Преобразование Лапласа

Волченко Ю.М.

Содержание лекции

Преобразование Лапласа. Оригинал и изображение. Свойства изображений. Примеры изображения некоторых функций. Теоремы о дифференцировании и интегрировании оригиналов и изображений. Теоремы о запаздывании и опережении оригиналов.

Особенности использования системы *Mathematica* для получения изображений различного вида оригиналов.

29 июля 2011 г.

Идея операционного метода состоит в том, чтобы упростить решение дифференциальных, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений. Для этого к ним применяется специальное преобразование, которое превращает уравнение одного из упомянутых типов в более простое и привычное алгебраическое уравнение. Последнее решается методами обычной алгебры. После этого решение алгебраического уравнения обратным преобразованием превращается в решение заданного уравнения.

1 Оригинал и изображение

Мы будем работать с функциями, которыми на практике являются сигналы, проходящие по электро- и радиотехническим цепям, системам автоматического регулирования и управления. Поэтому наши функции будут иметь аргументом переменную t, которую вы можете трактовать как время. Кроме того, мы будем считать, что сигналы приходят к нам не из бесконечно далекого прошлого, а начинаются в какой-то вполне определенный момент времени. Проще всего в качестве начала отсчета времени выбрать $t = 0$ (время появления первого сигнала), а, если какой-то сигнал придет позже, мы сможем это учесть с помощью так называемого «запаздывания», о котором речь пойдет дальше. Ну, и, наконец, сигналы не должны быть слишком экстравагантными с точки зрения математики: они не должны, например, иметь точек разрыва II рода, а точки разрыва I рода не должны сгущаться; сигналы не должны слишком быстро возрастать, т.е. быстрее, чем некоторая экспонента $Me^{\alpha t}$, $M > 0$, $\alpha > 0$, $t > 0$. Сигналы, удовлетворяющие всем этим требованиям (а другие практически и не встречаются), мы будем в дальнейшем называть оригиналами.

Точные определения таковы. Функция $f(t)$ называется ***оригиналом***, если

1) $f(t) \equiv 0$ при $t < 0$;

2) на каждом конечном отрезке $f(t)$ имеет не более конечного числа точек разрыва I рода;

3) при $t \to \infty$ функция $f(t)$ имеет ограниченную степень роста, то есть

$$\exists\,(\alpha, M)\ \ |f(t)| \leq Me^{\alpha t},\ t > 0.$$

Пусть последнее условие выполняется при всех $\alpha > \alpha_0$, а при $\alpha < \alpha_0$ не выполняется; тогда величина α_0 называется ***показателем роста*** $f(t)$.

Изображением $F(p)$ оригинала $f(t)$ называется его ***преобразование Лапласа***

$$\boxed{\mathbb{L}\left[f(t)\right] = F(p) = \int\limits_0^\infty f(t)\, e^{-pt}\, dt,}$$

где $p = \alpha + j\beta$ – комплексная переменная. Таким образом, изображение $F(p)$ является комплексной функцией.

Тот факт, что оригиналу $f(t)$ соответствует его изображение $F(p)$, будем обозначать

$$\boxed{f(t) \leftarrow\!\!\prec F(p)\ \text{ или }\ F(p) \succ\!\!\rightarrow f(t).}$$

Теорема 1. *Изображение функции $F(p)$ для функции $f(t)$ является аналитической функцией переменной p в области $\operatorname{Re} p > \alpha_0$.*

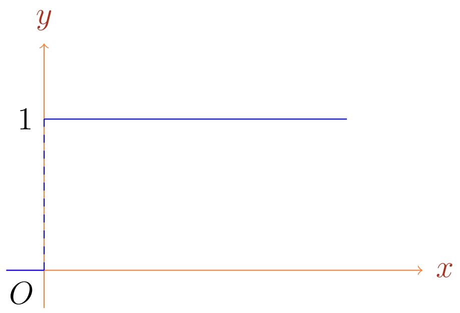
В дальнейшем мы не будем отмечать показатели роста рассматриваемых оригиналов и области существования изображений, сосредоточившись на изучении общих схем доказательств и получении формул, необходимых для практического применения. Более глубокие теоретические представления можно приобрести, изучив рекомендованную литературу.

Возникает вопрос, могут ли разные оригиналы иметь одно и то же изображение. Ответ на этот вопрос дает

Теорема 2 (единственности). *Если два непрерывных оригинала $f(t)$ и $g(t)$ имеют одно и то же изображение $F(p)$, то они тождественно равны.*

2 Изображение некоторых функций

Важную роль в операционном исчислении играет единичная ступенчатая функция Хевисайда:



$$H(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1, & t \geq 0, \end{cases}$$

С ее помощью многие функции, не являющиеся оригиналами, становятся ими после умножения на $H(t)$. Например, функция t^2 не обращается в 0 при $t < 0$ и поэтому не может быть оригиналом, но умноженная на функцию $H(t)$ превращается в оригинал $f(t) = t^2 H(t)$. В дальнейшем всегда обычные функции вроде $\sin t$, $\cos t$, e^t, многочлены и даже константы будем считать умноженными на $H(t)$, почти никогда не записывая этого явно. Сама единичная функция будет иметь два представления: 1 и $H(t)$. Без второго представления невозможно записать «запаздывающий» единичный ступенчатый сигнал, т.е. сигнал, который начинает подаваться не в нулевой момент времени, а несколько позже. Например, сигнал $H(t-1)$ возникает в момент времени $t = 1$.

