для визначеності x_1^2. Вилучимо в квадратичній формі всі доданки, що містять x_1:

$$\begin{aligned} Q(x_1, \ldots, x_n) &= a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \ldots + 2a_{1n}x_1x_n + \sigma(x_2, \ldots, x_n) = \\ &= \frac{1}{a_{11}}(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n)^2 + \sigma'(x_2, \ldots, x_n), \end{aligned} \tag{3.37}$$

де σ, σ' — многочлени, що не містять змінної x_1. Зробимо заміну змінних $z_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n$, $z_k = x_k$, $k = \overline{2, n}$, після якої квадратична форма (3.37) перетвориться на

$$Q_1(z_1, \ldots, z_n) = \frac{1}{a_{11}}z_1^2 + Q_2(z_2, \ldots, z_n).$$

В цьому виразі $Q_2(z_2, \ldots, z_n)$ теж є квадратичною формою, але вже меншої кількості змінних, ніж Q. Застосовуючи до неї такий самий підхід, вилучимо квадрат змінної z_2 і т.д., доки квадратична форма не набере вигляду

$$Q_3(t_1, \ldots, t_n) = \lambda_1 t_1^2 + \lambda_1 t_2^2 + \ldots + \lambda_n t_n^2,$$

який і називається ***сумою квадратів***, або ***канонічним виглядом*** квадратичної форми.

Приклад 3.14. *Звести до канонічного вигляду квадратичну форму*

$$Q(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_2x_3 + 3x_1x_3.$$

Розв'язання. Оскільки квадрати змінних у квадратичній формі відсутні, зробимо заміну $x_1 = y_1 - y_2$, $x_2 = y_1 + y_2$, $y_3 = x_3$. В результаті задана квадратична форма набере вигляду

$$\begin{aligned} Q_1(y_1, y_2, y_3) &= y_1^2 - y_2^2 + (y_1 + y_2)y_3 + 3(y_1 - y_2)y_3 = \\ &= y_1^2 - y_2^2 + y_1y_3 + y_2y_3 + 3y_1y_3 - 3y_2y_3 = \\ &= y_1^2 - y_2^2 + 4y_1y_3 - 2y_2y_3. \end{aligned}$$

Виконаємо перетворення (3.37):

$$Q_1(y_1, y_2, y_3) = y_1^2 + 4y_1y_3 - y_2^2 - 2y_2y_3 = (y_1 + 2y_3)^2 - y_2^2 - 2y_2y_3 - 4y_3^2.$$

Зробимо заміну змінних $z_1 = y_1 + 2y_3$, $z_2 = y_2$, $z_3 = y_3$ і прийдемо до такого вигляду квадратичної форми:

$$Q_2(z_1, z_2, z_3) = {z_1}^2 - z_2^2 - 2z_2z_3 - 4z_3^2 = {z_1}^2 - (z_2 + z_3)^2 - 3z_3^2.$$

Після заміни $t_1 = z_1$, $t_2 = z_2 + z_3$, $t_3 = z_3$ дістаємо квадратичну форму у вигляді суми квадратів:

$$Q_3(t_1, t_2, t_3) = {t_1}^2 - {t_2}^2 - 3t_3^2.$$

□

Розглянемо тепер інший підхід, заснований на методах теорії лінійних просторів. Для цього повернемося до простору n-ок чисел вигляду $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ з базисом (1.8) і скалярним добутком, означеним, як було розглянуто вище. Тоді квадратичну форму (3.36) можна записати в матричному вигляді:

$$Q(\mathbf{x}) = [\mathbf{x}]^T \mathbf{A} [\mathbf{x}],$$

де $[\mathbf{x}] = (x_1, \ldots, x_n)^T$ — вектор-стовпець, $\mathbf{A} = \{a_{ij}\}$ — симетрична матриця, що називається ***матрицею квадратичної форми***.

