Предел функции

Волченко Ю.М.

Содержание лекции

Расширенное множество действительных чисел. Окрестности. Понятие предела. Односторонние пределы. Бесконечно малые и бесконечно большие функции.

Анимация существования предела и одного доказательства.
Анимация работает только в программе Acrobat Reader!

Вычисление пределов в системе *Mathematica*.

6 апреля 2012 г.

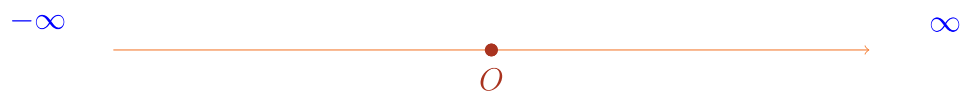
Материал лекции о пределе функции традиционно считается сложным для понимания студентами. Все дело в том, что в этом разделе появляется понятие бесконечности, которое противоречит всем нашим интуитивным представлениям, построенным на фактах, в которых нет и следа какой-либо бесконечности. Тем не менее использование этого понятия в высшей математике дает существенные удобства и преимущества, пренебрегать которыми просто неразумно. Поэтому мы будем обращаться с бесконечностью как с некоторым несуществующим объектом (вроде летающей тарелки), который, однако, имеет определенные свойства и определенную логику поведения (как и летающая тарелка) и который можно эффективно использовать в собственных целях (летающая тарелка тоже может для чего-нибудь пригодиться).

Бесконечность у нас будет просто символом ∞, обладающим очень простым, но совершенно невозможным с интуитивной точки зрения свойством: любое действительное число будет меньше этого символа: $x < \infty$, $x \in \mathbb{R}$. Вообще-то одной бесконечности нам будет мало, и поэтому мы добавим еще одну, минус бесконечность, или $-\infty$. Вы уже догадались, что она будет меньше любого действительного числа: $-\infty < x$, $x \in \mathbb{R}$. Бесконечность ∞ мы теперь иногда будем обозначать $+\infty$.

Ну, а раз уж мы стали сравнивать наши бесконечности с числами, то естественно добавить эти символы к множеству действительных чисел и рассматривать получающееся при этом множество как одно целое. Назовем его ***расширенным множеством действительных чисел*** и обозначим:

$$\overline{\mathbb{R}} \triangleq \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{\infty\}.$$

Мы помним, что обычные числа изображают точками на числовой прямой, а куда нам поместить символы бесконечности? Я предлагаю расположить их на абсолютно неправильном рисунке так:



То есть будем считать, что бесконечность находится правее любой точки прямой, а минус бесконечность – левее любой ее точки. Представили? Нет? Ничего удивительного – представить бесконечность еще никому не удавалось. Поэтому мы будем руководствоваться не нашими представлениями, основанными на повседневном опыте, а свойствами наших символов, которые мы сами же и задали. При этом иногда все же бесконечности будем называть точками.

Отметим, что ∞ является верхней гранью любого интервала (a, ∞) или полуинтервала $[a, \infty)$, а $-\infty$ – нижней гранью любого интервала $(-\infty, b)$ или полуинтервала $(-\infty, b]$.

Чтобы двигаться дальше, нам понадобится понятие окрестности, причем, как ***обыкновенной точки*** $(x \in \mathbb{R})$, так и бесконечностей $(\pm\infty)$.

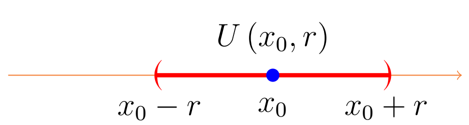
1 Окрестности

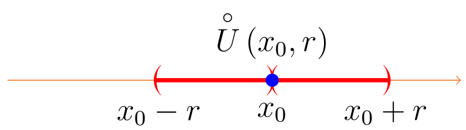
Окрестностью радиуса $r > 0$ обыкновенной точки $x_0 \in \mathbb{R}$ будем называть интервал

$$U(x_0, r) \triangleq (x_0 - r, x_0 + r) = \{x : x_0 - r < x < x_0 + r\} = \{x : |x - x_0| < r\},$$

$x, r \in \mathbb{R}$, с центром в этой точке.

Иногда может понадобиться ***окрестность с выколотым центром*** $\overset{\circ}{U}(x_0, r) = U(x_0, r) \setminus \{x_0\}$, которая отличается от окрестности $U(x_0, r)$ только тем, что точка x_0 окрестности не принадлежит.





