Ряд Лорана

Волченко Ю.М.

Содержание лекции

Понятие ряда Лорана, область его сходимости. Правильная и главная части ряда Лорана. Условия разложимости функций в ряд Лорана. Свойства ряда Лорана. Правильные и особые точки функции, их классификация. Определение типа изолированных особых точек с помощью ряда Лорана. Ряд Лорана в окрестности бесконечно удаленной точки.

6 марта 2016 г.

При изучении степенных рядов было установлено, что областью сходимости степенного ряда является внутренность круга. Теперь предположим, что в центре круга комплексная функция не существует, а в остальной части круга существует. Значит, разложение в ряд Тейлора применять нельзя. Может возникнуть вопрос: а зачем вообще рассматривать такую ситуацию? А вот зачем: точки, в которых не существует интересующая нас функция, могут быть точками сосредоточения зарядов. Поэтому нас, естественно, будет интересовать поведение функции в окрестностях таких точек. Выход был найден «изобретением» специального ряда, ряда Лорана.

1 Определение ряда Лорана

Рядом Лорана называется ряд вида

$$\underbrace{\ldots + c_{-2}\left(z-z_0\right)^{-2} + c_{-1}\left(z-z_0\right)^{-1}}_{\text{Главная часть}} + \underbrace{c_0 + c_1\left(z-z_0\right) + c_2\left(z-z_0\right)^2 + \ldots}_{\text{Правильная часть}} =$$

$$= \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n\left(z-z_0\right)^n}_{\text{Главная часть}} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} c_n\left(z-z_0\right)^n}_{\text{Правильная часть}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\left(z-z_0\right)^n .$$

В выписанной формуле выделены его ***главная*** и ***правильная части***. Главная часть ряда содержит степени с отрицательными показателями, а правильная — с неотрицательными.

Правильная часть ряда Лорана является обычным степенным рядом и поэтому сходится внутри круга с некоторым радиусом сходимости R и центром в точке z_0, то есть при $|z-z_0| < R$. Чтобы выяснить вопрос о сходимости главной части, преобразуем ее:

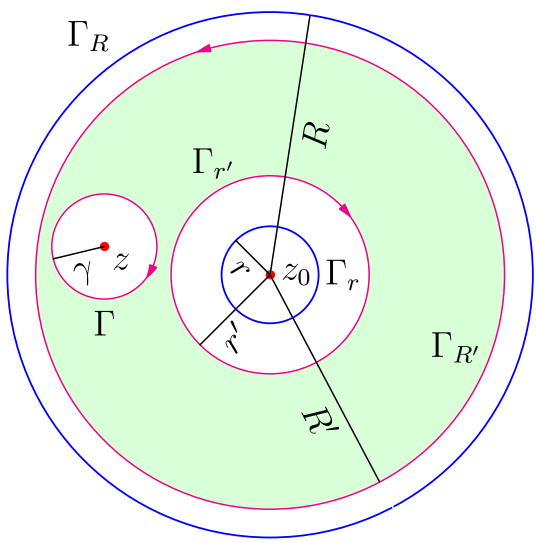
$$\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (z-z_0)^n = \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} \frac{1}{(z-z_0)^n} = \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} w^n,$$

где $w = 1/(z-z_0)$. Таким образом, и главная часть теперь имеет вид степенного ряда, который сходится при $|w| < r_1$, или $|z-z_0| > r$, где $r = 1/r_1$. Значит, если $r < R$, то ряд Лорана абсолютно и равномерно сходится в кольце

$$r < |z-z_0| < R. \tag{1}$$

Если же $r > R$, то ряд Лорана расходится. В дальнейшем кольцо (1) будем называть *кольцом сходимости*.