Відповідно до теореми 3.2 матрицю $\mathbf{A}$ можна вважати матрицею лінійного оператора $\mathcal{A}$ з дією $\mathcal{A}\mathbf{x} = \mathbf{A}[\mathbf{x}]$ і квадратичну форму записати ще й так:

$$Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \cdot \mathcal{A}\mathbf{x}.$$

Нехай матриця $\mathbf{A}$ має всі різні власні значення p_1, ..., p_n, яким відповідають одиничні власні вектори $\widetilde{\mathbf{e}}_1,\ldots,\widetilde{\mathbf{e}}_n$, що утворюють відповідно до теореми 3.14 ортонормований базис у розглянутому просторі. Візьмемо матрицю $\mathbf{L} = ([\widetilde{\mathbf{e}}_1]\ldots[\widetilde{\mathbf{e}}_n])$, $[\widetilde{\mathbf{e}}_i]^T = (\widetilde{e}^i_1,\ldots,\widetilde{e}^i_n)$, стовпцями якої є власні вектори матриці $\mathbf{A}$. Ця матриця переводить базис $\mathbf{e}$ у базис $\widetilde{\mathbf{e}}$ за формулою (3.6):

$$\mathbf{L}^T[\mathbf{e}] = \begin{pmatrix} [\widetilde{\mathbf{e}}_1]^T \\ \cdots \\ [\widetilde{\mathbf{e}}_n]^T \end{pmatrix} [\mathbf{e}] = \begin{pmatrix} [\widetilde{\mathbf{e}}_1]^T\mathbf{e} \\ \cdots \\ [\widetilde{\mathbf{e}}_n]^T\mathbf{e} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [\widetilde{\mathbf{e}}_1] \\ \cdots \\ [\widetilde{\mathbf{e}}_n] \end{pmatrix} = [\widetilde{\mathbf{e}}],$$

бо

$$[\widetilde{\mathbf{e}}_i]^T\mathbf{e} = (\widetilde{e}^i_1,\ldots,\widetilde{e}^i_n)\begin{pmatrix} [\mathbf{e}_1] \\ [\mathbf{e}_2] \\ \cdots \\ [\mathbf{e}_n] \end{pmatrix} = \widetilde{e}^i_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + \widetilde{e}^i_n\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 1 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} \widetilde{e}^i_1 \\ \widetilde{e}^i_2 \\ \cdots \\ \widetilde{e}^i_n \end{pmatrix} = [\widetilde{\mathbf{e}}_i].$$

Але обидва базиси ортонормовані, отже, $\mathbf{L}$ — матриця деякого ортогонального оператора за теоремою 3.4. Це означає, що $\mathbf{L}^T = \mathbf{L}^{-1}$. Матриця $\mathbf{A}$ під дією ортогонального оператора перетвориться в матрицю $\widetilde{\mathbf{A}}$ за формулою (3.16) і, враховуючи, що за теоремою 3.15 матриця в базисі з власних векторів має діагональний вигляд, дістанемо:

$$\widetilde{\mathbf{A}} = \mathbf{L}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{L} = \mathbf{L}^T\mathbf{A}\mathbf{L} = \begin{pmatrix} p_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & p_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & p_n \end{pmatrix}.$$

Крім того, координати вектора $\mathbf{x}$ у новому базисі наберуть вигляду $\mathbf{y}$ (див. (3.14)): $[\mathbf{x}] = \mathbf{L}[\mathbf{y}]$, $[\mathbf{y}]^T = (y_1,\ldots,y_n)$, отже, квадратична форма під дією даного ортогонального оператора буде зведена до канонічного вигляду:

$$\begin{aligned} Q_1(\mathbf{y}) = Q(y_1,\ldots,y_n) &= [\mathbf{x}]^T\mathbf{A}[\mathbf{x}]\big|_{\mathbf{x}=\mathbf{L}[\mathbf{y}]} = \\ &= (\mathbf{L}[\mathbf{y}])^T\mathbf{A}\mathbf{L}[\mathbf{y}] = [\mathbf{y}]^T\mathbf{L}^T\mathbf{A}\mathbf{L}[\mathbf{y}] = [\mathbf{y}]^T\widetilde{\mathbf{A}}[\mathbf{y}] = \\ &= p_1y_1^2 + \ldots + p_ny_n^2. \end{aligned}$$

Таким чином, для зведення цим методом квадратичної форми до канонічного вигляду треба тільки знайти власні значення p_1, ..., p_n матриці $\mathbf{A}$.