В других случаях речь будет лишь о половине окрестности $U(x_0, r)$. Так, ***левосторонней окрестностью*** радиуса $r > 0$ точки $x_0 \in \mathbb{R}$ называется интервал

$$U_L(x_0, r) \triangleq (x_0 - r, x_0) = \{x : x_0 - r < x < x_0\},\ x \in \mathbb{R},$$

а ее ***правосторонней окрестностью*** — интервал

$$U_R(x_0, r) \triangleq (x_0, x_0 + r) = \{x : x_0 < x < x_0 + r\},\ x \in \mathbb{R}.$$

Окрестностью радиуса $r > 0$ ***бесконечности*** назовем множество

$$U(\infty, r) \triangleq (r, \infty) = \{x : x > r\},\ x \in \mathbb{R}.$$

Окрестностью радиуса $r > 0$ ***минус бесконечности*** назовем множество

$$U(-\infty, r) \triangleq (-\infty, -r) = \{x : x < -r\},\ x \in \mathbb{R}.$$

Если значение радиуса окрестности несущественно, мы его будем опускать, т. е., например, вместо $U(x_0, r)$ будем писать $U(x_0)$.

2 Понятие предела

Имея в своем запасе целый арсенал окрестностей и в какой-то мере приравняв бесконечности к точкам, мы теперь можем дать понятие предела, пригодное практически для всех наших задач.

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности $\mathring{U}(x_0)$, если $x_0 \in \mathbb{R}$, или в некоторой окрестности $U(x_0)$, если $x_0 = \pm\infty$. Величина $A \in \overline{\mathbb{R}}$ называется ***пределом функции*** $f(x)$ при $x \to x_0$, если

$$\boxed{\forall(\varepsilon > 0)\,\exists(\delta > 0)\,\forall(x : x \neq x_0)\ x \in U(x_0, \delta) \Longrightarrow f(x) \in U(A, \varepsilon)\,.} \qquad (1)$$

Если утверждение (1) истинно, то говорят, что предел функции $f(x)$ при $x \to x_0$ ***существует***, и записывают этот факт следующим образом:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A.$$

Часто вместо «предел функции равен A» говорят, что она «сходится к A». Если $A \in \mathbb{R}$, будем говорить, что предел функции ***конечен***.

Какой же смысл имеет утверждение (1)? Оно означает, что, если предел функции существует, то она обладает следующим свойством. Какую бы малую окрестность A мы ни задали (малость окрестности регулируется параметром ε), мы всегда сможем найти окрестность $U(x_0, \delta)$ такую, что для всех точек из этой окрестности значения функции будут принадлежать окрестности $U(A, \varepsilon)$. Если представить себе, что мы задаем все меньшие ε (это допустимо, потому что ε может принимать любое положительное значение), то значения функции будут попадать во все меньшие окрестности $U(A, \varepsilon)$, и, значит, значения функции все меньше будут отличаться от A.

Эти рассуждения иллюстрирует рис. 1, а), на котором продемонстрировано существование предела функции $\lim_{x\to\infty} f(x) = A$, когда $A \in \mathbb{R}$. Для этого