Теорема 1 (Лорана). *Пусть $0 \le r < R < \infty$. Всякая аналитическая в кольце $S : r < |z-z_0| < R$ функция $f(z)$ представляется в нем сходящимся к ней рядом Лорана*



$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n,$$

где

$$c_n = \frac{1}{2\pi j} \int_{\gamma^+} \frac{f(\eta)}{(\eta-z_0)^{n+1}} d\eta, \tag{2}$$

$n = 0, \pm1, \pm2, \ldots,$ γ — любая окружность вида $|\eta - z_0| = \rho$, $r < \rho < R$.

Доказательство. Пусть $z \in S$. Построим кольцо $S' : r' < |\eta - z_0| < R'$, лежащее внутри S и содержащее точку z. Еще добавим окружность $|\eta - z| = \rho$ с центром в точке z, расположенную внутри S'. Поскольку функция

$$\frac{f(\eta)}{\eta - z}$$

аналитична по η в области S, за исключением точки $\eta = z$, то по теореме Коши для многосвязной области[†] имеем

$$\frac{1}{2\pi j}\int\limits_{\Gamma_{R'}^{+}}\frac{f(\eta)}{\eta-z}\,d\eta+\frac{1}{2\pi j}\int\limits_{\Gamma_{r'}^{+}}\frac{f(\eta)}{\eta-z}\,d\eta+\frac{1}{2\pi j}\int\limits_{\Gamma^{+}}\frac{f(\eta)}{\eta-z}\,d\eta=0, \tag{3}$$

где приняты следующие обозначения для окружностей:

$$\Gamma_{R'}:|\eta-z_0|=R',\ \Gamma_{r'}:|\eta-z_0|=r',\ \Gamma:|\eta-z|=\rho.$$

Но последний интеграл в формуле (3) в силу интегральной формулы Коши равен $-f(z)$, так что

$$f(z)=\frac{1}{2\pi j}\int\limits_{\Gamma_{R'}^{+}}\frac{f(\eta)}{\eta-z}\,d\eta+\frac{1}{2\pi j}\int\limits_{\Gamma_{r'}^{+}}\frac{f(\eta)}{\eta-z}\,d\eta. \tag{4}$$

Подынтегральную функцию в первом интеграле представим в виде

$$\frac{f(\eta)}{\eta-z}=\frac{f(\eta)}{(\eta-z_0)-(z-z_0)}=\frac{f(\eta)}{\eta-z_0}\cdot\frac{1}{1-\frac{z-z_0}{\eta-z_0}}=$$

$$=\frac{f(\eta)}{\eta-z_0}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{\eta-z_0}\right)^n. \tag{5}$$

Поскольку $\eta\in\Gamma_{R'}$ и $|z-z_0|/|\eta-z_0|<1$, то ряд (5) сходится. Аналогично для второго интеграла

$$\frac{f(\eta)}{(\eta-z_0)-(z-z_0)}=-\frac{f(\eta)}{z-z_0}\cdot\frac{1}{1-\frac{\eta-z_0}{z-z_0}}=-\frac{f(\eta)}{z-z_0}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\eta-z_0}{z-z_0}\right)^n. \tag{6}$$

Теперь $\eta\in\Gamma_{r'}$, $|\eta-z_0|/|z-z_0|<1$ и, значит ряд (6) сходится. Интегрируя равенства (5) и (6), получим

$$\frac{1}{2\pi j}\int\limits_{\Gamma_{R'}^{+}}\frac{f(\eta)}{\eta-z}\,d\eta=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi j}\int\limits_{\Gamma_{R'}^{+}}\frac{f(\eta)}{(\eta-z_0)^{n+1}}\,d\eta\right)(z-z_0)^n,$$

$$\frac{1}{2\pi j}\int\limits_{\Gamma_{r'}^{+}}\frac{f(\eta)}{\eta-z}\,d\eta=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi j}\int\limits_{\Gamma_{r'}^{-}}f(\eta)(\eta-z_0)^n\,d\eta\right)\frac{1}{(z-z_0)^{n+1}}.$$

Внутренние интегралы равны, соответственно, таким же интегралам по любой окружности γ с центром z_0 радиуса ρ', $r<\rho'<R$. Поэтому из двух последних

[†] Лекция «Комплексный интеграл».

