Применение операционного метода II

Волченко Ю.М.

Содержание лекции

Решение уравнений математической физики методами операционного исчисления. Решение уравнения теплопроводности. Решение телеграфного уравнения.

Анимация нагрева стержня и процессов в длинной линии.
Анимация работает только в программе Acrobat Reader!

23 августа 2011 г.

На прошлой лекции нами было рассмотрено использование методов операционного исчисления для решения линейных дифференциальных уравнений и их систем. Теперь мы обратимся к уравнениям в частных производных и посмотрим, как применяется операционный метод для их решения. Следует заметить, что ничего существенно нового в этом плане мы не обнаружим, разве только то, что изображения будут зависеть не от одного аргумента, а от нескольких, которые будут также и аргументами соответствующих функций-оригиналов. Другое дело, что уравнения будут описывать более сложные и интересные процессы, а решения будут, соответственно, получаться и выглядеть не так просто, как раньше, но зато будут нести в себе гораздо больше познавательной информации.

1 Решение уравнения теплопроводности

На лекции по уравнениям математической физики было получено следующее уравнение распространения тепла в стержне:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \; x \geq 0, \; t \geq 0, \tag{1}$$

где $u(x,t)$ — температура стержня в точке, находящейся на расстоянии x от его левого конца, в момент времени t; $a > 0$ — коэффициент температуропроводности, зависящий от материала, из которого изготовлен стержень. Мы будем предполагать, что наш стержень — полубесконечный и занимает на оси Ox положение отрезка $[0; \infty]$.

Решим уравнение теплопроводности (1) в предположении, что в нулевой момент времени стержень холодный:

$$u\left(x, 0\right) = 0, \tag{2}$$

а затем на его левом конце поддерживается температура $q\left(t\right)$:

$$u\left(0, t\right) = q\left(t\right). \tag{3}$$

Для решения применим операционный метод.

Введем изображения неизвестной функции $U\left(x, p\right) \rightarrowtail u\left(x, t\right)$ и заданной функции $Q\left(p\right) \rightarrowtail q\left(t\right)$. Из теоремы о дифференцировании оригинала, учитывая начальное условие (2), получаем, что $\partial u\left(x, t\right)/\partial t \leftarrowtail pU\left(x, p\right)$. Применим теперь преобразование Лапласа к уравнению теплопроводности. При этом преобразование Лапласа второй производной можно представить так (строгое обоснование опускаем):

$$\mathbb{L}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right] = \int\limits_0^\infty \frac{\partial^2 u\left(x, t\right)}{\partial x^2} e^{-pt}\, dt = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\int\limits_0^\infty u\left(x, t\right) e^{-pt}\, dt = \frac{\partial^2 U\left(x, p\right)}{\partial x^2}.$$

Поэтому операторное уравнение получится таким:

$$pU\left(x, p\right) = a^2 \frac{\partial^2 U\left(x, p\right)}{\partial x^2}.$$

Это — обыкновенное линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами (относительно изображения $U\left(x, p\right)$). Корни соответствующего характеристического уравнения,

$$a^2 k^2 - p = 0,$$

действительны и различны: $k_{1,2} = \pm\sqrt{p}/a$, значит, решение операторного уравнения имеет вид

$$U\left(x, p\right) = C_1 e^{\frac{x}{a}\sqrt{p}} + C_2 e^{-\frac{x}{a}\sqrt{p}},$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

Температура $u\left(x, t\right)$ для каждого x должна быть функцией ограниченной, а тогда и ее изображение, как это следует из формулы преобразования Лапласа, тоже должно быть ограниченным по той же переменной. Это приводит к тому, что константа C_1 должна считаться нулем: $C_1 = 0$. Таким образом, формула решения операторного уравнения упрощается:

$$U\left(x, p\right) = C_2 e^{-\frac{x}{a}\sqrt{p}}.$$

К граничному условию (3) тоже применим преобразование Лапласа и получим еще одно операторное уравнение

$$U(0,p) = Q(p).$$

Две последние формулы показывают, что $U(0,p) = Q(p) = C_2$. Мы нашли окончательное решение операторного уравнения:

$$U(x,p) = Q(p)\, e^{-\frac{x}{a}\sqrt{p}} = p\, Q(p) \cdot \frac{1}{p}\, e^{-\frac{x}{a}\sqrt{p}}.$$