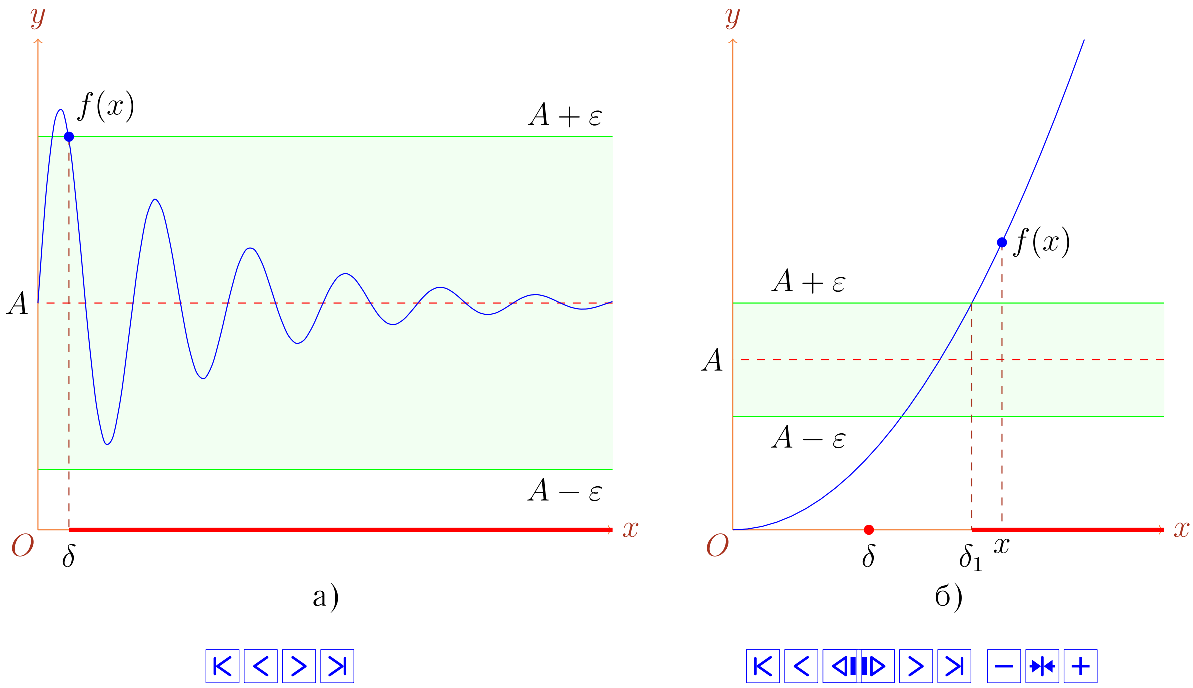


Рис. 1. К существованию предела.

случая утверждение (1) может быть переписано так:

$$\forall(\varepsilon > 0)\,\exists(\delta > 0)\,\forall\, x \in U(\infty, \delta) \Longrightarrow f(x) \in U(A, \varepsilon),$$

или, учитывая определения окрестностей:

$$\forall(\varepsilon > 0)\,\exists(\delta > 0)\,\forall\, x > \delta \Longrightarrow A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon. \tag{2}$$

Согласно полученному утверждению для каждого $\varepsilon > 0$ должно найтись $\delta > 0$ такое, что для любого $x > \delta$ график функции должен лежать в «коридоре» («трубке») $(A - \varepsilon, A + \varepsilon)$. Этот коридор шириной 2ε показан на рис. зеленым цветом. Щелкая мышкой по рис. или по соответствующей кнопке плеера можно увидеть как при сужении коридора (уменьшении ε) каждый раз находится новое значение δ, такое, что для всех $x \in (\delta, \infty)$ весь график функции помещается внутри указанного коридора. Конечно, изобразить бесконечное течение этого процесса невозможно, но словами это можно выразить (конечно, неправильно) так, что коридор становится «бесконечно» узким и график функции как бы «прилипает» к прямой $y = A$.

А как представить себе, что предел функции не существует? Для этого, как вы знаете, надо составить отрицание высказывания (1):

$$\exists\,(\varepsilon > 0)\,\forall\,(\delta > 0)\,\exists\,(x : x \neq x_0)\;\; x \in U\,(x_0, \delta) \wedge f\,(x) \notin U\,(A, \varepsilon)\,. \qquad (3)$$

Из него мы видим, что величина A не будет пределом функции $f\,(x)$, если найдется такое значение ε, что какую бы малую окрестность $U\,(x_0, \delta)$ мы ни взяли, в ней всегда найдется точка x такая, что $f\,(x)$ не будет принадлежать окрестности $U\,(A, \varepsilon)$. Это означает, что $f\,(x)$ не сможет «приблизиться» к A, больше, чем на ε. Ну, поэтому нельзя сказать, что $f\,(x)$ «сходится к A». Причем, если конечного предела ($A \in \mathbb{R}$) не существует, то утверждение (3) должно быть справедливо для любого $A \in \mathbb{R}$.

На рис. 1, б) изображено отсутствие предела $\lim_{x\to\infty} f\,(x) = A$, когда $A \in \mathbb{R}$. Мы можем визуально убедиться в правдоподобности отрицания утверждения (2):

$$\exists\,(\varepsilon > 0)\,\forall\,(\delta > 0)\,\exists\, x > \delta \wedge f\,(x) \notin [A - \varepsilon, A + \varepsilon].$$

Для этого надо указать какое-нибудь $\varepsilon > 0$, для которого значение функции $f\,(x)$ не попадет в «коридор» $[A - \varepsilon, A + \varepsilon]$, если только x будет достаточно большим числом (бо́льшим произвольного $\delta > 0$). Поэтому «коридор» на рис. остается неподвижным, он соответствует тому $\varepsilon > 0$, для которого все только что сказанное выполняется. Включив на рис. анимацию, можно увидеть, как при увеличении $\delta > 0$ каждый раз находится $x > \delta$, для которого $f\,(x) \notin [A - \varepsilon, A + \varepsilon]$. Для этого достаточно брать $x > \max\,(\delta_1, \delta)$, где δ_1 определяется равенством $f(\delta_1) = A + \varepsilon$.