Пример 1. *Найти изображение единичной ступенчатой функции Хевисайда.*

Решение. Применим к этой функции преобразование Лапласа:

$$\mathbb{L}\left[H(t)\right] = \int\limits_0^\infty H(t)\, e^{-pt}\, dt = \int\limits_0^\infty 1 \cdot e^{-pt}\, dt = -\frac{1}{p}\, e^{-pt}\Big|_0^\infty = \frac{1}{p}.$$

Таким образом,

$$\boxed{H(t) \leftarrow \frac{1}{p}.}$$

Пример 2. *Найти изображения тригонометрических функций* $\sin t$ *и* $\cos t$.

Решение. Обозначим $\mathbb{L}[\sin t] = F_s(p)$, $\mathbb{L}[\cos t] = F_c(p)$. Тогда, с одной стороны,

$$F_s(p) = \int_0^\infty \sin t e^{-pt}\,dt = \left\langle u = \sin t,\ dv = e^{-pt}\,dt,\ du = \cos t\,dt,\ v = -\frac{1}{p}\,e^{-pt} \right\rangle =$$

$$= -\frac{1}{p}\,\sin t\,e^{-pt}\Big|_0^\infty + \frac{1}{p}\int_0^\infty e^{-pt}\cos t\,dt = \frac{1}{p}F_c\,(p)\,.$$

С другой стороны,

$$F_c(p) = \int_0^\infty \cos t\,e^{-pt}\,dt = \left\langle u = \cos t,\ dv = e^{-pt}\,dt,\ du = -\sin t\,dt,\ v = -\frac{1}{p}\,e^{-pt} \right\rangle =$$

$$= -\frac{1}{p}\,\cos t\,e^{-pt}\Big|_0^\infty - \frac{1}{p}\int_0^\infty e^{-pt}\sin t\,dt = \frac{1}{p} - \frac{1}{p}\,F_s(p)\,.$$

Таким образом, получилась система уравнений

$$\begin{cases} F_s(p) = \dfrac{1}{p}\,F_c(p)\,, \\ F_c(p) = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{p}\,F_s(p)\,. \end{cases}$$

Решаем ее:

$$F_c(p) = \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2}F_c(p)\,, \qquad \left(1 + \frac{1}{p^2}\right)F_c(p) = \frac{1}{p}, \qquad F_c(p) = \frac{p}{p^2+1},$$

$$F_s(p) = \frac{1}{p}\cdot\frac{p}{p^2+1} = \frac{1}{p^2+1}.$$

Следовательно,

$$\boxed{\sin t \longleftarrow \frac{1}{p^2+1},\ \cos t \longleftarrow \frac{p}{p^2+1}.}$$

3 Свойства изображений

Теорема 3 (подобия). *Если* $f(t) \longleftarrow F(p)$, *то* $f(at) \longleftarrow \frac{1}{a}F\left(\frac{p}{a}\right)$.

Доказательство. Найдем изображение функции $f(at)$:

$$\mathbb{L}[f(at)] = \int_0^\infty f(at)\,e^{-pt}\,dt = \langle z = at,\ dz = a\,dt\rangle =$$

$$= \frac{1}{a}\int_0^\infty f(z)\,e^{-\frac{p}{a}z}\,dz = \frac{1}{a}\,F\left(\frac{p}{a}\right).$$

Пример 3. *Доказать, что*

$$\boxed{\sin at \leftarrow\!\!\prec \frac{a}{p^2+a^2}.}$$

Решение. Так как $\sin t \leftarrow\!\!\prec 1/\left(p^2+1\right)$, то по теореме подобия имеем

$$\sin at \leftarrow\!\!\prec \frac{1}{a}\cdot\frac{1}{\left(\frac{p}{a}\right)^2+1} = \frac{1}{a}\cdot\frac{a^2}{p^2+a^2} = \frac{a}{p^2+a^2}.$$

Пример 4. *Доказать, что*

$$\boxed{\cos at \leftarrow\!\!\prec \frac{p}{p^2+a^2}.}$$

Решение. Так как $\cos t \leftarrow\!\!\prec p/\left(p^2+1\right)$, то по теореме подобия имеем

$$\cos at \leftarrow\!\!\prec \frac{1}{a}\cdot\frac{\frac{p}{a}}{\left(\frac{p}{a}\right)^2+1} = \frac{1}{a}\cdot\frac{\frac{p}{a}a^2}{p^2+a^2} = \frac{p}{p^2+a^2}.$$

Теорема 4 (линейности). *Если $f_i\left(t\right) \leftarrow\!\!\prec F_i\left(p\right)$, $i=\overline{1,m}$, то*

$$\sum_{i=1}^{m} C_i f_i\left(t\right) \leftarrow\!\!\prec \sum_{i=1}^{m} C_i F_i\left(p\right), \tag{1}$$

где C_i, $i=\overline{1,m}$, – константы.

Доказательство. Вывод теоремы сразу следует из свойства линейности преобразования Лапласа.