3.7 Застосування квадратичних форм

Теорія квадратичних форм є важливим інструментом для дослідження деяких кривих і поверхонь з метою з'ясування їхнього типу, зведення до канонічного вигляду і побудови у вихідній системі координат.

Нехай алгебраїчна крива 2-го порядку задана своїм загальним рівнянням

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + b_1x_1 + b_2x_2 + c = 0. \tag{3.38}$$

Обидва розглянуті методи зведення квадратичної форми до суми квадратів годяться для зведення алгебраїчної кривої другого порядку до канонічного вигляду. Перший метод може здатися більш легким, однак він не дає простого шляху для побудови графіка кривої у вихідному базисі. За допомогою другого методу таку побудову виконати неважко, але в даному викладі він не завжди може бути застосований і не настільки простий, як перший.

Приклад 3.15. *Методом Лагранжа звести рівняння кривої*

$$\underbrace{7x_1^2 - 24x_1x_2}\, - 38x_1 + 24x_2 + 175 = 0 \tag{3.39}$$

до канонічного вигляду і визначити тип кривої.

Розв'язання. Фігурною дужкою показана квадратична форма, що входить у ліву частину рівняння. Вилучимо для неї повний квадрат так, як це було виконано в попередньому п.:

$$\frac{1}{7}(7x_1 - 12x_2)^2 - \frac{144}{7}x_2^2 - 38x_1 + 24x_2 + 175 = 0.$$

Зробимо заміну змінних: $y_1 = 7x_1 - 12x_2$, $y_2 = x_2$. Рівняння набере вигляду:

$$\begin{gathered}\frac{1}{7}y_1^2 - \frac{144}{7}y_2^2 - 38\frac{y_1 + 12y_2}{7} + 24y_2 + 175 = 0,\\ \underbrace{\frac{1}{7}y_1^2 - \frac{38}{7}y_1}\, \underbrace{-\frac{144}{7}y_2^2 - \frac{288}{7}y_2}\, + 175 = 0.\end{gathered}$$

Вилучимо повні квадрати для виразів, позначених фігурними дужками:

$$\frac{1}{7}(y_1-19)^2-\frac{361}{7}-\frac{144}{7}(y_2+1)^2+\frac{144}{7}+175=0,$$
$$\frac{1}{7}(y_1-19)^2-\frac{144}{7}(y_2+1)^2+144=0.$$

Після заміни $z_1=y_2+1$, $z_2=y_1-19$ дістанемо

$$\frac{1}{7}z_2^2-\frac{144}{7}z_1^2+144=0,$$
$$\frac{z_1^2}{7}-\frac{z_2^2}{1008}=1.$$

Останнє рівняння дозволяє зробити висновок, що задана крива — гіпербола. □

Повернемося до рівняння (3.38). Перші три доданки в ньому утворюють квадратичну форму. Введемо матрицю $\mathbf{A}$, вектор $\mathbf{x}$ (для $n=2$), як це було зроблено в попередньому п., і вектор $[\mathbf{b}]^T=(b_1,b_2)$. Тоді рівняння кривої можна записати в матричному вигляді:

$$[\mathbf{x}]^T\mathbf{A}[\mathbf{x}]+[\mathbf{b}]^T[\mathbf{x}]+c=0.$$

Для зведення його до канонічного вигляду за допомогою ортогонального оператора необхідно виконати такі дії.

1. Знайти власні значення p_1,p_2 матриці $\mathbf{A}$. Переконатися, що ці значення різні. (Якщо $p_1=p_2$, то в даному викладанні метод не підходить). Знайти власні вектори $\mathbf{s}_1$, $\mathbf{s}_2$ матриці $\mathbf{A}$, що відповідають знайденим власним значенням.