Конечно, представленные иллюстрации ни в коей мере не являются доказательствами существования или несуществования предела. Для доказательств на начальном этапе приходится пользоваться языком «$\varepsilon - \delta$», на котором записано основное утверждение (1). При этом, чтобы доказать, что предел существует, надо в явном виде указать зависимость $\delta = \delta\,(\varepsilon)$, которая обеспечивает выполнение требуемого утверждения.

Пример 1. *Доказать, что*

$$\lim_{x\to\infty} x^{\alpha} = \infty,\ \alpha > 0,\ \alpha \in \mathbb{R}.$$

Решение. Учитывая определение окрестности бесконечности, нам надо доказать справедливость утверждения

$$\forall\,(\varepsilon > 0)\,\exists\,(\delta > 0)\,\forall\,(x)\;\; x > \delta \Longrightarrow x^{\alpha} > \varepsilon,$$

т. е. для любого ε надо указать такое δ, что утверждение будет справедливым. Это легко сделать, так как $x^\alpha > \varepsilon \Leftrightarrow x > \varepsilon^{1/\alpha}$. Поэтому в качестве δ можно взять $\varepsilon^{1/\alpha}$, тогда и получится верное высказывание:

$$\forall\,(\varepsilon > 0)\,\exists\left(\delta = \varepsilon^{1/\alpha}\right)\forall\,(x)\quad x > \varepsilon^{1/\alpha} \Longrightarrow x^\alpha > \varepsilon,$$

что и требовалось доказать. □

Из примера следует, что $\lim_{x\to\infty} x = \infty$.

Пример 2. *Доказать, что*

$$\lim_{x\to-\infty} a^x = 0,\ a > 1.$$

Решение. Снова учитывая определение окрестностей, приходим к необходимости доказательства истинности утверждения

$$\forall\,(\varepsilon > 0)\,\exists\,(\delta > 0)\,\forall\,(x)\quad x < -\delta \Longrightarrow a^x < \varepsilon.$$

При $\varepsilon \geq 1$ в качестве δ можно взять любое положительное число. В противном случае, так как $a^x < \varepsilon \Leftrightarrow x < \log_a \varepsilon$, необходимое значение δ таково: $\delta\,(\varepsilon) = -\log_a \varepsilon$.

Пример 3. *Доказать, что* $\lim_{x\to\infty} \operatorname{arcctg} x = 0$.

Решение. Необходимо доказать справедливость высказывания

$$\forall\,(\varepsilon > 0)\,\exists\,(\delta > 0)\,\forall\,(x)\quad x > \delta \Longrightarrow |\operatorname{arcctg} x| < \varepsilon.$$

При $\varepsilon \geq \pi/2$ в качестве δ можно взять любое положительное число. В противном случае, так как $\operatorname{arcctg} x > 0$, то $|\operatorname{arcctg} x| < \varepsilon \Leftrightarrow \operatorname{arcctg} x < \varepsilon \Leftrightarrow x > \operatorname{ctg}\varepsilon$. Следовательно, $\delta = \operatorname{ctg}\varepsilon$.

Пример 4. *Доказать, что* $\lim_{x\to\infty} \log_a x = \infty$*,* $a > 1$.

Решение. Должно выполняться

$$\forall\,(\varepsilon > 0)\,\exists\,(\delta > 0)\,\forall\,(x)\quad x > \delta \Longrightarrow \log_a x > \varepsilon.$$

Но $\log_a x > \varepsilon \Leftrightarrow x > a^\varepsilon$. Значит, $\delta\,(\varepsilon) = a^\varepsilon$.

Пример 5. *Доказать, что пределы* $\lim\limits_{x\to\infty} \cos x$ *и* $\lim\limits_{x\to\infty} \sin x$ *не существуют.*

Решение. Сначала докажем, что не существует ни одного числа $A \in \mathbb{R}$, для которого $\lim_{x\to\infty} \cos x = A$. Возьмем $\varepsilon = 0{,}4$ и рассмотрим интервал $(A - 0{,}4; A + 0{,}4)$. Очевидно, что множество $[-1;1]\setminus(A - 0{,}4; A + 0{,}4)$ непусто для любого $A \in \mathbb{R}$, поэтому взяв из него y^*, найдем по нему целую последовательность $x_n = \arccos{+2\pi n}$, $n \in \mathbb{Z}$, такую, что $\cos x_n = y^*$ (см. анимацию рис. 2). Следовательно, при достаточно большом n для любого $\delta > 0$ выполнится $x_n > \delta$. Это и означает, что для любого $\delta > 0$ найдется такое $x > \delta$, что $\cos x \notin (A - 0{,}4; A + 0{,}4)$. То есть никакое число $A \in \mathbb{R}$ не может быть пределом косинуса при $x \to \infty$.