Следствие 1. *Если $f\left(t\right) \leftarrow\!\!\prec CF\left(p\right)$, $C \neq 0$, то $f\left(t\right)/C \leftarrow\!\!\prec F\left(p\right)$.*

Доказательство. При $m=1$ из (1) получаем $f\left(t\right) \leftarrow\!\!\prec F\left(p\right) \Longleftrightarrow Cf\left(t\right) \leftarrow\!\!\prec$ $\leftarrow\!\!\prec CF\left(p\right)$. Это означает, что обе части соотношения $f\left(t\right) \leftarrow\!\!\prec F\left(p\right)$ можно умножать на одно и то же, не равное нулю, число. Умножая соотношение $f\left(t\right) \leftarrow\!\!\prec CF\left(p\right)$ на $1/C$, получаем требуемое.

Пример 5. *Найти оригинал изображения*

$$F\left(p\right) = \frac{2}{p} + \frac{2}{p^2+16}.$$

Решение. Преобразуем заданное изображение:

$$F(p) = \frac{2}{p} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{p^2 + 16}.$$

В силу теорем подобия и линейности и найденных соответствий «оригинал-изображение» такому изображению отвечает оригинал

$$f(t) = 2H(t) + \frac{1}{2}\sin 4t.$$

Теорема 5 (смещения)**.** *Если* $f(t) \longleftarrow F(p)$*, то* $e^{-\alpha t} f(t) \longleftarrow F(p+\alpha)$*.*

Доказательство. Выполним преобразование Лапласа:

$$\mathbb{L}\left[e^{-\alpha t} f(t)\right] = \int\limits_0^\infty e^{-\alpha t} f(t)\, e^{-pt}\, dt = \int\limits_0^\infty f(t)\, e^{-(p+\alpha)t}\, dt = F(p+\alpha)\,.$$

Пример 6. *Доказать, что для экспоненты справедливо соответствие*

$$\boxed{e^{-at} \longleftarrow \frac{1}{p+a}.}$$

Решение. Сразу следует из предыдущей теоремы при $f(t) = H(t)$ и того, что $H(t) \longleftarrow \frac{1}{p}$.

Пример 7. *Найти изображения гиперболических функций* $\operatorname{sh} at$ *и* $\operatorname{ch} at$*.*

Решение. По теореме линейности

$$\operatorname{sh} at = \frac{1}{2}\left(e^{at} - e^{-at}\right) \longleftarrow \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-\alpha} - \frac{1}{p+\alpha}\right) = \frac{a}{p^2 - a^2},$$
$$\operatorname{ch} at = \frac{1}{2}\left(e^{at} + e^{-at}\right) \longleftarrow \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-\alpha} + \frac{1}{p+\alpha}\right) = \frac{p}{p^2 - a^2}.$$

□

Итак, следует запомнить, что

$$\boxed{\operatorname{sh} at \longleftarrow \frac{a}{p^2 - a^2}, \quad \operatorname{ch} at \longleftarrow \frac{p}{p^2 - a^2}.}$$

Пример 8. *Найти изображение «затухающих колебаний»* $e^{-at}\sin bt$ *и* $e^{-at}\cos bt$*.*

Решение. Используем теорему смещения и соответствия $\sin at \longleftarrow\!\!\prec \frac{a}{p^2+a^2}$ и $\cos at \longleftarrow\!\!\prec$ $\longleftarrow\!\!\prec \frac{p}{p^2+a^2}$:

$$\boxed{e^{-at}\sin bt \longleftarrow\!\!\prec \frac{b}{(p+a)^2+b^2}, \quad e^{-at}\cos bt \longleftarrow\!\!\prec \frac{p+a}{(p+a)^2+b^2}.}$$

Теорема 6 (о дифференцировании изображения)**.** *Если* $f(t) \longleftarrow\!\!\prec F(p)$*, то*

$$(-1)^n F^{(n)}(p) \succ\!\!\longrightarrow t^n f(t).$$

Доказательство. Продифференцируем n раз изображение $F(p)$:

$$F^{(n)}(p) = \frac{d^n}{dp^n}\int\limits_0^\infty f(t)\,e^{-pt}\,dt = (-1)^n\int\limits_0^\infty t^n f(t)\,e^{-pt}\,dt = (-1)^n\mathbb{L}\left[t^n f(t)\right].$$

Доказательство существования последнего интеграла опустим.

Следствие 2. *При* $f(t) = H(t)$ *из теоремы следуют формулы*

$$\boxed{t^n \longleftarrow\!\!\prec \frac{n!}{p^{n+1}}, \quad \frac{1}{p^n} \succ\!\!\longrightarrow \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}.}$$

Доказательство. Возьмем $f(t) = H(t)$. Как уже было доказано, $H(t) \longleftarrow\!\!\prec \frac{1}{p}$. Тогда при $n = 1$ из теоремы о дифференцировании изображения следует, что

$$t \longleftarrow\!\!\prec (-1)\left(\frac{1}{p}\right)' = \frac{1}{p^2}.$$

Далее возьмем $f(t) = t$, полученное соотношение и снова используем теорему о дифференцировании изображения при $n = 1$:

$$t^2 \longleftarrow\!\!\prec (-1)\left(\frac{1}{p^2}\right)' = \frac{2}{p^3}.$$

Таким образом, мы убедились в справедливости первой из доказываемых формул при $n = 1$ и $n = 2$. Методом математической индукции доказывается справедливость этой формулы в общем случае. Вторая формула получается из первой в результате применения следствия из теоремы линейности.