В [1] показано, что $\frac{1}{p}\, e^{-\frac{x}{a}\sqrt{p}} \rightarrowtail 1 - \Phi\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)$, где $\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^z e^{-u^2} du$. Используем это, применяя к формуле решения операторного уравнения интеграл Дюамеля:

$$u(x,t) = q(t)\left[1 - \Phi\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)\Bigg|_{t=0}\right] + \int\limits_0^t \frac{d}{d\tau}\left[1 - \Phi\left(\frac{x}{2a\sqrt{\tau}}\right)\right] q(t-\tau)\, d\tau =$$

$$= q(t)\Big[1 - \underbrace{\Phi(\infty)}_{1}\Big] + \int\limits_0^t \frac{2}{\sqrt{\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{4a^2\tau}}\, \frac{x}{4a\tau^{3/2}}\, q(t-\tau)\, d\tau,$$

или

$$\boxed{u(x,t) = \frac{x}{2a\sqrt{\pi}} \int\limits_0^t \frac{q(t-\tau)}{\tau^{3/2}}\, e^{-\frac{x^2}{4a^2\tau}}\, d\tau.}$$

На рис. 1 представлена анимация процесса нагрева стержня, изображенного в виде прямоугольника желтого цвета. Этот цвет означает, что вначале стержень не нагрет. Анимация демонстрирует, как с течением времени t изменяется график температуры $u(x,t)$, а тепло (красный цвет) распространяется вправо от левого (нагреваемого) конца стержня. Следует обратить внимание на то, что процесс нагрева, довольно быстрый в начале, постепенно замедляется.

2 Решение телеграфного уравнения

2.1 Постановка задачи

Рассмотрим двухпроводную линию как систему равномерно распределенных индуктивностей, сопротивлений, емкостей и утечек тока.

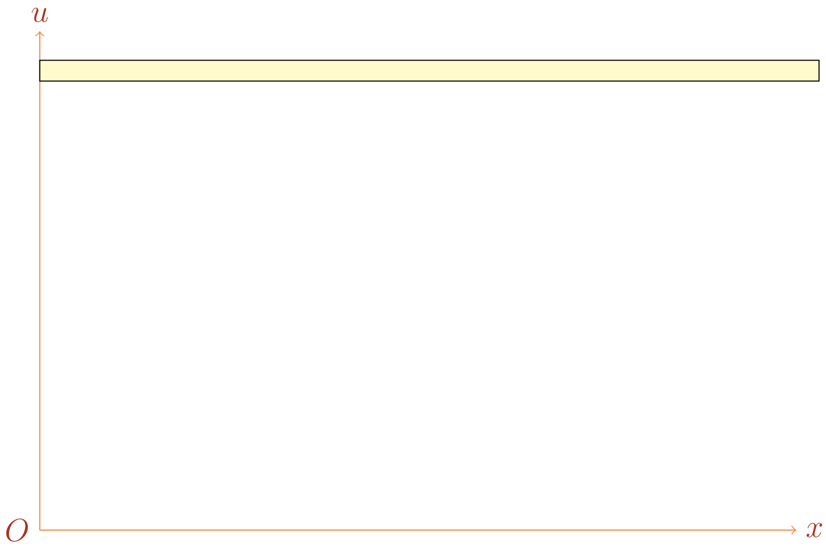

Рис. 1. Нагрев стержня.

Обозначим L — коэффициент индуктивности, C — емкость, R — сопротивление, G — коэффициент утечки (электропроводность изоляции), отнесенные к единице длины. Пусть $u\left(x,t\right)$ — напряжение, а $i\left(x,t\right)$ — ток в точке линии x в момент времени t, соответственно.