Пусть теперь $A = \pm\infty$. Возьмем $\varepsilon = 2$. Тогда для любого $\delta > 0$ выполнится $-2 < \cos x < 2$. Это значит, что $\cos x \notin U\,(\infty, 2)$ и $\cos x \notin U\,(-\infty, 2)$, следовательно, бесконечности тоже не могут быть пределами косинуса. Аналогично проводится доказательство для синуса. □

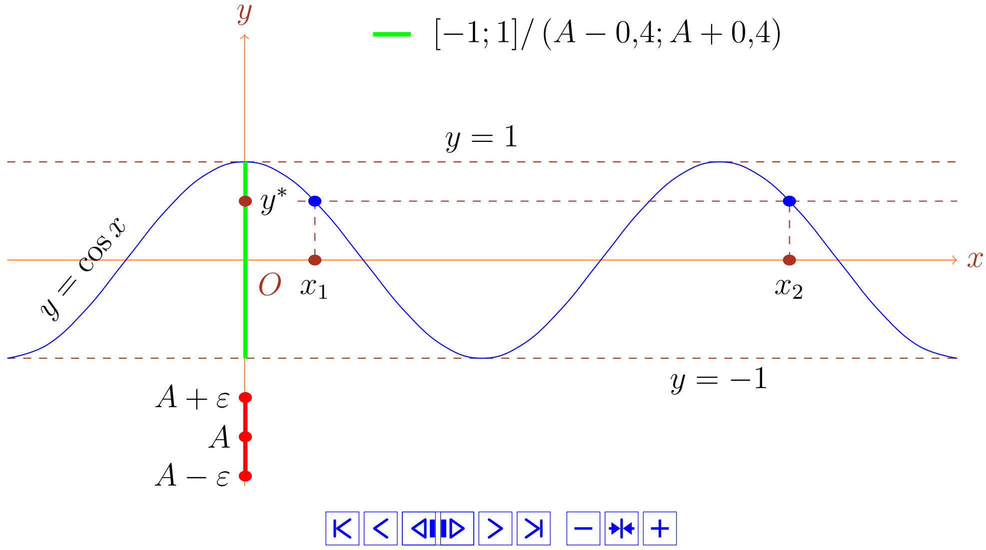


Рис. 2.

Если в формуле (1) окрестность $U(x_0, \delta)$ заменить окрестностью $U_L(x_0, \delta)$, мы получим определение ***левостороннего предела*** (***предела слева***) функции, который обозначается $\lim_{x\to x_0-0} f(x) = A$, или $f(x_0 - 0) = A$. При замене $U(x_0, \delta)$ на $U_R(x_0, \delta)$ получаем определение ***правостороннего предела*** (***предела справа***) функции. Он обозначается $\lim_{x\to x_0+0} f(x) = A$, или $f(x_0 + 0) = A$. ***Левосторонний*** и ***правосторонний пределы*** функции называются ее ***односторонними пределами***.

Пример 6. *Доказать, что* $\lim_{x\to 0+0} \log_a x = -\infty$, $a > 1$.

Решение. Используя понятия левосторонней окрестности и окрестности бесконечности, получаем, что надо доказать справедливость утверждения

$$\forall(\varepsilon > 0)\,\exists(\delta > 0)\,\forall(x)\;\; 0 < x < \delta \Longrightarrow \log_a x < -\varepsilon.$$

Но $\log_a x < -\varepsilon \Leftrightarrow x < a^{-\varepsilon}$, значит, $\delta(\varepsilon) = a^{-\varepsilon}$.