равенств и равенства (4) получаем

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi j} \int\limits_{\gamma^+} \frac{f(\eta)}{(\eta - z_0)^{n+1}} \, d\eta \right) (z - z_0)^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n,$$

где

$$c_n = \frac{1}{2\pi j} \int\limits_{\gamma^+} \frac{f(\eta)}{(\eta - z_0)^{n+1}} \, d\eta, \; n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots .$$

$\square$

Перечислим некоторые свойства, присущие ряду Лорана.

СВОЙСТВА РЯДА ЛОРАНА

1°. *Ряд Лорана сходится абсолютно и равномерно в любом замкнутом кольце, целиком расположенном в кольце сходимости.*

Следует из доказанного ранее.

2°. *Ряд Лорана можно интегрировать почленно по любому контуру, целиком лежащему внутри кольца сходимости; его можно почленно дифференцировать внутри кольца сходимости сколько угодно раз.*

3°. *Разложение в ряд Лорана единственно: если функция $f(z)$ раскладывается в кольце $0 \le r < |z - z_0| < R$ в ряд вида*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \tag{7}$$

то коэффициенты c_n выражаются формулой (2).

Действительно, умножим обе части равенства (7) на $\frac{1}{2\pi j (z - z_0)^{k+1}}$ и проинтегрируем по любому охватывающему точку z_0 контуру γ, целиком лежащему в кольце сходимости. Получим

$$\frac{1}{2\pi j} \int\limits_{\gamma^+} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} \, dz = \frac{1}{2\pi j} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \int\limits_{\gamma^+} (z - z_0)^{n-k-1} \, dz. \tag{8}$$

В последнем интеграле сделаем замену $z - z_0 = R\, e^{j\varphi}$, $dz = Rje^{j\varphi} d\varphi$, тогда

$$\int\limits_{\gamma^+} (z - z_0)^{n-k-1} \, dz = \int_0^{2\pi} R^{n-k-1} e^{j(n-k-1)\varphi} Rje^{j\varphi} \, d\varphi =$$

$$= R^{n-k} j \int_0^{2\pi} e^{j(n-k)\varphi} \, d\varphi.$$

При $n \neq k$ получим

$$\int\limits_{\gamma^+} (z - z_0)^{n-k-1}\, dz = \frac{R^{n-k}}{n-k}\, e^{j(n-k)\varphi}\Big|_0^{2\pi} = \frac{R^{n-k}}{n-k}\left[e^{2\pi j(n-k)} - e^0\right] = 0,$$

поскольку экспонента имеет период $2\pi j$. При $n = k$ будем иметь

$$\int\limits_{\gamma^+} (z - z_0)^{-1}\, dz = j\int_0^{2\pi} d\varphi = j\varphi\Big|_0^{2\pi} = 2\pi j.$$

Поэтому от ряда в правой части равенства (8) останется лишь одно слагаемое (при $n = k$), равное $c_k 2\pi j$, так что выполнится

$$\frac{1}{2\pi j}\int\limits_{\gamma^+} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}}\, dz = c_k.$$

Это завершает доказательство.

Пример 1. *Разложить в ряд Лорана в окрестности точки $z_0 = 0$ функцию*

$$f(z) = \frac{e^z}{z^3}.$$

Решение. Воспользуемся разложением функции e^z в ряд Маклорена:

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Тогда искомое разложение в ряд Лорана будет иметь вид

$$f(z) = \frac{1}{z^3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n-3}}{n!} = z^{-3} + z^{-2} + \frac{1}{2}\, z^{-1} + \sum_{n=3}^{\infty}\frac{z^{n-3}}{n!}.$$

Первые три слагаемых образуют главную часть разложения, остальные – правильную.