Пример 9. *Доказать справедливость соотношений*

$$te^{-at} \longleftarrow \frac{1}{(p+a)^2}, \quad t\sin at \longleftarrow \frac{2ap}{(p^2+a^2)^2}, \quad t\cos at \longleftarrow \frac{p^2-a^2}{(p^2+a^2)^2}.$$

Решение. Так как справедливы соотношения $e^{-at} \longleftarrow \frac{1}{p+a}$, $\sin at \longleftarrow \frac{a}{p^2+a^2}$ и $\cos at \longleftarrow$ $\longleftarrow \frac{p}{p^2+a^2}$, то по теореме о дифференцировании изображения при $n = 1$ получаем

$$\begin{aligned} te^{-at} &\longleftarrow (-1)\left(\frac{1}{p+a}\right)' = \frac{1}{(p+a)^2}, \\ t\sin at &\longleftarrow (-1)\left(\frac{a}{p^2+a^2}\right)' = \frac{2ap}{(p^2+a^2)^2}, \\ t\cos at &\longleftarrow (-1)\left(\frac{p}{p^2+a^2}\right)' = (-1)\,\frac{p^2+a^2-2p^2}{(p^2+a^2)^2} = \frac{p^2-a^2}{(p^2+a^2)^2}. \end{aligned}$$

$\square$

Отметим, что все найденные на лекции изображения оказались дробно-рациональными функциями. Это позволяет выполнять манипуляции в области изображений, используя лишь школьную алгебру.

Следующая теорема является очень важной, потому что дает возможность превращать производные в области оригиналов в алгебраические выражения в области изображений. Поэтому дифференциальные уравнения в области изображений в большинстве случаев можно будет представить алгебраическими уравнениями.

Теорема 7 (о дифференцировании оригинала). *Если $f(t) \longleftarrow F(p)$, то*

$$f'(t) \longleftarrow pF(p) - f(0).$$

Доказательство. Найдем изображение производной:

$$\begin{aligned} \mathbb{L}\left[f'(t)\right] &= \int\limits_0^\infty f'(t)\, e^{-pt}\, dt = \\ &= \left\langle u = e^{-pt},\ dv = f'(t)\ dt,\ du = -pe^{-pt}\, dt,\ v = f(t)\right\rangle = \\ &= e^{-pt} f(t)\Big|_0^\infty + p\int\limits_0^\infty f(t)\, e^{-pt}\, dt = -f(0) + pF(p), \end{aligned}$$

так как $\lim_{t\to\infty} e^{-pt} f(t) = 0$, в силу $|f(t)| < Me^{-\alpha_0 t}$.

Следствие 3. *Для изображения n-й производной оригинала справедливо соответствие*

$$\boxed{f^{(n)}(t) \risingdotseq p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0)\,.} \qquad (2)$$

Доказательство. Для $n = 1$ формула справедлива в силу доказанной только что теоремы. Возьмем функцию $g(t) = f'(t)$ и применим к ней теорему о дифференцировании оригинала, учитывая, что $g(t) \risingdotseq G(p) = pF(p) - f(0)$. Получим $g'(t) \risingdotseq pG(p) - g(0) = p(pF(p) - f(0)) - g(0) = p^2 F(p) - pf(0) - f'(0)$. Следовательно,

$$f''(t) \risingdotseq p^2 F(p) - pf(0) - f'(0)\,.$$

Это соотношение совпадает с доказываемым при $n = 2$. Пусть теперь формула (2) справедлива при некотором $n = k$, то есть выполняется

$$f^{(k)}(t) \risingdotseq p^k F(p) - p^{k-1} f(0) - p^{k-2} f'(0) - \ldots - f^{(k-1)}(0)\,,$$

методом математической индукции докажем ее справедливость при $n = k + 1$. Рассмотрим функцию $h(t) = f^{(k)}(t)$ и применим к ней теорему о дифференцировании оригинала, учитывая, что

$$h(t) \risingdotseq H(p) = p^k F(p) - p^{k-1} f(0) - p^{k-2} f'(0) - \ldots - f^{(k-1)}(0)$$

по предположению индукции. Тогда

$$\begin{aligned} h'(t) &\risingdotseq pH(p) - h(0) = \\ &= p\left(p^k F(p) - p^{k-1} f(0) - p^{k-2} f'(0) - \ldots - f^{(k-1)}(0)\right) - h(0) = \\ &= p^{k+1} F(p) - p^k f(0) - \ldots - pf^{(k-1)}(0) - f^{(k)}(0)\,. \end{aligned}$$

Значит,

$$f^{(k+1)}(t) \risingdotseq p^{k+1} F(p) - p^k f(0) - \ldots - pf^{(k-1)}(0) - f^{(k)}(0)\,.$$

Это совпадает с соотношением (2) при $n = k + 1$. Таким образом, методом математической индукции следствие доказано.

