Теоремы о пределах

Волченко Ю.М.

Содержание лекции

Основные теоремы о пределах. Предел числовой последовательности. Первый замечательный предел. Второй замечательный предел. Экспонента. Натуральный логарифм. Сравнение бесконечно малых, применение эквивалентных бесконечно малых к вычислению пределов.

Продолжение вычисления пределов в системе *Mathematica*.

6 апреля 2012 г.

Мы продолжим изучение теории пределов, начатое на прошлой лекции. Для этого сформулируем и докажем несколько теорем, имеющих основополагающее значение.

1 Основные теоремы о пределах

Теорема 1. *Предел постоянной величины равен ей самой:* $\lim_{x\to x_0} C = C$.

Доказательство. Очевидно, что число 0 – б. м. Пусть C – постоянная. Так как $C = C + 0$, то по теореме 3, доказанной на лекции «Предел функции», получаем требуемое. □

Рассмотрим конечные пределы двух функций

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \in \mathbb{R}, \quad \lim_{x\to x_0} g(x) = B \in \mathbb{R}.$$

Теорема 2. *Предел суммы двух функций равен сумме их пределов, если эти пределы конечны:*

$$\lim_{x\to x_0} [f(x) + g(x)] = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x).$$

Доказательство. Из уже упомянутой теоремы 3, доказанной на лекции «Предел функции», следует представление функций в виде $f(x) = A+\alpha(x)$, $g(x) = B + \beta(x)$, где $\alpha(x)$, $\beta(x)$ — б. м. Найдем их сумму

$$f(x) + g(x) = A + B + \underbrace{\alpha(x) + \beta(x)}_{\text{б. м.}}.$$

Мы видим, что сумма функций равна сумме их пределов плюс б. м. Из этого и следует требуемое.

Теорема 3. *Предел произведения двух функций равен произведению их пределов, если эти пределы конечны:*

$$\lim_{x\to x_0} f(x)\,g(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) \lim_{x\to x_0} g(x).$$

Доказательство. В данном случае

$$f(x)\,g(x) = [A + \alpha(x)] + [B + \beta(x)] = AB + \underbrace{B\alpha(x) + A\beta(x) + \alpha(x)\,\beta(x)}_{\text{б. м.}}.$$

Следствие 1. *Постоянный множитель можно выносить за знак предела:* $\lim_{x\to x_0} Cf(x) = C \lim_{x\to x_0} f(x)$, $C = \mathrm{const}$

Теорема 4. *Предел отношения двух функций равен отношению их пределов, если эти пределы конечны и предел делителя не равен нулю:*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)}, \quad \lim_{x\to x_0} g(x) \neq 0.$$

Доказательство. Запишем отношение функций так:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A + \alpha(x)}{B + \beta(x)} = \frac{A}{B} + \frac{B\alpha(x) - A\beta(x)}{B(B + \beta(x))}.$$

Второе слагаемое есть произведение б. м. (числителя) на ограниченную функцию $1/[B(B + \beta(x))]$ с учетом того, что $B \neq 0$. Следовательно, второе слагаемое — б. м. $\square$

Используя доказанные теоремы, рассмотренные ранее примеры и замечание 1, сделанное на лекции «Предел функции», получаем:

$$\lim_{x\to -\infty} \operatorname{arctg} x = \lim_{x\to\infty} \operatorname{arctg}(-x) = -\lim_{x\to\infty} (\operatorname{arctg} x) = -\frac{\pi}{2},$$

$$\lim_{x\to -\infty} \operatorname{arcctg} x = \lim_{x\to\infty} \operatorname{arcctg}(-x) = \lim_{x\to\infty} (\pi - \operatorname{arcctg} x) =$$

$$= \pi - \lim_{x\to\infty} \operatorname{arcctg} x = \pi - 0 = \pi,$$

$$\lim_{x\to 0+0}\log_a x=\lim_{x\to 0+0}\frac{\log_{1/a}x}{\log_{1/a}a}=-\lim_{x\to 0+0}\log_{1/a}x=\infty,\ 0<a<1,$$
$$\lim_{x\to \infty}\log_a x=\lim_{x\to \infty}\frac{\log_{1/a}x}{\log_{1/a}a}=-\lim_{x\to \infty}\log_{1/a}x=-\infty,\ 0<a<1.$$

Теорема 5. *Если функция возрастает и ограничена сверху на промежутке S или убывает и ограничена снизу на нем, то она имеет конечный предел при $x\to a$, где $a=\sup S$. Если функция возрастает и ограничена снизу на промежутке S или убывает и ограничена сверху на нем, то она имеет конечный предел при $x\to b$, где $b=\inf S$.*

Доказательство приведено в Приложении[1)].