Падение напряжения $u\left(x,t\right)-u\left(x+\Delta x,t\right)$ на участке линии между точками x и $x+\Delta x$ согласно второму закону Кирхгофа является суммой падений напряжений на индуктивности $L\frac{\partial i}{\partial t}\Delta x$ и на сопротивлении $Ri\Delta x$, то есть справедливо равенство

$$u\left(x,t\right)-u\left(x+\Delta x,t\right)=L\frac{\partial i}{\partial t}\Delta x+Ri\Delta x.$$

Из первого закона Кирхгофа (алгебраическая сумма токов, сходящихся в узле, равна нулю) получаем еще одно равенство:

$$i\left(x,t\right)-i\left(x+\Delta x,t\right)=C\frac{\partial u}{\partial t}\Delta x+Gu\Delta x,$$

где $C\frac{\partial u}{\partial t}\Delta x$ — ток через конденсатор, а $Gu\Delta x$ — ток утечки. Разделив оба последних равенства на Δx и устремив Δx к нулю, придем к системе уравнений

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x}&=-L\frac{\partial i}{\partial t}-Ri, \qquad (4)\\ \frac{\partial i}{\partial x}&=-C\frac{\partial u}{\partial t}-Gu, \qquad (5)\end{aligned}}$$

которые называют ***уравнениями длинной линии***.

Продифференцируем уравнение (4) по x, а уравнение (5) — по t :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -L\frac{\partial^2 i}{\partial t\,\partial x} - R\frac{\partial i}{\partial x},$$
$$\frac{\partial^2 i}{\partial x\,\partial t} = -C\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - G\frac{\partial u}{\partial t}.$$

Подставим в первое уравнение вместо второй смешанной производной ее выражение из второго уравнения:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = LC\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - R\frac{\partial i}{\partial x} + LG\frac{\partial u}{\partial t}.$$

Вместо производной $\frac{\partial i}{\partial x}$ подставим ее выражение (5):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = LC\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + RC\frac{\partial u}{\partial t} + RGu + LG\frac{\partial u}{\partial t},$$

или

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = LC\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + (RC + LG)\,\frac{\partial u}{\partial t} + RGu.} \tag{6}$$

Аналогично можно получить уравнение для тока:

$$\boxed{\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = LC\frac{\partial^2 i}{\partial t^2} + (RC + LG)\,\frac{\partial i}{\partial t} + RGi.} \tag{7}$$

Уравнения (6) и (7) называются ***телеграфными***.

Поставим следующую задачу: операционным методом решить уравнения (6) и (7) при нулевых начальных условиях:

$$u\,(x,0) = 0,\ i\,(x,0) = 0, \tag{8}$$

и граничном условии

$$u\,(0,t) = q\,(t)\,, \tag{9}$$

которое означает, что к левому концу длинной линии прилагается входное напряжение $q\,(t)$.

2.2 Решение операторных уравнений

Введем изображения неизвестных функций: $U\,(x,p) \rightarrowtail u\,(x,t)$, $I\,(x,p) \rightarrowtail$ $\rightarrowtail i\,(x,t)$. Мы не станем применять преобразование Лапласа непосредственно к уравнениям (6) и (7), так как в этом случае нам понадобятся дополнительные начальные условия. Применим его к уравнениям (4) и (5), учитывая, конечно, начальные условия (8). Получится система операторных уравнений вида

$$\frac{\partial U(x,p)}{\partial x} = -(Lp+R)\, I(x,p), \qquad (10)$$
$$\frac{\partial I(x,p)}{\partial x} = -(Cp+G)\, U(x,p).$$

Продифференцируем первое из этих уравнений по x и подставим в полученную формулу вместо производной $\partial I(x,p)/\partial x$ ее выражение из второго уравнения:

$$\frac{\partial^2 U(x,p)}{\partial x^2} = -(Lp+R)\frac{\partial I(x,p)}{\partial x} = (Lp+R)(Cp+G)\, U(x,p).$$

Этот результат можно представить компактнее:

$$\frac{\partial^2 U(x,p)}{\partial x^2} - \lambda^2 U(x,p) = 0,$$

если обозначить $\lambda^2 = (Lp+R)(Cp+G)$, причем, будем считать, что

$$\operatorname{Re}\lambda \geq 0,\ -\frac{\pi}{2} \leq \arg\lambda \leq \frac{\pi}{2}.$$