2. Нормувати власні вектори за правилом: $\widetilde{\mathbf{e}}_i=\mathbf{s}_i/|\mathbf{s}_i|$, $i=1,2$.

3. Скласти ортогональну матрицю $\mathbf{L}=([\widetilde{\mathbf{e}}_1]\ [\widetilde{\mathbf{e}}_2])$ і зробити заміну змінних $[\mathbf{x}]=\mathbf{L}[\mathbf{y}]$, $\mathbf{y}=(y_1,y_2)$, при цьому квадратична форма набере вигляду $[\mathbf{x}]^T\mathbf{A}[\mathbf{x}]=p_1y_1^2+p_2y_2^2$.

4. Знайти результат перетворення лінійної форми $[\mathbf{b}]^T[\mathbf{x}]=[\mathbf{b}]^T\mathbf{L}[\mathbf{y}]$.

5. У перетвореному рівнянні $p_1y_1^2+p_2y_2^2+[\mathbf{b}]^T\mathbf{L}[\mathbf{y}]+c=0$, якщо необхідно, вилучити повні квадрати для виразів, що містять змінні y_1 і y_2, і остаточно звести рівняння до канонічного вигляду.

Приклад 3.16. *За допомогою ортогонального оператора звести рівняння* (3.39) *до канонічного вигляду і побудувати криву в базисі* $\mathbf{e}_1=(1,0)$, $\mathbf{e}_2=(0,1)$.

Розв'язання. Як уже було відзначено, квадратична форма, що входить у рівняння, має вигляд

$$\varphi(x_1, x_2) = 7x_1^2 - 24x_1x_2.$$

Складемо для матриці квадратичної форми

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 7 & -12 \\ -12 & 0 \end{pmatrix}$$

характеристичне рівняння

$$|\mathbf{A} - p\mathbf{E}| = \begin{vmatrix} 7-p & -12 \\ -12 & -p \end{vmatrix} = p^2 - 7p - 144 = 0.$$

Коренями рівняння є власні значення матриці: $p_1 = -9$, $p_2 = 16$. Щоб знайти власні вектори, складемо систему

$$\begin{cases} (7-p)s_1 - 12s_2 = 0, \\ -12s_1 - ps_2 = 0, \end{cases} \tag{3.40}$$

де $[\mathbf{s}] = (s_1, s_2)^T$ — шуканий власний вектор. Підставимо в цю систему $p = p_1 = -9$:

$$\begin{cases} 16s_1 - 12s_2 = 0, \\ -12s_1 + 9s_2 = 0. \end{cases}$$

Розв'язуючи її, знаходимо, що $[\mathbf{s}_1] = (3t, 4t)^T$, $[\widetilde{\mathbf{e}}_1] = [\mathbf{s}_1]/|\mathbf{s}_1| = (3t, 4t)^T/(5|t|) = \pm(3/5, 4/5)^T$. Виберемо знак «+», тобто вектор $[\widetilde{\mathbf{e}}_1] = (3/5, 4/5)^T$. Аналогічно, підставляючи в систему (3.40) $p = p_2 = 16$, одержуємо систему

$$\begin{cases} -9s_1 - 12s_2 = 0, \\ -12s_1 - 16s_2 = 0, \end{cases}$$

з якої знаходимо власний вектор $[\mathbf{s}_2] = (4t, -3t)$, $[\widetilde{\mathbf{e}}_2] = [\mathbf{s}_2]/|\mathbf{s}_2| = (4t, -3t)^T/(5|t|) = \pm(4/5, -3/5)^T$. Для знака «+» одержуємо $[\widetilde{\mathbf{e}}_2] = (4/5, -3/5)^T$. Складемо з цих векторів матрицю

$$\mathbf{L} = ([\widetilde{\mathbf{e}}_1]\ [\widetilde{\mathbf{e}}_2]) = \begin{pmatrix} 3/5 & 4/5 \\ 4/5 & -3/5 \end{pmatrix}$$