Эта теорема применима, например, к функции $y=\operatorname{arctg}x$. Арктангенс возрастает на всей числовой оси и ограничен снизу числом $-\pi/2$, а сверху — числом $\pi/2$. Эти числа и являются, как мы видели, его пределами при, соответственно, $x\to-\infty$ и $x\to\infty$.

Теорема 6 (о пределе сложной функции). *Если существуют пределы $\lim_{x\to x_0}\varphi(x)=a$ и $\lim_{u\to a}f(u)=A$, то $\lim_{x\to x_0}f(\varphi(x))=A$.*

Доказательство приведено в Приложении[2)].

Например, $\lim_{x\to\infty}\operatorname{arcctg}2^x=0$, так как

$$\lim_{x\to\infty}2^x=\infty,\ \lim_{x\to\infty}\operatorname{arcctg}x=0.$$

Теорема 7 (о переходе к пределу в неравенстве). *Если функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют конечные пределы при $x\to x_0$ и $f(x)\le g(x)$ или $f(x)<g(x)$, то $\lim_{x\to x_0}f(x)\le\lim_{x\to x_0}g(x)$.*

Доказательство приведено в Приложении[3)].

Замечание 1. *Теорема остается справедливой, если $B=\infty$, а $A=\infty$ или $A\in\mathbb{R}$; а также, если $A=-\infty$, а $B=-\infty$ или $B\in\mathbb{R}$.*

Теорема 8. *Если функции $f(x)$ и $h(x)$ имеют одинаковые конечные пределы при $x\to x_0$ и $f(x)\le g(x)\le h(x)$, то функция $g(x)$ имеет тот же предел при $x\to x_0$.*

Доказательство приведено в Приложении[4)].

2 Предел числовой последовательности

Рассмотрим последовательность, которую мы будем обозначать $\{x_n\}$, а x_n будем называть ***n-м членом*** последовательности. Так как последовательность является разновидностью функции, $x_n = f(n)$, $n \in \mathbb{N}$, то для нее понятие предела тоже имеет смысл, но только для неограниченно увеличивающегося аргумента n. Из определения предела (лекция «Предел функции») при $\delta = N$ получаем определение предела последовательности. Именно, число $A \in \overline{\mathbb{R}}$ называется ***пределом последовательности*** $\{x_n\}$ при $n \to \infty$, если

$$\forall (\varepsilon > 0) \exists (N > 0) \forall (n) \;\; n \in U(\infty, N) \Longrightarrow x_n \in U(A, \varepsilon),$$

или

$$\forall (\varepsilon > 0) \exists (N > 0) \forall (n) \;\; n > N \Longrightarrow x_n \in U(A, \varepsilon).$$

Тот факт, что A является пределом последовательности $\{x_n\}$ при $n \to \infty$ записывают как

$$\lim_{n \to \infty} x_n = A.$$

Для предела последовательности справедливы все соответствующие теоремы о пределах. Докажем еще одно утверждение, которое пригодится нам в дальнейшем.

Лемма 1 (о вложенных отрезках)**.** *Пусть задана бесконечная последовательность отрезков* $[a_n, b_n]$*,* $i = 1, 2, \ldots$*, вложенных друг в друга:*

$$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \ldots \supset [a_n, b_n] \supset \ldots,$$

причем длина n-го отрезка стремится к нулю: $\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$*. Тогда существует единственная точка c, принадлежащая всем отрезкам, и такая, что* $\lim_{n\to\infty} a_n = c$*,* $\lim_{n\to\infty} b_n = c$*.*

Доказательство приведено в Приложении[5)].

3 Первый замечательный предел

Докажем, что

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.}$$

Эта формула часто используется в математике и приложениях и называется ***первым замечательным пределом***. Мы видим здесь предел частного,

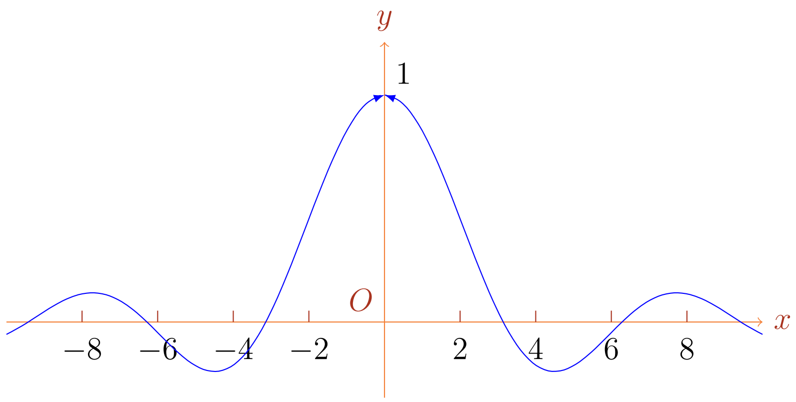

Рис. 1. График функции $y = \dfrac{\sin x}{x}$.