Соответствующее полученному обыкновенному линейному однородному дифференциальному уравнению второго порядка характеристическое уравнение

$$k^2 - \lambda^2 = 0$$

имеет два различных действительных корня $k_{1,2} = \pm\lambda$. Поэтому решение операторного уравнения относительно $U(x,p)$ получается таким:

$$U(x,p) = A(p)\, e^{\lambda x} + B(p)\, e^{-\lambda x}.$$

Как и в случае уравнения теплопроводности, из ограниченности функции $u(x,t)$ при $x \to \infty$ следует ограниченность по той же переменной изображения $U(x,p)$, в результате чего мы должны считать, что $A(p) \equiv 0$. Решение операторного уравнения упростится:

$$U(x,p) = B(p)\, e^{-\lambda x}.$$

Обозначим $Q(p) \rightarrowtail q(t)$ и запишем операторный вариант граничного условия (9): $U(0,p) = Q(p)$. Теперь легко найдется и коэффициент $B(p)$:

$$U(0,p) = B(p)\, e^{-\lambda\cdot 0} = Q(p),$$
$$B(p) = Q(p).$$

В результате получаем окончательный вид решения операторного уравнения для напряжения:

$$U(x,p) = Q(p)\, e^{-\lambda x}.$$

Чтобы получить решение для тока, продифференцируем последнее равенство по x:

$$\frac{\partial U(x,p)}{\partial x} = -\lambda Q(p)\, e^{-\lambda x},$$

и подставим полученное выражение вместо производной в уравнение (10):

$$-\lambda Q(p)\, e^{-\lambda x} = -(Lp+R)\, I(x,p).$$

Найдем $I(x,p)$:

$$I(x,p) = Q(p)\frac{\lambda}{Lp+R} e^{-\lambda x},$$

или

$$I(x,p) = Q(p)\sqrt{\frac{Cp+G}{Lp+R}}\, e^{-\lambda x}.$$

Решение телеграфного уравнения рассмотрим для двух частных случаев.

2.3 Линия без потерь

Пусть $R = G = 0$, тогда $\lambda = p\sqrt{LC}$ и решения операторных уравнений принимают вид

$$U(x,p) = Q(p)\, e^{-p\sqrt{LC}x},$$
$$I(x,p) = Q(p)\sqrt{\frac{C}{L}}\, e^{-p\sqrt{LC}x}.$$

По теореме запаздывания получаем, что оригиналы этих функций, т.е. решения телеграфных уравнений, имеют вид

$$\boxed{\begin{aligned} u(x,t) &= q\left(t-\sqrt{LC}x\right) H\left(t-\sqrt{LC}x\right), \\ i(x,t) &= \sqrt{\frac{C}{L}}\, q\left(t-\sqrt{LC}x\right) H\left(t-\sqrt{LC}x\right). \end{aligned}}$$

Как видим, функции равны 0 при $t < \sqrt{LC}x$. Следовательно, в момент времени $t = \sqrt{LC}x$ сигнал приходит в точку x, а затем перемещается дальше вдоль линии и без всяких искажений достигает любой самой удаленной ее точки.

