Теоремы операционного исчисления

Волченко Ю.М.

Содержание лекции

Свертка оригиналов. Умножение изображений. Интеграл Дюамеля. Обращение преобразования Лапласа. Формула Меллина. Метод разложения изображения в сумму простейших ДРФ. Теоремы обращения. Таблица «изображение-оригинал».

Анимация свертки и тест на проверку знания таблицы «изображение-оригинал».
Анимация работает только в программе Acrobat Reader!

Продолжение изучения прямого и обратного преобразований Лапласа в системе *Mathematica*, в частности, для исследования бесконечных последовательностей импульсов.

7 августа 2011 г.

Лекция посвящена двум основным вопросам. Сначала мы изучим теоремы операционного исчисления, которые позволяют успешно решать задачи, гораздо более сложные, чем рассмотренные на предыдущей лекции. А затем рассмотрим решение обратной задачи операционного исчисления: как по изображению отыскать соответствующий ему оригинал.

1 Теорема о свертке

Сверткой двух оригиналов $f_1(t)$ и $f_2(t)$ называется интеграл вида

$$\boxed{f_1 * f_2(t) \triangleq \int\limits_0^t f_1(\tau)\, f_2(t-\tau)\, d\tau.}$$

Отметим, что обе функции, $f_1(t)$ и $f_2(t)$, входят в интеграл на равных основаниях, несимметричность вхождения только кажущаяся. Чтобы убедиться в этом, достаточно заметить, что эти функции меняются ролями, если под знаком интегралом сделать замену переменной интегрирования вида $u = t - \tau$,

$du = d\tau$:

$$\int_0^t f_1(\tau)\, f_2(t-\tau)\; d\tau = -\int_t^0 f_1(t-u)\, f_2(u)\; du = \int_0^t f_1(t-u)\, f_2(u)\; du.$$

Представить себе изображение свертки по графикам составляющих ее функций довольно сложно. Некоторое представление об этом дает рис. 1 со встроенной анимацией. Анимация включается либо щелканьем мыши по рис., либо с помощью видеоплейера. В первой части рис. показано образование свертки из двух одинаковых функций, графиками которых являются треугольники с основаниями $[0;2]$ и высотой 1. График функции $f_1(\tau)$ (синий треугольник) остается неподвижным, а график функции $f_2(t-\tau)$ (зеленый треугольник) движется в соответствии с изменением параметра t. Произведение этих функций иллюстрирует график, выполненный красным цветом и фактически являющийся подынтегральной функцией свертки. Площадь под этой кривой и есть значение свертки при текущем значении аргумента t. Величину этой площади во второй части рис. отображает красная точка на кривой, графике свертки данных функций. Красная точка на оси абсцисс показывает текущее значение параметра t. Рекомендуется изучить анимацию не только в режиме непрерывного движения, но и в пошаговом режиме.

Применение системы *Mathematica* для вычисления и изображения свертки см. в Приложении[1)].

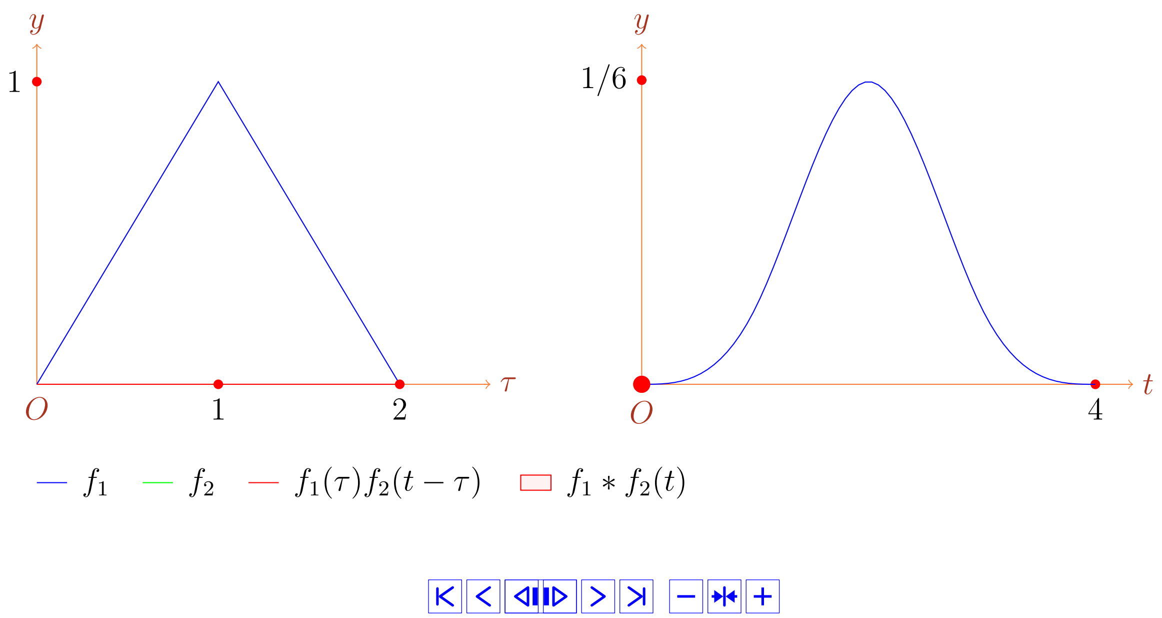


Рис. 1. Анимация свертки.