но теоремой о пределе частного пользоваться нельзя, так как предел знаменателя равен нулю. Интересно также то, что сама функция $y = \frac{\sin x}{x}$ в нуле не существует (рис. 1).

Сначала докажем с помощью рис. 2 одно вспомогательное неравенство. На рис. изображена четверть окружности единичного радиуса; перпендикуляр NA, опущенный на ось Ox в точку пересечения окружности с этой осью; луч ON, выходящий из начала координат под углом x (в радианной мере) и пересекающий перпендикуляр (в точке N) и окружность (в точке M); перпендикуляр MB, опущенный на ось абсцисс; отрезок MA. Из рис. видно, что выполняется двойное неравенство:

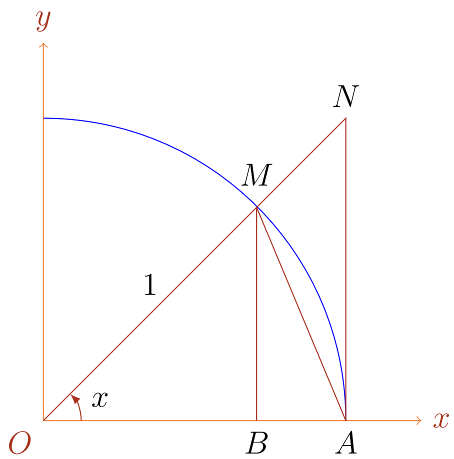

Рис. 2.

$$S_{\triangle OAM} < S_{\text{сектора}\, OAM} < S_{\triangle OAN}.$$

Вычисляя площади геометрических фигур, получаем

$$\frac{1}{2}\sin x < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}\operatorname{tg} x. \qquad (1)$$

Разделим на $\sin x$ и обернем неравенство:

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1. \qquad (2)$$

Теперь докажем, что $\lim_{x\to 0}\cos x = 1$, т. е., что справедливо утверждение

$$\forall\left(\varepsilon^2/2\right)\exists\,(\delta > 0)\,\forall\,(x : x \neq 0)\;|\,x| < \delta \Longrightarrow 1 - \cos x < \frac{\varepsilon^2}{2}.$$

Для этого заметим, что из неравенства (1) следует, что $\sin^2 x < x^2$. И это неравенство, и неравенство (2) были получены для $x \in (0;\pi/2)$, но они остаются справедливыми и при $x \in (-\pi/2; 0)$ в силу четности входящих в них функций. Далее видим, что

$$1 - \cos x = 2\sin^2 \frac{x}{2} < \frac{x^2}{2} < \frac{\varepsilon^2}{2}$$

выполнится при $\delta(\varepsilon) = \min\left(\varepsilon^2/2, \pi/2\right)$. Это и означает стремление $\cos x$ к 1 при $x \to 0$.

Остается применить теорему 8 к неравенству (2), чтобы завершить доказательство первого замечательного предела.

4 Второй замечательный предел

Еще большее значение имеет предел

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e,}$$

где $e \approx 2,71828$ — иррациональное число.

График функции $y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ показан на рис. 3.

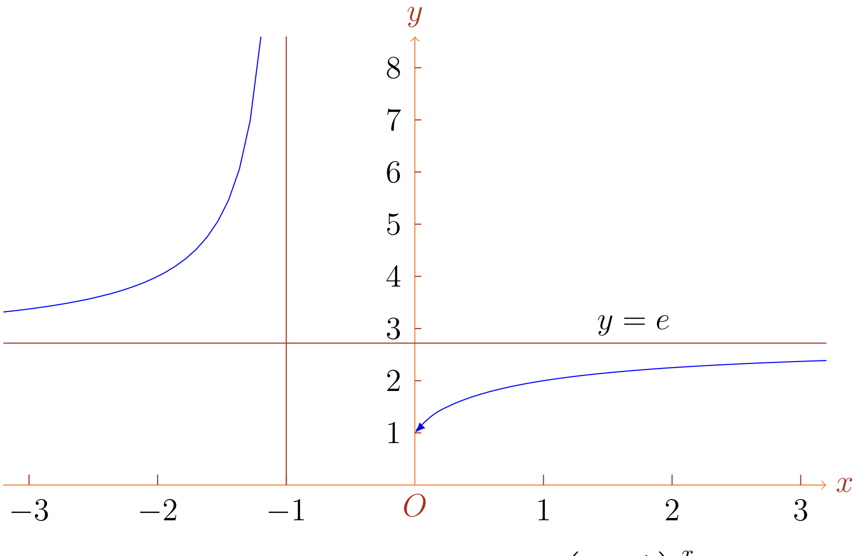

Рис. 3. График функции $y = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$.