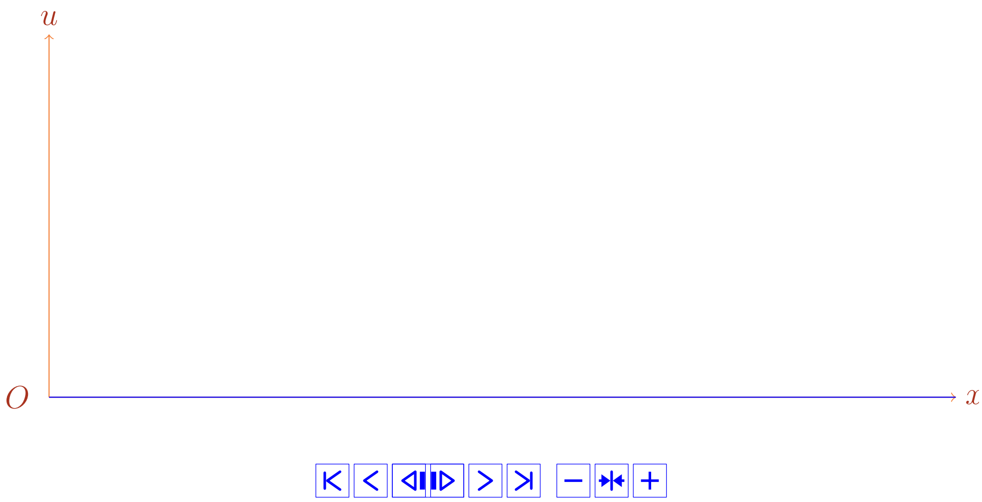

Рис. 2. Напряжение в длинной линии без потерь.

На анимационном рис. 2 показано распространение сигнала, т.е. напряжения $u(x,t)$, в длинной линии без потерь. Формой сигнала выбрана одна арка синусоиды.

2.4 Линия без искажений

Пусть
$$\nu = \frac{R}{L} = \frac{G}{C},$$
тогда $\lambda = \sqrt{L\,(p+\nu)\,C\,(p+\nu)} = (p+\nu)\sqrt{LC}$ и решения операторных уравнений принимают вид
$$U\,(x,p) = Q\,(p)\,e^{-(p+\nu)\sqrt{LC}x},$$
$$I\,(x,p) = Q\,(p)\,\sqrt{\frac{C}{L}}\,e^{-(p+\nu)\sqrt{LC}x}.$$

Применяя теорему запаздывания, получаем соответствующие оригиналы, являющиеся решениями рассматриваемых телеграфных уравнений:
$$\boxed{\begin{aligned} u\,(x,t) &= q\left(t-\sqrt{LC}x\right)H\left(t-\sqrt{LC}x\right)e^{-\nu\sqrt{LC}x}, \\ i\,(x,t) &= \sqrt{\frac{C}{L}}\,q\left(t-\sqrt{LC}x\right)H\left(t-\sqrt{LC}x\right)e^{-\nu\sqrt{LC}x}. \end{aligned}}$$

В данном случае, как видно из полученных формул и из анимационного рис. 3, сигнал затухает вдоль линии.

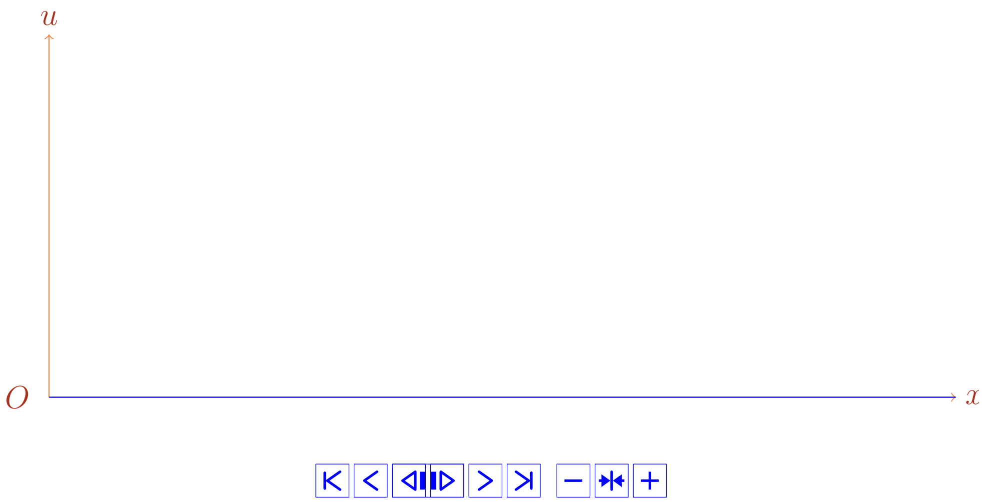

Рис. 3. Напряжение в длинной линии без искажений.

Литература

[1] Мартыненко В.С. *Операционное исчисление*. — Киев: Выща школа, 1990, — с. 177-180, 254-263.

[2] Ефимов А.В. *Математический анализ (специальные разделы)*, ч. II. — М: Высшая школа, 1980, — с. 253-265.