2 Особые точки и их классификация

Пусть функция $f(z)$ задана в области D_Γ. Точка $z_0 \in D_\Gamma + \Gamma$ называется ***правильной точкой*** функции $f(z)$, если существует сходящийся степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$, который в общей части D_Γ и своего круга сходимости сходится к функции $f(z)$.

Точка $z_0 \in D_\Gamma + \Gamma$ называется ***особой точкой*** функции $f(z)$, если она не является ее правильной точкой.

Следствие 1. *Если функция $f(z)$ аналитична в области D_Γ, то все внутренние точки этой области являются ее правильными точками, так как $f(z)$ в окрестностях этих точек представляется сходящимся к ней рядом Тейлора. Таким образом, особые точки функции, аналитической в области D_Γ, могут принадлежать только границе Γ области.*

Пусть z_0 — особая точка функции $f(z)$. Тогда z_0 называется ***изолированной*** особой точкой $f(z)$, если $f(z)$ является однозначной аналитической функцией в кольце $0 < |z - z_0| < R$. В дальнейшем будем рассматривать именно изолированные особые точки.

Точка z_0 называется ***устранимой*** особой точкой $f(z)$, если $f(z)$ аналитична в окрестности z_0 и существует конечный предел

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = a < \infty. \tag{9}$$

Особая точка z_0 называется ***полюсом m-го порядка***, $m \geq 1$, функции $f(z)$, если z_0 является нулем m-го порядка функции $g(z) = 1/f(z)$, то есть $g(z) = (z - z_0)^m \varphi(z)$, $\varphi(z_0) \neq 0$. Очевидно, $\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty$.

Точка z_0 называется ***существенно особой*** точкой функции $f(z)$, если $f(z)$ аналитична в окрестности z_0 и предел $\lim_{z \to z_0} f(z)$ не существует.

Лемма 1. *Если z_0 — устранимая особая точка функции $f(z)$, то эта функция ограничена в окрестности точки z_0.*

Доказательство. Действительно, в силу (9) для произвольного $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta > 0$, что при $z \in U(z_0, \delta)$ выполнится $|f(z) - a| < \varepsilon$. Но

$$|f(z) - a| < \varepsilon \Longrightarrow |f(z)| - |a| < \varepsilon \Longrightarrow |f(z)| < |a| + \varepsilon.$$

Теорема 2. *Для того чтобы точка z_0 была устранимой особой точкой функции, необходимо и достаточно, чтобы в разложении $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности z_0 отсутствовала главная часть, т. е. чтобы разложение в ряд Лорана имело вид*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n. \tag{10}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $f(z)$ раскладывается в ряд Лорана с коэффициентами (2). В силу предыдущей леммы функция на окружности γ: $|z - z_0| = \rho < R$ ограничена: $|f(\eta)| \leq M$. Пусть $n < 0$. Тогда

$$|c_n| = \frac{1}{2\pi} \left| \int\limits_{\gamma^+} \frac{f(\eta)}{(\eta - z_0)^{n+1}} \, d\eta \right| = \left\langle \eta - z_0 = \rho e^{j\varphi},\ d\eta = j\rho e^{j\varphi} \, d\varphi \right\rangle \leq$$

$$\leq \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\gamma^+}\frac{\left|f\left(z_0+\rho e^{j\varphi}\right)\right|\rho\left|je^{j\varphi}\right|}{\rho^{n+1}\left|e^{j(n+1)\varphi}\right|}d\varphi \leq \frac{M}{2\pi\rho^n}\int\limits_{\gamma^+}d\varphi =$$
$$= \frac{M}{2\pi\rho^n}\cdot 2\pi = M\rho^{-n}\underset{\rho\to 0}{\longrightarrow} 0 \text{ при } n<0.$$

Следовательно, $c_n = 0$ при $n < 0$.