Этот предел называется ***вторым замечательным пределом***. Число e является основанием показательной функции $y = e^x = \exp(x)$, называемой ***экспоненциальной***, или просто ***экспонентой***, а также основанием так называемых ***натуральных*** логарифмов: $\ln x \triangleq \log_e x$. И экспонента, и натуральные логарифмы широко используются как в высшей математике, так и во многих приложениях. Доказательство второго замечательного предела приведено в Приложении[6)].

5 Сравнение бесконечно малых

Теперь вернемся к бесконечно малым, так как теоретические положения, изученные нами, позволяют эффективно использовать такие функции при вычислении пределов.

Рассмотрим две бесконечно малых $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ при $x \to a \in \overline{\mathbb{R}}$.

Если предел отношения $\lim_{x\to a}\frac{\beta}{\alpha}$ конечен и не равен нулю, то бесконечно малые α и β называются ***бесконечно малыми одного порядка***.

Если же $\lim_{x\to a}\frac{\beta}{\alpha} = 0$, то β называется ***бесконечно малой высшего порядка***, чем α; а α называется ***бесконечно малой низшего порядка***, чем β. При этом пишут $\beta = o(\alpha)$.

Бесконечно малая β называется ***бесконечно малой k-го порядка*** относительно бесконечно малой α, если β и α^k — бесконечно малые одного порядка, т. е., если $\lim_{x\to a}\frac{\beta}{\alpha^k} = A$, $A \neq 0$, $A \neq \pm\infty$.

Если $\lim_{x\to a}\frac{\beta}{\alpha} = 1$, то бесконечно малые α и β называются ***эквивалентными*** бесконечно малыми и пишут $\alpha \sim \beta$.

Если предел $\lim_{x\to a}\frac{\beta}{\alpha}$ не существует, то бесконечно малые α и β называются ***несравнимыми***.

Например, $\sin 2x$ и x — б.м. одного порядка при $x \to 0$, потому что

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x} = 2\lim_{2x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x} = 2.$$

Так как

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\sin x = 1\cdot 0 = 0,$$

то $\sin^2 x = o(x)$ при $x \to 0$.

Функция $\operatorname{tg}^3 x$ есть б.м. третьего порядка по отношению к x, так как

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}^3 x}{x^3} = \left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{\lim_{x\to 0}\cos x}\right)^3 = 1\cdot 1 = 1,$$

В силу

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x} = \langle x = \sin y\rangle = \lim_{y\to 0}\frac{y}{\sin y} = 1$$

при $x \to 0$ справедлива эквивалентность $\arcsin x \sim x$.

Бесконечно малые $x\sin\frac{1}{x}$ и $\arcsin x$ несравнимы при $x\to 0$, так как следующий предел не существует:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\sin\frac{1}{x}}{\arcsin x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\arcsin x}\cdot\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}=\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}=\langle x=1/y\rangle=\lim_{y\to\infty}\sin y.$$

Теорема 9. *Предел отношения двух бесконечно малых не изменится, если хотя бы одну из них заменить эквивалентной бесконечно малой.*

Доказательство. Пусть $\alpha\sim\alpha'$, $\beta\sim\beta'$ при $x\to a\in\overline{\mathbb{R}}$. Тогда

$$\lim_{x\to a}\frac{\beta}{\alpha}=\lim_{x\to a}\left(\frac{\beta}{\alpha}\cdot\frac{\beta'}{\beta'}\cdot\frac{\alpha'}{\alpha'}\right)=\lim_{x\to a}\frac{\beta}{\beta'}\lim_{x\to a}\frac{\alpha'}{\alpha}\lim_{x\to a}\frac{\beta'}{\alpha'}=1\cdot 1\cdot\lim_{x\to a}\frac{\beta'}{\alpha'},$$

т. е.

$$\lim_{x\to a}\frac{\beta}{\alpha}=\lim_{x\to a}\frac{\beta'}{\alpha'}.$$

Так как α и β эквивалентны сами себе, то из доказанного равенства следует, что

$$\lim_{x\to a}\frac{\beta}{\alpha}=\lim_{x\to a}\frac{\beta}{\alpha'}=\lim_{x\to a}\frac{\beta'}{\alpha}.$$

Теорема 10. *Разность двух эквивалентных бесконечно малых есть бесконечно малая более высокого порядка, чем каждая из них:* $\alpha\sim\beta\Longrightarrow$ $\Longrightarrow\alpha-\beta=o(\alpha)\wedge\alpha-\beta=o(\beta)$.