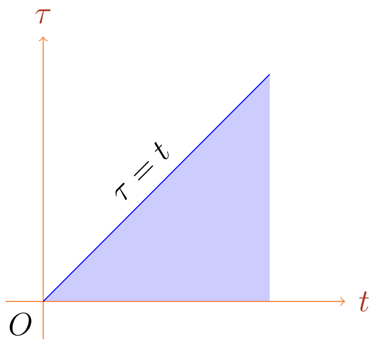
Свертка часто выражает собой результат воздействия входного сигнала на некоторый линейный объект. Поэтому для решения задач управления необходимо уметь находить ее изображение. Как показывает следующая теорема, сделать это несложно — надо только перемножить изображения подынтегральных функций.

Теорема 1 (об изображении свертки). *Изображение свертки равно произведению изображений подынтегральных функций:*

$$f_1 * f_2(t) = \int\limits_0^t f_1(\tau)\, f_2(t-\tau)\, d\tau \longleftarrow F_1(p)\, F_2(p)\,,$$

$f_1(t) \longleftarrow F_1(p)$, $f_2(t) \longleftarrow F_2(p)$.

Доказательство. Так как $f_1(t)$ и $f_2(t)$ являются оригиналами, то $f_1(t) \equiv \equiv f_2(t) \equiv 0$ при $t < 0$, а $f_2(t-\tau) \equiv 0$ при $0 < t < \tau$. Используя эти особенности и изменяя порядок интегрирования (см. рис.), получим



$$\mathbb{L}\left[f_1 * f_2\right] =$$

$$= \int\limits_0^\infty \left(\int\limits_0^t f_1(\tau)\, f_2(t-\tau)\, d\tau \right) e^{-pt}\, dt =$$

$$= \int\limits_0^\infty f_1(\tau) \left(\int\limits_\tau^\infty f_2(t-\tau) e^{-pt}\, dt \right) d\tau =$$

$$= \langle z = t - \tau,\ dz = dt \rangle = \int\limits_0^\infty f_1(\tau) \left(\int\limits_0^\infty f_2(z) e^{-p(z+\tau)}\, dz \right) d\tau =$$

$$= \int\limits_0^\infty f_1(\tau)\, e^{-p\tau}\, d\tau \int\limits_0^\infty f_2(z) e^{-pz}\, dz = F_1(p)\, F_2(p)\,.$$

Пример 1. *Найти изображение функции*

$$\psi(t) = \int\limits_0^t (t-\tau)\, e^\tau\, d\tau.$$

Решение. Функция $\psi(t)$ представляет собой свертку двух функций, t и e^t. Но $t \longleftarrow \frac{1}{p^2}$, а $e^t \longleftarrow \frac{1}{p-1}$. Следовательно,

$$\psi(t) \longleftarrow \frac{1}{p^2} \cdot \frac{1}{p-1} = \frac{1}{p^2\,(p-1)}.$$

2 Интеграл Дюамеля

С помощью теоремы о свертке может быть получена еще одна полезная формула. Пусть $f(t) \longleftarrow F(p)$, $g(t) \longleftarrow G(p)$. Представим следующим образом произведение $pF(p)\,G(p)$:

$$pF(p)\,G(p) = g(0)\,F(p) + [pG(p) - g(0)]\,F(p)\,.$$

Первое слагаемое является изображением функции $g(0)\,f(t)$. Выражение в квадратных скобках имеет оригиналом производную $g'(t)$. Следовательно, второе слагаемое изображает свертку функций $g'(t)$ и $f(t)$. По теореме линейности получаем

$$\boxed{pF(p)\,G(p) \rightarrowtail g(0)\,f(t) + \int\limits_0^t g'(t-\tau)\,f(\tau)\,d\tau.}$$

Интеграл, стоящий в правой части этой формулы, называется ***интегралом Дюамеля***, а сама формула – ***формулой Дюамеля***. В частности, ее можно применять для отыскания оригиналов по их изображениям.