Теорема 1. *Существование конечных и равных друг другу односторонних пределов функции эквивалентно существованию предела функции:*

$$f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = A \Longleftrightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) = A;\;\; x_0, A \in \mathbb{R}.$$

Доказательство. Существование конечных и равных друг другу односторонних пределов функции равносильно справедливости утверждения

$$\forall(\varepsilon > 0)\,\exists(\delta > 0)\,\forall(x)\;\; x \in U_L(x_0, \delta) \vee x \in U_R(x_0, \delta) \Longrightarrow f(x) \in U(A, \varepsilon).$$

Но $x \in U_L(x_0, \delta) \vee x \in U_R(x_0, \delta) \Leftrightarrow x \in U_L(x_0, \delta) \cup U_R(x_0, \delta) = \overset{\circ}{U}(x_0, \delta)$ и, значит, это утверждение эквивалентно следующему:

$$\forall(\varepsilon > 0)\,\exists(\delta > 0)\,\forall(x)\;\; x \in \overset{\circ}{U}(x_0, \delta) \Longrightarrow f(x) \in U(A, \varepsilon),$$

которое в свою очередь равносильно существованию предела.

Теорема 2. *Если функция* $f(x)$ *имеет конечный предел* $A \in \mathbb{R}$*, когда* $x \to x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$*, то в некоторой окрестности* $U(x_0)$ *функция* $f(x)$ *ограничена.*

Доказательство. На основании определения предела функции возьмем какое-нибудь $\varepsilon > 0$, для которого $|f(x) - A| < \varepsilon$ как только $x \in U(x_0, \delta)$. Но тогда $\varepsilon > |f(x) - A| \geq |f(x)| - |A|$, или $|f(x)| \leq |A| + \varepsilon$, если $x \in U(x_0, \delta)$.

Замечание 1. *Докажите, что* $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} f(-x)$*, если хотя бы один предел существует.*[1)]

3 Бесконечно малые и бесконечно большие функции

Функция $f(x)$ называется ***бесконечно малой*** (б. м.) при $x \to x_0$, если

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = 0.$$

Функция $f(x)$ называется ***бесконечно большой*** (б. б.) при $x \to x_0$, если

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty.$$

Аналогичные определения имеют место и для односторонних пределов.

Теорема 3. *Функция* $y = f(x)$ *является суммой б. м. при* $x \to x_0$ *и постоянной* b *тогда и только тогда, когда* $\lim_{x\to x_0} f(x) = b$*.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $f(x) = b + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ – б. м. По определению предела и б. м.

$$\forall(\varepsilon > 0)\,\exists(\delta > 0)\,\forall(x \neq x_0)\;\; x \in U(x_0, \delta) \Longrightarrow |\alpha(x)| < \varepsilon. \tag{4}$$

Но тогда

$$\forall(\varepsilon > 0)\,\exists(\delta > 0)\,\forall(x \neq x_0)\;\; x \in U(x_0, \delta) \Longrightarrow |f(x) - b| < \varepsilon, \tag{5}$$

а, значит, $\lim_{x\to x_0} f(x) = b$.

Достаточность. Пусть $\lim_{x\to x_0} f(x) = b$, т. е. справедливо (5). Обозначим $\alpha(x) = f(x) - b$. Из (5) следует (4), поэтому $\alpha(x)$ – б. м., а из нашего обозначения следует $f(x) = b + \alpha(x)$. □

Из высказывания (5) очевидно, что, если $\alpha(x)$ – б. м., то и $-\alpha(x)$ – б. м. Пример 3 показывает, что $\operatorname{arcctg} x$ – б. м. при $x \to \infty$, поэтому вследствие доказанной теоремы, т. к. $\operatorname{arctg} x = \pi/2 - \operatorname{arcctg} x$, то $\lim_{x\to\infty} \operatorname{arctg} x = \pi/2$.

Теорема 4. *Функция, обратная бесконечно малой $\alpha(x) \neq 0$, есть бесконечно большая. Функция, обратная бесконечно большой, есть бесконечно малая.*

Доказательство. Пусть $\alpha(x) \neq 0$ – б. м., тогда истинно высказывание (4). Но $|\alpha(x)| < \varepsilon \Leftrightarrow |1/\alpha(x)| > 1/\varepsilon = \mu$ и, следовательно, справедливо высказывание

$$\forall(\mu > 0)\,\exists(\delta > 0)\,\forall(x \neq x_0)\ x \in U(x_0, \delta) \Longrightarrow \left|\frac{1}{\alpha(x)}\right| > \mu, \tag{6}$$

где δ определяется величиной $\varepsilon = 1/\mu$. Но истинность утверждения (6) и означает, что $1/\alpha(x)$ – б. б. Вторая часть теоремы доказывается аналогично. □

Из примера 1 следует, что x^{α} – б. б. при $x \to \infty$ и $\alpha > 0$, поэтому при $\alpha < 0$ функция $x^{-\alpha}$ – тоже б. б., а тогда при $\alpha < 0$ функция $x^{\alpha} = 1/x^{-a}$ – б. м., т. е. $\lim_{x\to\infty} x^{\alpha} = 0,\ \alpha < 0,\ \alpha \in \mathbb{R}$.