Доказательство. Следует из того, что

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha-\beta}{\alpha}=1-\lim_{x\to a}\frac{\beta}{\alpha}=1-1=0.$$

Теорема 11. *Если разность двух бесконечно малых есть бесконечно малая более высокого порядка, чем каждая из них, то эти бесконечно малые эквивалентны:* $\alpha-\beta=o(\alpha)\wedge\alpha-\beta=o(\beta)\Longrightarrow\alpha\sim\beta$.

Доказательство. Пусть Так как

$$0=\lim_{x\to a}\frac{\alpha-\beta}{\alpha}=1-\lim_{x\to a}\frac{\beta}{\alpha},$$

то

$$\lim_{x\to a}\frac{\beta}{\alpha}=1,$$

из чего и выводим, что $\alpha\sim\beta$. □

Для бесконечно больших величин могут быть введены те же понятия и проведена такая же классификация, как и для бесконечно малых. Например, если $\lim_{x\to a}\frac{\beta}{\alpha}=1$, то бесконечно большие α и β называются ***эквивалентными*** и пишут $\alpha\sim\beta$. Для эквивалентных бесконечно больших справедлива теорема 9.

Заменяя при вычислении пределов бесконечно малые (бесконечно большие) эквивалентными им функциями, можно значительно упростить процесс вычисления пределов. Следующая теорема дает для этого подходящий набор эквивалентностей.

Теорема 12. *При $x\to 0$ имеют место следующие эквивалентности:*

1) $\sin x\sim x$,
2) $\operatorname{tg} x\sim x$,
3) $\arcsin x\sim x$,
4) $\operatorname{arcctg} x\sim x$,
5) $\ln(1+x)\sim x$,
6) $e^x-1\sim x$,
7) $(a+x)^k-a^k\sim kxa^{k-1}$,
8) $\sqrt[k]{a^k+x}-a\sim\frac{1}{k}a^{1-k}x$.

При $x\to\infty$ справедлива эквивалентность
9) $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n\sim a_0x^n$.

Доказательство приведено в Приложении[7)].

Пример 1. *Вычислить предел*

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^4-5x^2+1}{1-2x^4}.$$

Решение. На основании 9-й эквивалентности теоремы

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^4-5x^2+1}{1-2x^4}=\lim_{x\to\infty}\frac{4x^4}{-2x^4}=\frac{4}{-2}=-2.$$

Пример 2. *Найти предел*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin^3 3x}{x^3}.$$

Решение. Используем 3-ю эквивалентность:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin^3 3x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{27x^3}{x^3}=27.$$

Пример 3. *Найти предел*

$$\lim_{x\to 0}(1-2x)^{1/x^2}.$$

Решение. Применяя 5-ю эквивалентность, имеем

$$\lim_{x\to 0}(1-2x)^{1/x^2} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x^2}\ln(1-2x)} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x^2}(-2x)} = \lim_{x\to 0} e^{-2/x} = 0.$$

Пример 4. *Найти предел*

$$\lim_{x\to 0}\frac{2^x-3^x}{x}.$$

Решение. Применяя 6-ю эквивалентность, получаем

$$\lim_{x\to 0}\frac{2^x-3^x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{x\ln 2}-e^{x\ln 3}}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{x\ln 2}-1-(e^{x\ln 3}-1)}{x} =$$
$$= \ln 2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{e^{x\ln 2}-1}{x\ln 2} - \ln 3\cdot\lim_{x\to 0}\frac{e^{x\ln 3}-1}{x\ln 3} = \ln 2-\ln 3 = \ln\frac{2}{3}.$$

Пример 5. *Найти предел*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{x^2}.$$

Решение. Используем 5-ю и 1-ю эквивалентности:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\ln[1+(\cos x-1]}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2} = -\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2} = -\lim_{x\to 0}\frac{2\cdot\frac{x^2}{4}}{x^2} = -\frac{1}{2}.$$

□

В Приложении приведено два примера, показывающие применение пределов в задачах, имеющих отношение к вашей специальности[8)].