Достаточность. Пусть $c_n = 0$ при $n < 0$. Тогда разложение функции $f(z)$ в ряд Лорана имеет вид (10) и поэтому $\lim_{z\to z_0} f(z) = c_0 < \infty$. Такую функцию можно доопределить: $f(z_0) = c_0$, в силу чего особая точка z_0 и названа устранимой.

Теорема 3. *Для того чтобы точка z_0 была полюсом m-го порядка функции $f(z)$, необходимо и достаточно, чтобы $c_n = 0$ при $n \leq -(m+1)$, $c_{-m} \neq 0$.*

Доказательство. Необходимость. В соответствии с определением полюса m-го порядка функцию можно представить в виде

$$f(z) = \frac{1}{(z-z_0)^m\varphi(z)}, \tag{11}$$

причем, $\varphi(z_0) \neq 0$, $\varphi(z)$ аналитична в окрестности z_0. Тогда $1/\varphi(z)$ тоже аналитична, следовательно, раскладывается в степенной ряд

$$\frac{1}{\varphi(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-z_0)^n,$$

где $b_0 = 1/\varphi(z_0) \neq 0$. Значит,

$$f(z) = \frac{1}{(z-z_0)^m}\sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-z_0)^{n-m} =$$
$$= \sum_{n=-m}^{\infty} c_n(z-z_0)^n,$$

причем, $c_{-m} = b_0 \neq 0$.

Достаточность. Пусть разложение функции в ряд Лорана имеет вид

$$f(z) = \sum_{n=-m}^{\infty} c_n(z-z_0)^n,\ c_{-m}\neq 0.$$

Тогда

$$f(z) = \frac{1}{(z-z_0)^m}\sum_{n=-m}^{\infty} c_n(z-z_0)^{n+m} = \frac{\psi(z)}{(z-z_0)^m},$$

где $\psi(z) = \sum_{n=-m}^{\infty} c_n (z - z_0)^{n+m}$. Функция $\psi(z)$ аналитична в окрестности точки z_0, так как представлена степенным рядом, причем $\psi(z_0) = c_{-m} \neq 0$. Но тогда и функция $\varphi(z) = 1/\psi(z)$ аналитична в окрестности z_0, причем $\varphi(z_0) = = 1/c_{-m} \neq 0$. Следовательно, функция $f(z)$ имеет вид (11) и, таким образом, точка z_0 является полюсом m-го порядка.

Теорема 4. *Главная часть разложения функции $f(z)$в ряд Лорана в кольце $0 < |z - z_0| < R$ тогда и только тогда содержит бесконечное число членов, когда z_0 – существенно особая точка $f(z)$.*

Доказательство. В противном случае пришлось бы признать, что z_0 – либо устранимая особая точка, либо полюс.

Пример 2. *Разложить в ряд Лорана в окрестности точки $z_0 = 0$ функцию*

$$f(z) = \frac{1}{z(1-z)}$$

и определить тип этой особой точки.

Решение. Получим ряд Лорана преобразованием заданной функции:

$$\frac{1}{z(1-z)} = \frac{1}{z} + \frac{1}{1-z} = \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} z^n.$$

Так как главная часть ряда Лорана содержит единственный член z^{-1} с коэффициентом $c_{-1} = 1$, то точка z_0 – полюс первого порядка.

Пример 3. *Определить характер особой точки $z_0 = 0$ для функции*

$$f(z) = e^{1/z}.$$

Решение. Так как функция e^z аналитична на всей комплексной плоскости, то ее разложение в ряд Лорана совпадает с ее разложением в ряд Тейлора и имеет вид $e^z = = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$. Тогда разложение функции $e^{1/z}$ в ряд Лорана получается таким:

$$e^{1/z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^n \cdot n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n \cdot n!} + 1.$$

Из него видно, что главная часть этого разложения содержит бесконечное число членов. Поэтому $z_0 = 0$ – существенно особая точка функции.

Пример 4. *Доказать, что особая точка $z_0 = 0$ функции*

$$f(z) = \frac{\sin z}{z}$$

является устранимой особой точкой.