В примере 2 было показано, что a^x – б. м. при $a > 1$ и $x \to -\infty$, значит, при $0 < a < 1$ функция $a^x = 1/\left(a^{-1}\right)^x$ – б. б. при $x \to -\infty$. Отсюда получаем, что $\lim_{x\to-\infty} a^x = \infty$, $0 < a < 1$.

Так как a^x $(a > 1)$ – б. м. при $x \to -\infty$, то a^{-x} $(a > 1)$ – б. б. при $x \to -\infty$. Поэтому при $a > 1$, учитывая замечание 1, получаем, что $\lim_{x\to\infty} a^x = \lim_{x\to-\infty} a^{-x} = \infty$, $a > 1$.

Аналогично, т. к. a^x $(0 < a < 1)$ – б. б. при $x \to -\infty$, то a^{-x} $(0 < a < 1)$ – б. м. при $x \to -\infty$ и, следовательно, $\lim_{x\to\infty} a^x = \lim_{x\to-\infty} a^{-x} = 0$ для $0 < a < 1$.

Теорема 5. *Произведение бесконечно малой на ограниченную функцию есть бесконечно малая.*

Доказательство. Пусть функция $f(x)$ ограничена при $x \to x_0$, тогда найдется окрестность $U(x_0, \delta_1)$ такая, что

$$\forall(x)\ x \in U(x_0, \delta_1) \Longrightarrow |f(x)| \leq M, \tag{7}$$

где $M > 0$ – некоторое число. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$, тогда ε/M – тоже произвольное положительное число. Пусть $\alpha(x)$ – б. м. при $x \to x_0$, т. е. выполняется (4), в котором мы вместо ε возьмем ε/M. Выберем $\delta_2 = \min(\delta_1, \delta)$, если $x_0 \in \mathbb{R}$, и выберем $\delta_2 = \max(\delta_1, \delta)$, если $x_0 = \pm\infty$. Тогда в окрестности $U(x_0, \delta_2)$ одновременно выполнятся и (7), и (4). Следовательно,

$$\begin{aligned}&\forall(\varepsilon > 0)\,\exists(\delta_2 > 0)\,\forall(x \neq x_0)\\ &\qquad x \in U(x_0, \delta) \Longrightarrow |f(x)\,\alpha(x)| = |f(x)|\,|\alpha(x)| < M \cdot \varepsilon/M = \varepsilon.\end{aligned}$$

Это и означает, что $f(x)\,\alpha(x)$ – б. м. □

Например, функция $2^x \sin x$ — б. м. при $x \to -\infty$, так как 2^x — б. м., а $\sin x$ — ограниченная функция.

Следствие 1. *Произведение двух бесконечно малых есть бесконечно малая.*

Доказательство. Произведение двух б. м. можно считать произведением б. м. на ограниченную функцию, так как всякая б. м. есть ограниченная функция по теореме 2. □

Функция $x^{-2} \operatorname{arcctg} x$ при $x \to \infty$ является б. м., так как x^{-2} и $\operatorname{arcctg} x$ — б. м. при $x \to \infty$.

Было показано, что x при $x \to \infty$ — б. б. Значит, $1/x$ — б. м. при $x \to \infty$. Тогда, делая замену $x = 1/y$, получаем

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^{2n}} = \lim_{y\to\infty} y^{2n} = \infty,\ n \in \mathbb{N};$$

$$\lim_{x\to 0-0} \frac{1}{x^{2n+1}} = \lim_{y\to -\infty} y^{2n+1} = \langle z = -y \rangle = -\lim_{z\to\infty} z^{2n+1} = -\infty,$$

$$\lim_{x\to 0+0} \frac{1}{x^{2n+1}} = \lim_{y\to\infty} y^{2n+1} = \infty,\ n \in \mathbb{N}_0;$$

$$\lim_{x\to 0+0} x^{\alpha} = \lim_{y\to\infty} y^{-\alpha} = \begin{cases} 0, & \alpha > 0; \\ \infty, & \alpha < 0. \end{cases}.$$

В скобки $\langle\cdot\rangle$ помещен комментарий. И в дальнейшем такие скобки будут содержать комментарии.