і зробимо заміну змінних $[\mathbf{x}] = \mathbf{L}[\mathbf{y}]$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$. В результаті лінійна форма $-38x_1 + 24x_2$ перетвориться таким чином ($[\mathbf{b}] = (-38; 24)^T$):

$$\begin{aligned}
-38x_1 + 24x_2 &= [\mathbf{b}]^T[\mathbf{x}] = [\mathbf{b}]^T\mathbf{L}[\mathbf{y}] = \\
&= (-38; 24)\begin{pmatrix} 3/5 & 4/5 \\ 4/5 & -3/5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \\
&= \left(\frac{-18}{5}; \frac{-224}{5}\right)\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = -\frac{18}{5}y_1 - \frac{224}{5}y_2.
\end{aligned}$$

Отже, під дією ортогонального оператора задане рівняння набере вигляду

$$-9y_1^2 + 16y_2^2 - \frac{18}{5}y_1 - \frac{224}{5}y_2 + 175 = 0.$$

Далі вилучаємо повні квадрати для y_1 і y_2 і послідовно дістаємо

$$-9\left(y_1 + \frac{1}{5}\right)^2 + 16\left(y_2 - \frac{7}{5}\right)^2 = -\frac{9}{25} + \frac{784}{25} - 175,$$

$$-9\left(y_1 + \frac{1}{5}\right)^2 + 16\left(y_2 - \frac{7}{5}\right)^2 = -144,$$

$$\frac{\left(y_1 + \frac{1}{5}\right)^2}{16} - \frac{\left(y_2 - \frac{7}{5}\right)^2}{9} = 1.$$

Таким чином, задана крива дійсно являє собою гіперболу з центром у точці $(-1/5; 7/5)$ в системі координат y_1Oy_2. Креслення гіперболи показане на рис. 3.4.

$\square$

Нехай тепер задана алгебраїчна поверхня 2-го порядку:

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 + \\
+ b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + c = 0.
\end{aligned}$$

Зведення такого рівняння до канонічного вигляду як за допомогою методу Лагранжа, так і за допомогою ортогонального оператора принципово нічим не відрізняється від розглянутого вище.

Приклад 3.17. *Методом Лагранжа звести рівняння поверхні*

$$\underbrace{5x_1^2 + 11x_2^2 + 2x_3^2 - 16x_1x_2 + 20x_1x_3 + 4x_2x_3}+ \\
+ 30x_1 - 12x_2 + 24x_3 + 27 = 0 \quad (3.41)$$

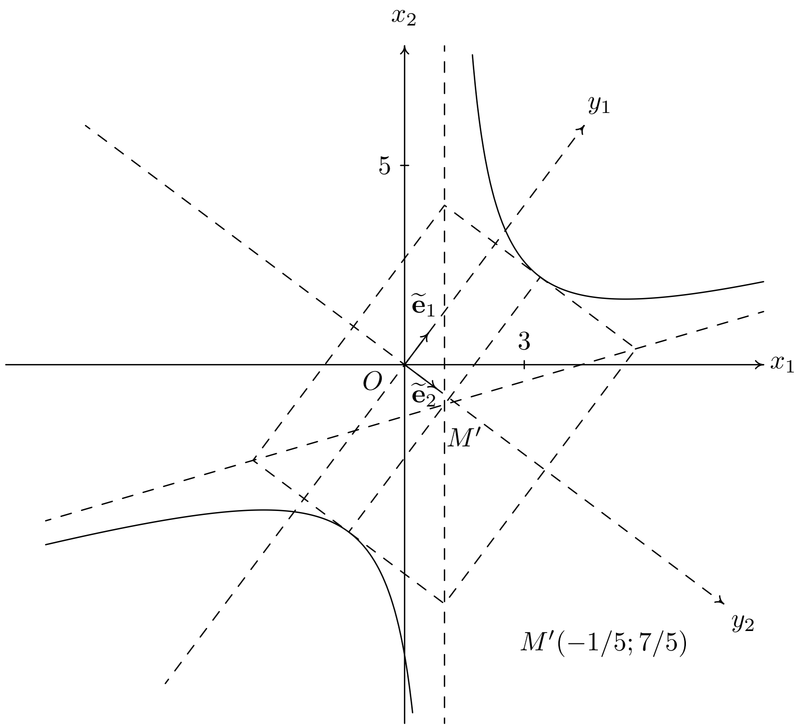

Рис. 3.4: Гіпербола

3.7. Застосування квадратичних форм

до канонічного вигляду і визначити тип поверхні.