Решение. Используем разложение функции $\sin z$ в ряд Маклорена:

$$\frac{\sin z}{z}=\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n+1)!}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n+1)!}.$$

Как видим главная часть в разложении отсутствует, поэтому z_0 — устранимая особая точка. Таким образом, заданную функцию можно доопределить: $f(0)=1$.

3 Ряд Лорана в окрестности ∞

Точка $z_0=\infty$ называется ***изолированной особой точкой*** функции $f(z)$, если вне круга некоторого радиуса с центром в начале координат функция $f(z)$ не имеет особых точек, находящихся на конечном расстоянии от начала координат.

Точка $z_0=\infty$ может относиться только к одному из уже рассмотренных типов изолированных особых точек. Правда, устранимую особую точку отождествляют с правильной точкой.

Чтобы определить характер особой точки $z_0=\infty$ делают замену $z=1/\eta$ и вводят новую функцию

$$\varphi(\eta)=f\left(\frac{1}{\eta}\right),$$

для которой точка $z_0=\infty$ становится нулем: $\eta_0=1/z_0=0$. При этом характер особой точки не меняется, поэтому, раскладывая $\varphi(\eta)$ в ряд Лорана и определяя тип особой точки $\eta_0=0$, делаем аналогичный вывод о типе особой точки $z_0=\infty$.

Пример 5. *Определить тип особой точки $z_0=\infty$ функции*

$$f(z)=\frac{1}{z(1-z)}.$$

Решение. Сделаем замену $z=1/\eta$ и получим новую функцию и ее разложение в ряд Лорана в окрестности точки $\eta_0=1/z_0=1/\infty=0$:

$$\varphi(\eta)=f\left(\frac{1}{\eta}\right)=\frac{\eta}{1-1/\eta}=\frac{\eta^2}{\eta-1}=-\eta^2\sum_{n=0}^{\infty}\eta^n=-\sum_{n=0}^{\infty}\eta^{n+2}=-\sum_{n=2}^{\infty}\eta^n,\ |\eta|<1.$$

Разложение не имеет главной части, поэтому точка $\eta_0=0$ — устранимая особая точка. Значит, такой же тип имеет и точка $z_0=\infty$. Но для такой точки принято отождествлять устранимую особую точку с правильной точкой. Так что $z_0=\infty$ — правильная точка заданной функции $f(z)$.

Пример 6. *Показать, что точка $z_0=\infty$ является существенно особой для функции*

$$f(z)=\cos z.$$

Решение. Используем разложение косинуса в ряд Маклорена и сделаем замену $z = 1/\eta$:

$$\cos\frac{1}{\eta} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\,\eta^{-2n} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\,\eta^{-2n}.$$

Поскольку главная часть ряда Лорана содержит бесконечное число членов, то точка $\eta_0 = 0$ – существенно особая, следовательно, такой же будет и точка $z_0 = \infty$ для функции $\cos z$.

Пример 7. *Определить характер особой точки* $z_0 = \infty$ *функции*

$$f(z) = e^{1/z} + 2z^2 - 5.$$

Решение. Поступим аналогично тому, как поступили в предыдущем примере:

$$\left(e^{1/z} + 2z^2 - 5\right)\Big|_{z=1/\eta} = e^{\eta} + \frac{2}{\eta^2} - 5 = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\eta^n}{n!} + \frac{2}{\eta^2} - 5 = \frac{2}{\eta^2} - 4 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\eta^n}{n!}.$$

Главная часть ряда Лорана состоит из одного слагаемого $2/\eta^2$, поэтому $z_0 = \infty$ – полюс второго порядка.

Литература

[1] Бугров Я.С., Никольский С.М. *Высшая математика. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного* . – М.: Наука, 1985, – с. 403-412, 415-417.

[2] Письменный Д.Т. *Конспект лекций по высшей математике.* – М.: Рольф, 2000. Ч. 2. – с. 214–223.