Следствие 4. *При $f(0) = f'(0) = \ldots = f^{(n-1)}(0) = 0$, формула* (2) *упрощается:*

$$f^{(n)}(t) \risingdotseq p^n F(p)\,.$$

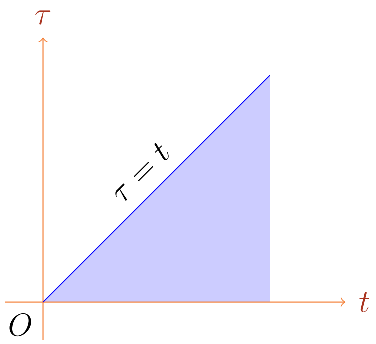
Теорема 8 (об интегрировании оригинала). *Если $f(t) \risingdotseq F(p)$, то*

$$\int_0^t f(\tau)\, d\tau \risingdotseq \frac{F(p)}{p}.$$

Доказательство. Выполним преобразование Лапласа

$$\mathbb{L}\left[\int\limits_0^t f(\tau)\,d\tau\right]=\int\limits_0^\infty e^{-pt}\int\limits_0^t f(\tau)\,d\tau\,dt=\int\limits_0^\infty\int\limits_0^t e^{-pt}f(\tau)\,d\tau\,dt.$$

Изменяя порядок интегрирования, получаем



$$\mathbb{L}\left[\int\limits_0^t f(\tau)\,d\tau\right]=\int\limits_0^\infty f(\tau)\int\limits_\tau^\infty e^{-pt}\,dt\,d\tau=$$

$$=\int\limits_0^\infty\left(-\frac{1}{p}e^{-pt}\right)\Big|_\tau^\infty f(\tau)\,d\tau=$$

$$=\frac{1}{p}\int\limits_0^\infty e^{-p\tau}f(\tau)\,d\tau=\frac{1}{p}F(p).$$

Теорема 9 (об интегрировании изображения). *Если* $f(t)\longleftarrow F(p)$, *то*

$$\frac{f(t)}{t}\longleftarrow\int\limits_p^\infty F(q)\,dq,$$

если последний интеграл сходится.

Доказательство. Найдем оригинал для интеграла, упомянутого в условии теоремы, используя тот факт, что $F(q)=\int_0^\infty f(t)\,e^{-qt}\,dt$:

$$\int\limits_p^\infty F(q)\,dq=\int\limits_p^\infty\int\limits_0^\infty f(t)\,e^{-qt}\,dt\,dq=\int\limits_0^\infty f(t)\int\limits_p^\infty e^{-qt}\,dq\,dt=$$

$$=\int\limits_0^\infty\left(-\frac{e^{-qt}}{t}\,dq\right)\Big|_{q=p}^\infty f(t)\,dt=\int\limits_0^\infty\frac{f(t)}{t}e^{-pt}\,dt=\mathbb{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right].$$

Справедливость изменения порядка интегрирования следует из теоремы Фубини, но мы на этом останавливаться не будем. Теорема доказана.

Пример 10. *Найти изображение интеграла*

$$\int\limits_0^t\sin 2\tau\,d\tau.$$

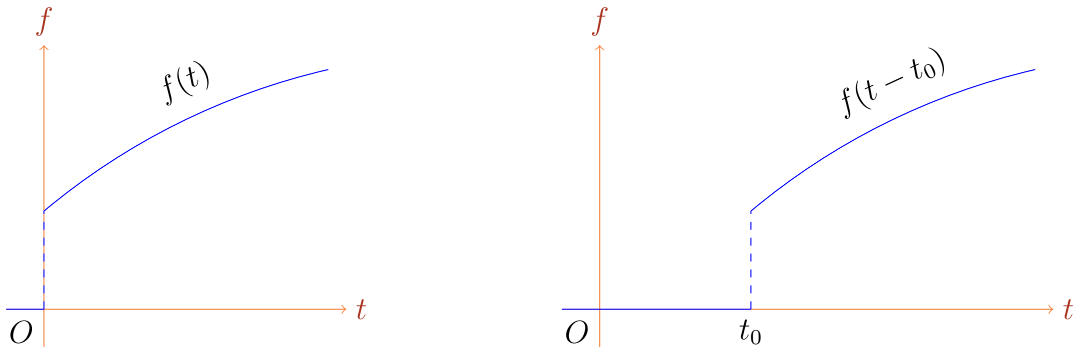


Рис. 1. «Запаздывание» оригинала.

Решение. Мы видели, что $\sin 2t \longleftarrow \frac{2}{p^2+4}$, поэтому на основании теоремы об интегрировании оригинала получаем, что

$$\int\limits_0^t \sin 2\tau\, d\tau \longleftarrow \frac{1}{p}\cdot\frac{2}{p^2+4} = \frac{2}{p\,(p^2+4)}.$$

Пример 11. *Найти изображение функции* $\dfrac{\sin t}{t}$.

Решение. Так как $\sin t \longleftarrow \frac{1}{p^2+1}$, то по теореме об интегрировании изображения имеем

$$\frac{\sin t}{t} \longleftarrow \int\limits_p^\infty \frac{dq}{q^2+1} = \operatorname{arctg} q\big|_p^\infty = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} p.$$

Теорема 10 (о запаздывании оригинала)**.** *Если* $f\,(t) \longleftarrow F\,(p)$ *и* $t_0 > 0$, *то*

$$f\,(t-t_0) \longleftarrow e^{-pt_0} F\,(p)\,,$$

см. рис. 1.

Доказательство. Найдем изображение функции $f\,(t-t_0)$:

$$\mathbb{L}\left[f\,(t-t_0)\right] = \int\limits_0^\infty f\,(t-t_0)\,e^{-pt}\,dt = \int\limits_0^{t_0} f\,(t-t_0)\,e^{-pt}\,dt + \int\limits_{t_0}^\infty f\,(t-t_0)\,e^{-pt}\,dt =$$

$$= \int\limits_{t_0}^\infty f\,(t-t_0)\,e^{-pt}\,dt = \langle u = t-t_0,\ dt = du\rangle =$$

$$= e^{-pt_0}\int\limits_0^\infty f\,(u)\,e^{-pu}\,du = e^{-pt_0}\mathbb{L}\left[f\,(t)\right].$$

Пример 12. *Найти изображение «запаздывающего» единичного ступенчатого оригинала.*

Решение. Так как $H\left(t\right) \longleftarrow \frac{1}{p}$, то в силу последней теоремы $H\left(t-h\right) \longleftarrow \frac{1}{p}\, e^{-ph}$.