Розв'язання. Фігурною дужкою показана квадратична форма. Вилучимо повний квадрат для змінної x_1:

$$\frac{1}{5}(5x_1 - 8x_2 + 10x_3)^2 - \frac{64}{5}x_2^2 - 20x_3^2 + 32x_2x_3 + 11x_2^2 + 2x_3^2 + 4x_2x_3 + \\ + 30x_1 - 12x_2 + 24x_3 + 27 = 0,$$

$$\frac{1}{5}(5x_1 - 8x_2 + 10x_3)^2 - \frac{9}{5}x_2^2 - 18x_3^2 + 36x_2x_3 + \\ + 30x_1 - 12x_2 + 24x_3 + 27 = 0,$$

і зробимо заміну змінних: $y_1 = 5x_1 - 8x_2 + 10x_3$, $y_2 = x_2$, $y_3 = x_3$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{5}y_1^2 - \frac{9}{5}y_2^2 - 18y_3^2 + 36y_2y_3 + 30\frac{y_1 + 8y_2 - 10y_3}{5} - 12y_2 + 24y_3 + 27 &= 0, \\ \frac{1}{5}y_1^2 - \frac{9}{5}y_2^2 - 18y_3^2 + 36y_2y_3 + 6y_1 + 36y_2 - 36y_3 + 27 &= 0, \\ y_1^2 - 9y_2^2 - 90y_3^2 + 180y_2y_3 + 30y_1 + 180y_2 - 180y_3 + 135 &= 0. \end{aligned}$$

Тепер вилучимо повний квадрат для змінної y_2:

$$\begin{aligned} y_1^2 - 9(y_2 - 10y_3)^2 + 900y_3^2 - 90y_3^2 + 30y_1 + 180y_2 - 180y_3 + 135 &= 0, \\ y_1^2 - 9(y_2 - 10y_3)^2 + 810y_3^2 + 30y_1 + 180y_2 - 180y_3 + 135 &= 0. \end{aligned}$$

Знову зробимо заміну змінних: $z_1 = y_1$, $z_2 = y_2 - 10y_3$, $z_3 = y_3$:

$$\begin{aligned} z_1^2 - 9z_2^2 + 810z_3^2 + 30z_1 + 180(z_2 + 10z_3) - 180z_3 + 135 &= 0, \\ z_1^2 - 9z_2^2 + 810z_3^2 + 30z_1 + 180z_2 + 1620z_3 + 135 &= 0. \end{aligned}$$

Вилучимо повні квадрати для змінних:

$$\begin{aligned} (z_1 + 15)^2 - 225 - 9(z_2 - 10)^2 + 900 + 810(z_3 + 1)^2 - 810 + 135 &= 0, \\ (z_1 + 15)^2 - 9(z_2 - 10)^2 + 810(z_3 + 1)^2 &= 0. \end{aligned}$$

Нарешті, виконаємо останню заміну змінних: $w_1 = z_1 + 15$, $w_2 = z_2 - 10$, $w_3 = z_3 + 1$ і отримаємо канонічне рівняння

$$w_1^2 - 9w_2^2 + 810w_3^2 = 0,$$

$$\frac{w_1^2}{810} - \frac{w_2^2}{90} + w_3^2 = 0,$$

з якого видно, що задана поверхня — конус другого порядку. □

3.7. Застосування квадратичних форм

Застосування методу ортогонального оператора до рівняння алгебраїчної поверхні другого порядку аналогічно застосуванню цього методу до рівняння алгебраїчної кривої другого порядку. Деталі застосування розглянемо на прикладі.