Продолжение демонстрации возможностей системы Математика в вычислении пределов также см. в Приложении[9)].

Приложение

[1] *Доказательство теоремы 5.*

Пусть функция $f(x)$ возрастает и ограничена сверху на промежутке S. Тогда множество ее значений E тоже ограничено и, следовательно, имеет конечную верхнюю грань A (см. лекцию «Числа»). Покажем, что число A и будет пределом функции при $x \to a$. По определению верхней грани справедливо утверждение:

$$\forall(\varepsilon > 0)\,\exists(y_1 \in E)\;\; A - \varepsilon < y_1,$$

или

$$\forall(\varepsilon > 0)\,\exists(x_1 < a)\;\; A - \varepsilon < f(x_1),$$

где $y_1 = f(x_1)$. Но тогда и для всякого x, $a > x \geq x_1$, в силу возрастания функции $f(x)$ выполнится $f(x) \geq f(x_1) > A - \varepsilon$.

С другой стороны, из ограниченности функции следует, что $f(x) \leq A < A + \varepsilon$. Таким образом, получается, что $|f(x) - A| < \varepsilon$.

В результате приходим к справедливости высказывания

$$\forall(\varepsilon > 0)\,\exists(\delta > 0)\,\forall(x \neq a)\;\; x \in U(a, \delta) \Longrightarrow |f(x) - A| < \varepsilon,$$

где $\delta = a - x_1$, если $a \in \mathbb{R}$, и $\delta = \max(x_1, 0)$, если $a = \infty$. Из этого высказывания и следует, что $\lim_{x\to a} f(x) = A$. Остальные утверждения теоремы доказываются аналогично.

[2] *Доказательство теоремы 6.*

В силу существования указанных в условии теоремы пределов имеем следующие истинные высказывания:

$$\forall(\varepsilon_1 > 0)\,\exists(\delta_1 > 0)\,\forall(x : x \neq x_0)\;\; x \in U(x_0, \delta_1) \Longrightarrow \varphi(x) \in U(a, \varepsilon_1),$$

$$\forall(\varepsilon > 0)\,\exists(\delta_2 > 0)\,\forall(u \neq a)\;\; y \in U(a, \delta_2) \Longrightarrow f(u) \in U(A, \varepsilon).$$

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и найдем такое δ_2, что выполнится второе утверждение. Для первого утверждения возьмем $\varepsilon_1 = \delta_2$ и для него найдем такое δ_1, что выполнится $\forall(x : x \neq x_0)$ $x \in U(x_0, \delta_1) \Longrightarrow \varphi(x) \in U(a, \delta_2)$. Но тогда из второго утверждения получаем, что $\varphi(x) \neq a \wedge$ $\wedge\, \varphi(x) \in U(a, \delta_2) \Longrightarrow f(\varphi(x)) \in U(A, \varepsilon)$.

[3] *Доказательство теоремы 7.* Обозначим $A = \lim_{x\to x_0} f(x)$, $B = \lim_{x\to x_0} g(x)$. По определению предела имеем

$$\forall(\varepsilon > 0)\,\exists(\delta_1 > 0)\,\forall(x : x \neq x_0)\;\; x \in U(x_0, \delta_1) \Longrightarrow A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon,$$
$$\forall(\varepsilon > 0)\,\exists(\delta_2 > 0)\,\forall(x : x \neq x_0)\;\; x \in U(x_0, \delta_2) \Longrightarrow B - \varepsilon < g(x) < B + \varepsilon.$$

Предположим противное: $B < A$. Возьмем $0 < \varepsilon < (A - B)/2$ и $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, если $x_0 \in \mathbb{R}$, и $\delta = \max(\delta_1, \delta_2)$, если $x_0 = \pm\infty$. Тогда из определений пределов следует, что при $x \in U(x_0, \delta) \wedge x \neq x_0$

$$f(x) > A - \varepsilon > A - (A - B)/2 = (A + B)/2 = B + (A - B)/2 > B + \varepsilon > g(x).$$

Получили, что $f(x) > g(x)$, что противоречит условию теоремы. Следовательно, $A \leq B$.