Теорема 11 (об опережении оригинала). *Если* $f\left(t\right) \longleftarrow F\left(p\right)$ *и* $t_0 > 0$, *то*

$$f\left(t+t_0\right) \longleftarrow e^{pt_0}\left(F\left(p\right) - \int\limits_0^{t_0} e^{-pt} f(t)\, dt\right),$$

см. рис. 2.

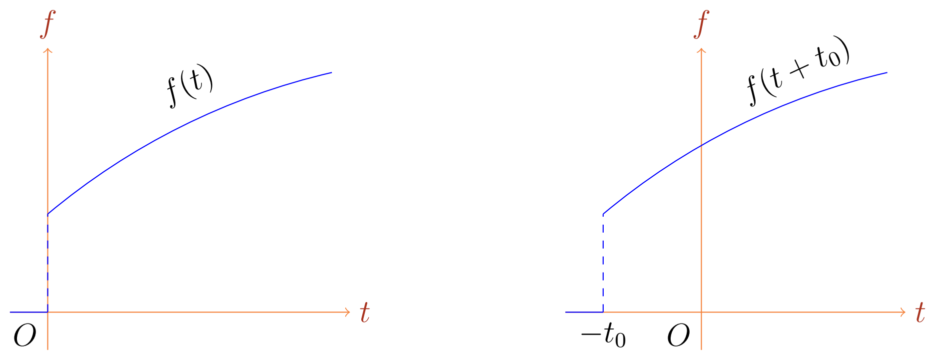


Рис. 2. «Опережение» оригинала.

Доказательство. Получим изображение функции $f\left(t+t_0\right)$:

$$\mathbb{L}\left[f\left(t+t_0\right)\right] = \int\limits_0^{\infty} f\left(t+t_0\right) e^{-pt}\, dt = \left\langle u = t+t_0,\ dt = du\right\rangle =$$

$$= e^{pt_0} \int\limits_{t_0}^{\infty} f\left(u\right) e^{-pu}\, du = e^{pt_0}\left(\int\limits_{t_0}^{0} f\left(u\right) e^{-pu}\, du + \int\limits_0^{\infty} f\left(u\right) e^{-pu}\, du\right) =$$

$$= e^{pt_0}\left(F\left(p\right) - \int\limits_0^{t_0} e^{-pu} f(u)\, du\right).$$

□

В приложении показано применение системы *Mathematica*[1)] в операционном исчислении.

Особую роль в вашей специальности играют пилообразные, телеграфные и другие периодические сигналы. Их преобразование Лапласа[2)], в том числе и для периодических функций, изменяющих знак на полупериоде[3)], также рассмотрено в приложении.

Приложение

[1)] В системе *Mathematica* оператор преобразования Лапласа в простейшем случае имеет вид `LaplaceTransform[expr,t,s]`, где `expr` — оригинал, `t` — аргумент оригинала, `s` — аргумент изображения. Найдем изображение функции $\sin t\, e^{-t}$:

```
LaplaceTransform[e^-t Sin[t],t,p]
```

$$\frac{1}{1+(1+\mathrm{p})^2}$$

Единичная ступенчатая функция Хевисайда в системе *Mathematica* имеет две ипостаси: `UnitStep[x]` и `HeavisideTheta[x]`. Отличие между ними заключается в том, что первая функция в нуле равна 1, а вторая в нуле не определена. Преобразование Лапласа, выполненное над этими функциями, дает одинаковый результат:

```
LaplaceTransform[UnitStep[t],t,p]
```

$$\frac{1}{\mathrm{p}}$$

```
LaplaceTransform[HeavisideTheta[t],t,p]
```

$$\frac{1}{\mathrm{p}}$$

Часто требуется найти изображение кусочно непрерывной функции. Такие функции описываются оператором `Piecewise`$[\{\{\mathrm{val}_1, \mathrm{cond}_1\}, \{\mathrm{val}_2, \mathrm{cond}_2\}, \ldots\}]$, аргументами которого являются пары {выражение,условие}, которые задают выражения, определяющие функцию при выполнении соответствующих условий. Например, функция

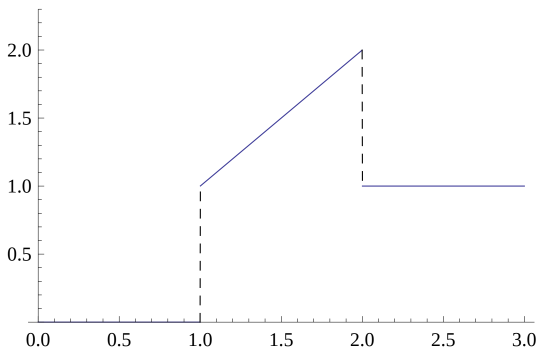
$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 1; \\ t, & 1 \le t \le 2; \\ 1, & t > 2; \end{cases}$$

с помощью этого оператора записывается так:

```
f[t_] := Piecewise[{{0,t < 1},{t,0 ≤ t ≤ 2},{1,t > 2}}]
```