Следствие 2. *Отношение бесконечно малой к бесконечно большой есть бесконечно малая; обратное отношение — бесконечно большая.*

Теорема 6. *Сумма двух бесконечно малых есть бесконечно малая.*

Доказательство. Пусть $\alpha(x)$, $\beta(x)$ — б. м. Тогда высказывание (4) справедливо для функции $\alpha(x)$ для произвольного $\varepsilon/2 > 0$ и подходящего δ_1. Такое же высказывание справедливо для $\beta(x)$ для произвольного $\varepsilon/2 > 0$ и подходящего δ_2. Возьмем $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, если $x_0 \in \mathbb{R}$, и выберем $\delta = \max(\delta_1, \delta_2)$, если $x_0 = \pm\infty$. Тогда справедливо утверждение

$$\forall(\varepsilon > 0)\,\exists(\delta > 0)\,\forall(x \neq x_0)\ x \in U(x_0, \delta) \Longrightarrow |\alpha(x) + \beta(x)| \le$$
$$\le |\alpha(x)| + |\beta(x)| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon,$$

которое завершает доказательство того, что $\alpha(x) + \beta(x)$ — б. м. □

Так, например, $x^{-2} + \operatorname{arcctg} x$ — б. м. при $x \to \infty$.

В Приложении показано, как вычислять пределы в системе *Mathematica*[2)].

Приложение

[1] Существование предела $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ равносильно истинности высказывания

$$\forall(\varepsilon>0)\,\exists(\delta>0)\,\forall(x)\;\; x<-\delta \Longrightarrow f(x)\in U(A,\varepsilon)\,.$$

Заменяя x на $-x$ и замечая, что $-x<-\delta \Leftrightarrow x>\delta$, получаем

$$\forall(\varepsilon>0)\,\exists(\delta>0)\,\forall(x)\;\; x>\delta \Longrightarrow f(-x)\in U(A,\varepsilon)\,.$$

Это означает существование предела $\lim_{x\to\infty} f(-x)$ и его равенство пределу $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

[2] Для вычисления пределов система *Mathematica* имеет оператор `Limit[expr, x` $\to$ x_0`]`, где `expr` — выражение, предел которого надо вычислить, а конструкция `x` $\to$ x_0 понятна без объяснений. Вычислим, например, такой предел:

$\mathtt{Limit}[x^2,\ x \to \infty]$

∞

Попробуем найти более общий предел:

$\mathtt{Limit}[x^\alpha,\ x \to \infty]$

$\mathtt{Limit}[x^\alpha,\ x \to \infty]$

Как видим, *Mathematica* отказывается что-либо делать, так как значение предела зависит от знака параметра α. Укажем ей с помощью специальной опции `Assumptions`, что параметр, например, положителен:

$\mathtt{Limit}[x^\alpha,\ x \to \infty,\ \mathtt{Assumptions} \to \alpha>0]$

∞

Так же легко находится предел показательной функции:

$\mathtt{Limit}[a^x,\ x \to \infty,\ \mathtt{Assumptions} \to 0<a<1]$

0

и арктангенса:

$\mathtt{Limit}[\mathtt{ArcTan}[x],\ x \to \infty]$

$\frac{\pi}{2}$

Чтобы вычислить левосторонний предел, надо задать опцию `Direction` $\to 1$, а чтобы вычислить правосторонний предел — опцию `Direction` $\to -1$. Вот как это используется при вычислении пределов

$\mathtt{Limit}\left[\frac{1}{x^{2n+1}},\ x \to 0,\ \mathtt{Direction} \to 1,\ \mathtt{Assumptions} \to n \geq 0\ \&\&\ n \in \mathtt{Integers}\right]$

$-\infty$

$\mathtt{Limit}\left[\frac{1}{x^{2n+1}},\ x \to 0,\ \mathtt{Direction} \to -1,\ \mathtt{Assumptions} \to n \geq 0\ \&\&\ n \in \mathtt{Integers}\right]$

∞

Найдем предел произведения бесконечно малой на ограниченную функцию:

$\mathtt{Limit}[2^x\,\mathtt{Sin}[x],\ x \to -\infty]$

0

Попытаемся найти несуществующий предел:

```
Limit[Cos[x], x → ∞]
Interval[{-1,1}]
```

Mathematica выдала целый диапазон возможных значений косинуса, показывая этим, что ни одно число не может быть значением такого предела.

Литература

[1] Бугров Я.С., Никольский С.М. *Высшая математика. Дифференциальное и интегральное исчисление*. — М.: Наука, 1984, — с. 74-84.

[2] Письменный Д.Т. *Конспект лекций по высшей математике*. — М.: Рольф, 2000. Ч. 1. — с. 112—118.