[4] *Доказательство теоремы 8.* Пусть $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} h(x) = A \in \mathbb{R}$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существуют две окрестности $U(x_0, \delta_1)$ и $U(x_0, \delta_2)$, в одной из которых выполняется неравенство

$$-\varepsilon < f(x) - A < \varepsilon,$$

а в другой — неравенство

$$-\varepsilon < h(x) - A < \varepsilon.$$

Примем $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, если $x_0 \in \mathbb{R}$, и $\delta = \max(\delta_1, \delta_2)$, если $x_0 = \pm\infty$, чтобы выполнялись оба неравенства. Из неравенства в условии теоремы следует, что

$$f(x) - A \le g(x) - A \le h(x) - A.$$

С учетом предыдущих двух неравенств из последнего неравенства получаем неравенство $-\varepsilon < g(x) - A < \varepsilon$, которое и означает, что число A является пределом функции $g(x)$ при $x \to x_0$.

[5] *Доказательство леммы 1.*

Прежде всего отметим, что для любых двух отрезков $[a_m, b_m]$, $[a_n, b_n]$ последовательности $a_m \le b_n$. Действительно, в противном случае выполняется $a_n \le b_n < a_m \le b_m$, и, значит, отрезки не имеют общих точек, что противоречит их вложенности. Итак, $a_m \le b_n$ и тогда в силу свойства полноты действительных чисел (лекция «Числа») найдется число c такое, что $a_m \le c \le b_n$, в частности, для любого n выполнится $a_n \le c \le b_n$. Это означает, что точка c принадлежит всем отрезкам последовательности.

Предположим, что таких точек две: c_1 и c_2 и пусть $c_1 < c_2$. Тогда $a_n \le c_1 < c_2 \le b_n$ и поэтому $0 < c_2 - c_1 < b_n - a_n$. Так как $\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$, то по теореме 8 функция $c_2 - c_1$ должна иметь пределом 0. Но это невозможно: $c_2 - c_1 > 0$. Полученное противоречие доказывает единственность точки c.

Далее, последовательность $\{a_n\}$ возрастает и ограничена сверху числом c, которое, как нетрудно видеть, является верхней гранью этой последовательности. Поэтому, как следует из доказательства теоремы 5, это число и будет пределом данной последовательности: $\lim_{n\to\infty} a_n = c$. Аналогично доказывается, что $\lim_{n\to\infty} b_n = c$.

[6] *Доказательство второго замечательного предела.*

Рассмотрим последовательность

$$\{x_n\} = \left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right\},\ n = 1, 2, \dots .$$

Так как

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!},\ k = 1, 2, \dots ,$$

то по формуле бинома Ньютона

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k} = b^n + \sum_{k=1}^{n} \frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!} a^k b^{n-k}.$$

Возьмем в этой формуле $a = 1/n$, $b = 1$:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!} \cdot \frac{1}{n^k},$$

и разделим в правой части числитель первой дроби на знаменатель второй:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} \cdot 1 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{k-1}{n}\right). \qquad (\Pi 1)$$

Из этой формулы следует, что в правой части все числа в скобках вида $1 - k/n$ положительны и возрастают с увеличением n; значит, и все слагаемые в правой части формулы также положительны и возрастают. С увеличением n увеличивается и количество слагаемых, так что последовательность $\{x_n\}$ как функция n возрастает и при этом $(1+1/n)^n > 2$.

Покажем, что последовательность $\{x_n\}$ ограничена также и сверху. Заменим в правой части формулы (П1) каждую пару скобок единицей:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 2+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot k},$$

а затем все множители в $3\cdot\ldots\cdot k$ заменим двойкой и применим формулу суммы бесконечной геометрической прогрессии:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 2+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{2^{k-1}} = 2+\frac{1/2}{1-1/2} = 3.$$

Итак,

$$2 < \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3.$$

По теореме 5 последовательность $\{x_n\}$ имеет предел. Обозначим этот предел

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e,$$

где e — уже упоминавшееся иррациональное число.

Теперь докажем, что

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e,\ x\in\mathbb{R}. \tag{П2}$$

Каждое действительное число x заключено между двумя целыми числами: $n \le x < n+1$, где n — наибольшее целое число, не большее x. Тогда

$$\frac{1}{n+1} < \frac{1}{x} \le \frac{1}{n},\ 1+\frac{1}{n+1} < 1+\frac{1}{x} \le 1+\frac{1}{n},$$

или

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n < \left(1+\frac{1}{x}\right)^x \le \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}. \tag{П3}$$

Но

$$\lim_{n+1\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n = \frac{\lim\limits_{n+1\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\lim\limits_{n+1\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)} = \frac{e}{1} = e,$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = e\cdot 1 = e.$$

Из этих пределов, неравенства (П3) и теоремы 8 получаем (П2).

[7] *Доказательство теоремы 12.*

1) следует из первого замечательного предела.