а ее график строит оператор

```
Plot[f[t],{t,0,3}, ExclusionsStyle → Dashed, PlotRange → {0,2.3}]
```



Система *Mathematica* находит изображение и такой функции:

```
LaplaceTransform[f[t],t,p]
```

$$\frac{\mathrm{e}^{-2\mathrm{p}}\left(-1+\mathrm{e}^{\mathrm{p}}\right)(1+\mathrm{p})}{\mathrm{p}^2}$$

Для произвольного оригинала можно получить в общем виде изображение его производной любого порядка:

```
LaplaceTransform[f'''[t],t,p]
- p^2 f[0] + p^3 LaplaceTransform[f[t],t,p] - p f'[0] - f''[0]
```

Mathematica может по-своему сформулировать теорему об интегрировании оригинала:

```
LaplaceTransform[∫_0^t f[τ]dτ,t,p]
LaplaceTransform[f[t],t,p] / p
```

Запаздывание аргумента тоже никаких сложностей не вызывает:

```
LaplaceTransform[UnitStep[t - h],t,p, Assumptions → h > 0]
e^(-hp) / p
```

Решим еще пару примеров, рассмотренных на лекции:

```
LaplaceTransform[∫_0^t Sin[2τ]dτ,t,p]
2 / (p (4 + p^2))
LaplaceTransform[Sin[t]/t,t,p] /. ArcCot → arcctg
arcctg[p]
```

Ответ отличается от полученного на лекции, но ведь $\operatorname{arctg} t + \operatorname{arcctg} t = \pi/2$.

2) **Изображение периодического оригинала**

Пусть $f(t)$ — периодический оригинал с периодом T, а $f_0(t)$ — его сужение на интервал $(0;t)$ длины T, т.е. функция вида

$$f_0(t) = \begin{cases} f(t), & 0 < t < T; \\ 0, & t \notin (0;T). \end{cases}$$

Оригинал $f(t)$ выражается через свое сужение следующим образом:

$$f(t) = f_0(t) + f(t-T).$$

Действительно, в силу периодичности $f(t) = f(t-T)$, но при этом $f(t-T) = 0$ для $t < T$. Применяя к полученной формуле преобразование Лапласа и используя теоремы линейности и запаздывания, т.е. переходя к изображениям, получаем

$$F(p) = F_0(p) + F(p)e^{-pT},$$

где $f(t) \leftarrow\!\!\!\prec F(p)$, $f_0(t) \leftarrow\!\!\!\prec F_0(p)$. Следовательно,

$$F(p) = \frac{F_0(p)}{1-e^{-pT}}.$$

Эта формула и используется при получении изображения периодической функции.

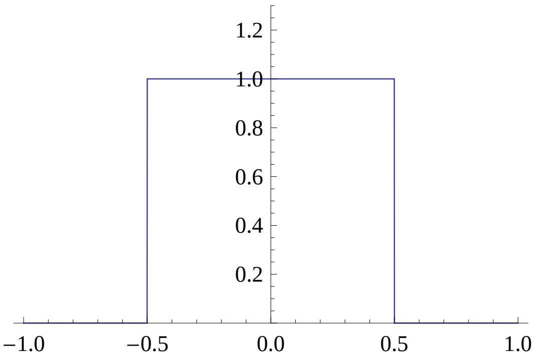
Для того чтобы система *Mathematica* могла использовать эту формулу, введем для периодического оригинала специальный оператор преобразования Лапласа вида

```
LT1[f0_,T_] := LaplaceTransform[f0[t],t,p] / (1 - e^(-pT))
```

где `f0` — рассмотренное сужение оригинала.

Прежде чем рассмотреть применение такого преобразования, познакомимся еще с одной функцией системы *Mathematica*, стандартным прямоугольным импульсом `UnitBox[x]`:

```
Plot[UnitBox[x],{x,-1,1}, PlotRange → {0,1.3}]
```

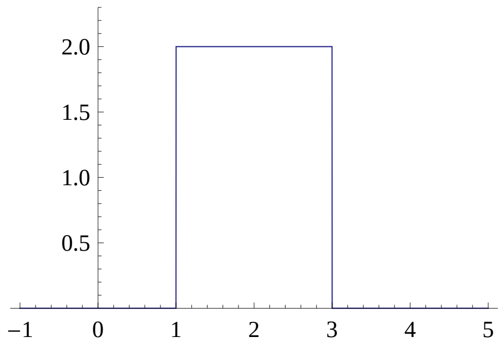


Чтобы сформировать любой прямоугольный импульс, равный h на отрезке $[a, b]$, и равный нулю вне этого отрезка, достаточно выполнить линейные преобразования над аргументом и значением функции `UnitBox`. Для этого введем свою функцию

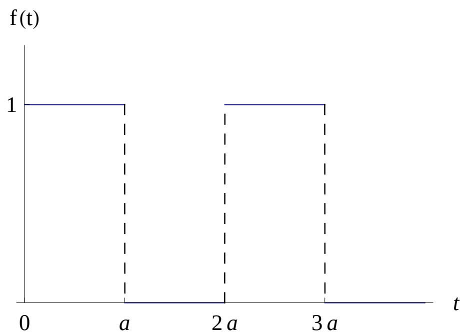
$$\texttt{UnitBoxC[x\_,a\_,b\_,h\_] := h UnitBox}\left[\frac{2x-(a+b)}{2(b-a)}\right]$$