Приклад 3.18. *За допомогою ортогонального оператора звести рівняння (3.41) до канонічного вигляду і побудувати поверхню в базисі* $\mathbf{e}_1 = (1;0;0)$, $\mathbf{e}_2 = (0;1;0)$, $\mathbf{e}_3 = (0;0;1)$.

Розв'язання. Квадратична форма, що входить у рівняння, має вигляд

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = 5x_1^2 + 11x_2^2 + 2x_3^2 - 16x_1x_2 + 20x_1x_3 + 4x_2x_3.$$

Їй відповідає матриця

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & -8 & 10 \\ -8 & 11 & 2 \\ 10 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Складемо характеристичне рівняння:

$$\begin{aligned} |\mathbf{A} - p\mathbf{E}| = \begin{vmatrix} 5-p & -8 & 10 \\ -8 & 11-p & 2 \\ 10 & 2 & 2-p \end{vmatrix} = \\ &= (5-p)(11-p)(2-p) - 160 - 160 - 100(11-p) - \\ &- 4(5-p) - 64(2-p) = (55 - 16p + p^2)(2-p) - 320 - \\ &- 1100 + 100p - 20 + 4p - 128 + 64p = \\ &= 110 - 32p + 2p^2 - 55p + 16p^2 - p^3 - 1568 + 168p = \\ &= -p^3 + 18p^2 + 81p - 1458 = p^2(18-p) + 81(p-18) = \\ &= (18-p)(p^2-81) = (18-p)(p-9)(p+9) = 0. \end{aligned}$$

Отже, власні значення матриці дорівнюють $p_1 = 9$, $p_2 = 18$, $p_3 = -9$. Для відшукання власних векторів, складемо систему

$$\begin{cases} (5-p)s_1 - 8s_2 + 10s_3 = 0, \\ -8s_1 + (11-p)s_2 + 2s_3 = 0, \\ 10s_1 + 2s_2 + (2-p)s_3 = 0, \end{cases} \tag{3.42}$$

де $[\mathbf{s}] = (s_1, s_2, s_3)$ — шуканий власний вектор. Підставимо в цю систему $p = p_1 = 9$:

$$\begin{cases} -4s_1 - 8s_2 + 10s_3 = 0, \\ -8s_1 + 2s_2 + 2s_3 = 0, \\ 10s_1 + 2s_2 - 7s_3 = 0. \end{cases}$$

Розв'язуючи її, знаходимо $[\mathbf{s}_1] = (t, 2t, 2t)^T$, $[\widetilde{\mathbf{e}}_1] = [\mathbf{s}_1]/|\mathbf{s}_1| = (t, 2t, 2t)^T/(3|t|) = \pm(1/3, 2/3, 2/3)^T$. Виберемо знак «+» і дістанемо вектор $[\widetilde{\mathbf{e}}_1] = (1/3, 2/3, 2/3)^T$. Аналогічно, підставляючи в систему (3.42) $p = p_2 = 18$, приходимо до системи

$$\begin{cases} -13s_1 - 8s_2 + 10s_3 = 0, \\ -8s_1 - 7s_2 + 2s_3 = 0, \\ 10s_1 + 2s_2 - 16s_3 = 0, \end{cases}$$

з якої знаходимо власний вектор $[\mathbf{s}_2] = (2t, -2t, t)$, $[\widetilde{\mathbf{e}}_2] = [\mathbf{s}_2]/|\mathbf{s}_2| = (2t, -2t, t)^T/(3|t|) = \pm(2/3, -2/3, 1/3)^T$. Для знака «−» дістаємо $[\widetilde{\mathbf{e}}_2] = (-2/3, 2/3, -1/3)^T$. Нарешті, для третього власного значення $p = p_2 = -9$ одержуємо систему

$$\begin{cases} 14s_1 - 8s_2 + 10s_3 = 0, \\ -8s_1 + 20s_2 + 2s_3 = 0, \\ 10s_1 + 2s_2 + 11s_3 = 0, \end{cases}$$