2)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\cos x = 1\cdot 1 = 1.$$

3)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x} = \langle x=\sin y\rangle = \lim_{y\to 0}\frac{y}{\sin y} = 1.$$

4) На основании 1)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arcctg} x}{x}=\langle x=\operatorname{tg} y\rangle=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\operatorname{tg} y}=1.$$

5) На основании второго замечательного предела и теоремы о пределе сложной функции получаем

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{1/x}=\ln\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=\ln e=1.$$

6) На основании 5)

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\langle x=\ln(1+y)\rangle=\lim_{y\to 0}\frac{e^{\ln(1+y)}-1}{\ln(1+y)}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\ln(1+y)}=1.$$

7) На основании бинома Ньютона

$$\lim_{x\to 0}\frac{(a+x)^k-a^k}{kxa^{k-1}}=\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{a^k}-\cancel{a^k}+kxa^{k-1}+\frac{(k-1)k}{2}x^2+\ldots+x^k}{kxa^{k-1}}=$$

$$=1+\lim_{x\to 0}\left(\frac{k-1}{2a^{k-1}}x+\ldots+\frac{x^{k-1}}{ka^{k-1}}\right)=1.$$

8) На основании 7)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[k]{a^k+x}-a}{\frac{1}{k}a^{1-k}x}=\left\langle a^k+x=(y+a)^k\right\rangle=\lim_{y\to 0}\frac{y+\cancel{a}-\cancel{a}}{\left[(y+a)^k-a^k\right]\frac{1}{k}a^{1-k}}=$$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\left[(y+a)^k-a^k\right]\frac{1}{k}a^{1-k}}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{kya^{k-1}\frac{1}{k}a^{1-k}}=1.$$

9)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n}{a_0x^n}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a_1}{a_0}\cdot\frac{1}{x}+\ldots+\frac{a_n}{a_0}\cdot\frac{1}{x^n}\right)=1.$$

[8)] Применение теории пределов можно рассмотреть на примере анализа поведения электрических контуров.

Например, если предположить, что в электрический контур, состоящий из резистора R, конденсатора C и индуктивности L на очень короткое время t_0 подается постоянное напряжение E, то, начиная с момента $t=0$, в контуре действует ток

$$i(t)=\frac{Et_0}{\omega L}\,e^{-\alpha t}[\omega\cos\omega t-\alpha\sin\omega t],\ \alpha=\frac{1}{2RC},\ \omega=\sqrt{\frac{1}{LC}-\alpha^2}.$$

Если нас интересует, как ведет себя ток, когда время неограниченно увеличивается, надо в приведенной формуле перейти к пределу при $t\to\infty$. Мы видим, что $\alpha>0$, а $\lim_{t\to\infty}e^{-\alpha t}=0$. При этом остальные множители – ограниченные функции. Следовательно, с течением времени ток стремится к нулю.

Если контур не содержит индуктивности и в него в начальный момент времени начинает подаваться постоянное напряжение U, напряжение на конденсаторе станет изменяться по формуле:

$$u(t)=U\left(1-e^{-\beta t}\right),\ \beta=\frac{1}{RC}.$$

И в этом случае экспонента стремится к нулю, и в результате напряжение на конденсаторе стремится к напряжению на входе в контур.

[9] *Mathematica* вычисляет замечательные пределы, пределы, вычисляемые на их основе, и прочие хитроумные пределы без затруднений и неприятных неожиданностей. Убедимся в этом, решив с ее помощью примеры, рассмотренные на лекции.

$$\text{Limit}\left[\frac{\text{Sin}[x]}{x},\ x \to 0\right]$$

1

$$\text{Limit}\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x},\ x \to \infty\right]$$

e

$$\text{Limit}\left[\frac{4x^4-5x^2+1}{1-2x^4},\ x \to \infty\right]$$

-2

$$\text{Limit}\left[\frac{\text{ArcSin}[3x]^3}{x^3},\ x \to 0\right]$$

27

$$\text{Limit}\left[(1-2x)^{1/x^2},\ x \to 0\right]$$

0

$$\text{Limit}\left[\frac{2^x-3^x}{x},\ x \to 0\right]$$

$$-\text{Log}\left[\frac{3}{2}\right]$$

$$\text{Limit}\left[\frac{\text{Log}[\text{Cos}[x]]}{x^2},\ x \to 0\right]$$

$$-\frac{1}{2}$$

Литература

[1] Бугров Я.С., Никольский С.М. *Высшая математика. Дифференциальное и интегральное исчисление.* – М.: Наука, 1984, – с. 116-122.

[2] Письменный Д.Т. *Конспект лекций по высшей математике.* – М.: Рольф, 2000. Ч. 1. – с. 119–129.