Построим с ее помощью прямоугольный импульс величины 2 на отрезке $[1; 3]$:

```
Plot[UnitBoxC[x,1,3,2], {x,-1,5}, PlotRange → {0,2.3}]
```



А теперь вернемся к периодическим оригиналам. Предположим, требуется найти изображение бесконечной последовательности прямоугольных импульсов вида



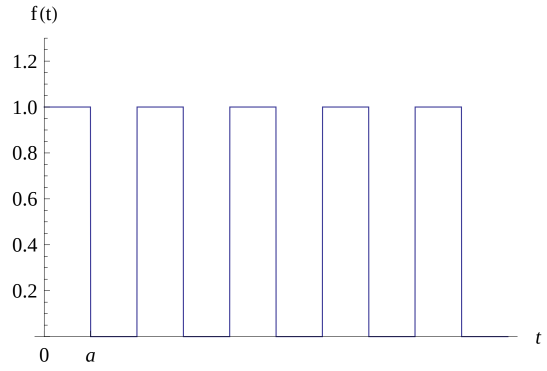
Всю последовательность можно определить как бесконечную сумму

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \texttt{UnitBoxC}[t, 2ka, (2k+1)a, 1], \qquad (\Pi 1)$$

и даже построить график такой функции (ограничившись частичной суммой ряда):

```
f[t_] := Σ_{k=0}^{7} UnitBoxC[t,2ka,(2k + 1)a,1]

Plot[f[t] /. a → 1, {t,0,10}, AxesLabel → {t,"f(t)"},
  Ticks → {{{0,0},{1,a}}},ExclusionsStyle → Dashed, PlotRange → {0,1.3}]
```



Для получения изображения этого периодического сигнала достаточно взять его сужение на отрезок $[0; a]$ и воспользоваться введенным нами преобразованием для периодической функции:

```
f0[t_] := UnitBoxC[t,0,a,1]
Factor[Assuming[a > 0,LT1[f0,2a]]]
```

$$\frac{e^{ap}}{(1+e^{ap})p}$$

3) **Изображение периодического оригинала, изменяющего знак на полупериоде**

Рассмотрим периодический оригинал $f(t)$ с периодом T, который меняет знак на полупериоде, т.е. выполняется равенство $f(t+T/2) = -f(t)$. Пусть $f_1(t)$ — его сужение на отрезок длиной в полупериод:

$$f_1(t) = \begin{cases} f(t), & 0 < t < T/2; \\ 0, & t \notin (0; T/2). \end{cases}$$

Тогда справедлива формула

$$f(t) = f_1(t) - f\left(t - \frac{T}{2}\right),$$

так как $-f(t-T/2) = -f((t-T/2)+T/2) = f(t)$ и $f(t-T/2) = 0$ для $t < T/2$. Переходя к изображениям, получаем

$$F(p) = F_1(p) - F(p)e^{-pT/2},$$

где $f(t) \leftarrow\!\!\!\prec F(p)$, $f_1(t) \leftarrow\!\!\!\prec F_1(p)$. Следовательно,

$$F(p) = \frac{F_1(p)}{1+e^{-pT/2}}.$$

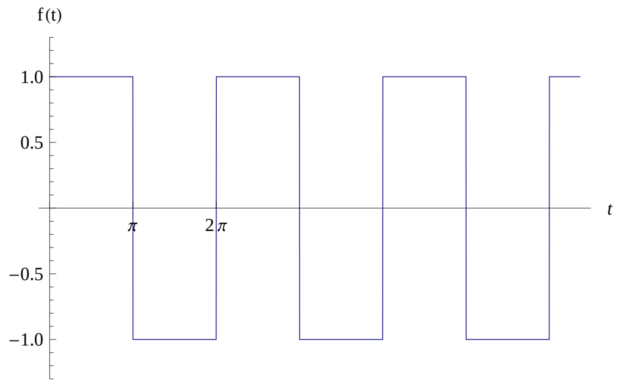
Это и будет изображением рассматриваемой функции.

Чтобы использовать эту формулу, введем еще один специальный оператор преобразования Лапласа:

```
LT2[f1_,T_] := LaplaceTransform[f1[t],t,p] / (1 - e^(-pT/2))
```

где `f1(t)` — рассмотренное сужение оригинала.

Пусть требуется найти изображение оригинала вида



Период здесь равен 2π, сигнал на полупериоде меняет знак, поэтому, применяя введенное преобразование Лапласа, получаем следующее изображение сигнала:

```
f1[t_] := UnitBoxC[t,0,π,1]
Factor[LT2[f1,2π]]
```

$$\frac{-1+e^{p\pi}}{(1+e^{p\pi})p}$$

Упростим это выражение:

$$F(p) = \frac{-1+e^{p\pi}}{(1+e^{p\pi})p} = \frac{e^{p\pi/2}-e^{-p\pi/2}}{p(e^{p\pi/2}+e^{-p\pi/2})} = \frac{1}{p}\,\mathrm{th}\,\frac{\pi p}{2}.$$

Литература

[1] Бугров Я.С., Никольский С.М. *Высшая математика. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного.* – М.: Наука, 1985, – с. 431-441.

[2] Письменный Д.Т. *Конспект лекций по высшей математике.* – М.: Рольф, 2000. Ч. 2. – с. 227-238.

[3] Мартыненко В.С. *Операционное исчисление.* – Киев: Выща школа, 1990, – с. 3-49.