розв'язання якої дає третій власний вектор $[\mathbf{s}_3] = (2t, t, -2t)$, $[\widetilde{\mathbf{e}}_2] = [\mathbf{s}_2]/|\mathbf{s}_2| = (2t, t, -2t)^T/(3|t|) = \pm(2/3, 1/3, -2/3)^T$. Для знака «+» дістаємо $[\widetilde{\mathbf{e}}_3] = (2/3, 1/3, -2/3)^T$. Побудуємо з цих векторів матрицю

$$\mathbf{L} = ([\widetilde{\mathbf{e}}_1]\ [\widetilde{\mathbf{e}}_2]\ [\widetilde{\mathbf{e}}_3]) = \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & 1/3 \\ 2/3 & -1/3 & -2/3 \end{pmatrix}$$

і зробимо заміну змінних $[\mathbf{x}] = \mathbf{L}[\mathbf{y}]$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$. В результаті лінійна форма $30x_1 - 12x_2 + 24x_3$ перетвориться таким чином ($[\mathbf{b}] = (30; -12; 24)^T$):

$$30x_1 - 12x_2 + 24x_3 = [\mathbf{b}]^T[\mathbf{x}] = [\mathbf{b}]^T\mathbf{L}[\mathbf{y}] =$$

$$= (30; -12; 24) \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & 1/3 \\ 2/3 & -1/3 & -2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} =$$

$$= (18; -36; 0) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = 18y_1 - 36y_2.$$

Виходить, під дією ортогонального оператора задане рівняння (3.41) набере вигляду

$$9y_1^2 + 18y_2^2 - 9y_3^2 + 18y_1 - 36y_2 + 27 = 0.$$

Далі вилучаємо повні квадрати для y_1 і y_2 і послідовно одержуємо

$$9\left(y_1 + 1\right)^2 - 9 + 18\left(y_2 - 1\right)^2 - 18 - 9y_3^2 + 27 = 0,$$
$$9\left(y_1 + 1\right)^2 + 18\left(y_2 - 1\right)^2 - 9y_3^2 = 0,$$
$$\frac{\left(y_1 + 1\right)^2}{2} + \left(y_2 - 1\right)^2 - \frac{y_3^2}{2} = 0.$$

Таким чином, задана поверхня дійсно являє собою конус другого порядку з вершиною в точці $(-1; 1; 0)$ в системі координат (y_1, y_2, y_3). Креслення конуса показане на рис. 3.5. □

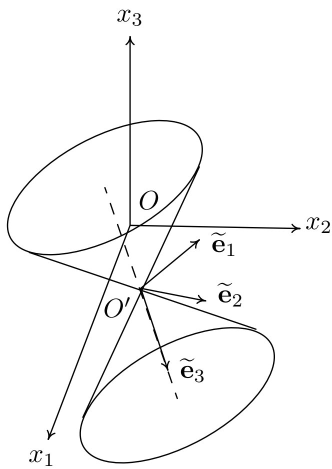

Рис. 3.5: Конус другого порядку

3.7. Застосування квадратичних форм

Предметний покажчик

Бібліоґрафія

[1] Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. – М.: Наука, 1984.

[2] Бугров Я.С., Никольский С.М. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. – М.: Наука, 1984.

[3] Головина Л.И. Линейная алгебра и некоторые ее приложения. – М.: Наука, 1985.

[4] Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. – М.: Высшая школа, 1986, ч. I.

[5] Ефимов Н.В. Квадратичные формы и матрицы. – М.: Наука, 1975.

[6] Мантуров О.В., Матвеев Н.М. Курс высшей математики. – М.: Высшая школа, 1986.

[7] Сборник задач по математике для втузов. Специальные разделы математического анализа/ Под ред. А.В. Ефимова, Б.П. Демидовича. — М.: Наука, 1981.

Волченко Юрій Михайлович

Методичні рекомендації з дисципліни
«Вища математика»

Технічний редактор Ростовцева О.О.
Підписано до друку
Формат 60*84/16 Бум. кн. журн.
Друк ксероксний
Вид. № 1 Замовлення № 4к Наклад 50 прим.

Донецький інститут залізничного транспорту
83018 м. Донецьк, вул. Горна, 6