Пример 2. *Найти оригинал, соответствующий изображению*

$$F(p) = \frac{2p}{(p-1)\,(p^2-2p-3)}.$$

Решение. Преобразуем заданное изображение:

$$F(p) = \frac{2p}{(p-1)\,(p^2-2p-3)} = \frac{2p}{(p-1)\left[(p-1)^2-4\right]} = p\cdot\frac{1}{p-1}\cdot\frac{2}{(p-1)^2-4}.$$

Если положить $F(p) = \frac{2}{(p-1)^2-4}$, $G(p) = \frac{1}{p-1}$, то получим левую часть формулы Дюамеля. Но $F(p) \rightarrowtail e^t \operatorname{sh} 2t = f(t)$, а $G(p) \rightarrowtail e^t = g(t) = g'(t)$. Применяя формулу Дюамеля, получаем

$$pF(p)\,G(p) \rightarrowtail e^t \operatorname{sh} 2t + \int\limits_0^t e^{t-\tau} e^{\tau} \operatorname{sh} 2\tau\,d\tau = e^t \operatorname{sh} 2t + e^t \int\limits_0^t \operatorname{sh} 2\tau\,d\tau =$$

$$= \left(\operatorname{sh} 2t + \frac{1}{2}\operatorname{ch} 2\tau\Big|_0^t\right) e^t = \left[\operatorname{sh} 2t + \frac{1}{2}\left(\operatorname{ch} 2t - 1\right)\right] e^t.$$

3 Связь преобразований Лапласа и Фурье

Подобная связь помимо того, что демонстрирует некоторое родство преобразований Лапласа и Фурье, помогает при получении результата одного преобразования практически сразу же получить и результат применения другого.

Сейчас мы введем более подробные обозначения для обоих преобразований. Преобразование Фурье функции $f(x)$ обозначим

$$\mathbb{F}\left[f(x), y\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-jxy}\, dx,$$

а преобразование Лапласа –

$$\mathbb{L}\left[f(x), p\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{0}^{\infty} f(x)\, e^{-px}\, dx.$$

Тогда

$$\sqrt{2\pi}\,\mathbb{F}\left[f(x), y\right] = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-jxy}\, dx = \int\limits_{0}^{\infty} f(x)\, e^{-jxy}\, dx + \int\limits_{-\infty}^{0} f(x)\, e^{-jxy}\, dx =$$

$$= \mathbb{L}\left[f(x), jy\right] - \int\limits_{0}^{-\infty} f(x)\, e^{-jxy}\, dx =$$

$$= \mathbb{L}\left[f(x), jy\right] + \int\limits_{0}^{\infty} f(-x)\, e^{jxy}\, dx =$$

$$= \mathbb{L}\left[f(x), jy\right] + \mathbb{L}\left[f(-x), -jy\right].$$

Получили формулу

$$\boxed{\sqrt{2\pi}\,\mathbb{F}\left[f(x), y\right] = \mathbb{L}\left[f(x), jy\right] + \mathbb{L}\left[f(-x), -jy\right],} \qquad (1)$$

которая и устанавливает связь между преобразованиями Лапласа и Фурье.

Пример 3. *Найти преобразование Фурье функции*

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\alpha x}\cos\beta x, & x \geq 0, \alpha > 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Решение. Рассматривая заданную функцию как оригинал, можем сразу записать ее изображение:

$$\mathbb{L}\left[f(x), p\right] = \frac{p+\alpha}{(p+\alpha)^2 + \beta^2}.$$

По формуле (1), связывающей преобразования Лапласа и Фурье, и учитывая то, что $f(-x) \equiv 0$ при $x > 0$, находим преобразование Фурье заданной функции:

$$\mathbb{F}\left[f(x), y\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathbb{L}\left[f(x), jy\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{jy+\alpha}{(jy+\alpha)^2 + \beta^2}.$$

Или в алгебраической форме:

$$\mathbb{F}\left[f\left(x\right),y\right]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{jy+\alpha}{\alpha^2+\beta^2-y^2+2j\alpha y}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{\left(jy+\alpha\right)\left(\alpha^2+\beta^2-y^2-2j\alpha y\right)}{\left(\alpha^2+\beta^2-y^2\right)^2+4\alpha^2y^2}=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{\alpha^3+\alpha\beta^2-\alpha y^2+2\alpha y^2+j\left(\alpha^2y+\beta^2y-y^3-2\alpha^2y\right)}{\left(\alpha^2+\beta^2-y^2\right)^2+4\alpha^2y^2}=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{\alpha\left(\alpha^2+\beta^2+y^2\right)}{\left(\alpha^2+\beta^2-y^2\right)^2+4\alpha^2y^2}+j\frac{y\left(\beta^2-\alpha^2-y^2\right)}{\left(\alpha^2+\beta^2-y^2\right)^2+4\alpha^2y^2}\right].$$

4 Обращение преобразования Лапласа

Теперь рассмотрим задачу, обратную той, которую решает преобразование Лапласа. Изучим различные способы, с помощью которых можно по известному изображению $F\left(p\right)$, $p=\alpha+j\beta$, найти его оригинал $f\left(t\right)$. В общем виде задачу решает формула Меллина, которая имеет вид

$$f\left(t\right)=\frac{1}{2\pi j}\int\limits_{\alpha-j\infty}^{\alpha+j\infty}F\left(p\right)e^{pt}\,dp,\ \alpha>\alpha_0.$$

Чтобы эта формула выполнялась, необходимо, чтобы $F\left(p\right)$ была аналитической в области $\mathrm{Re}\,p>\alpha_0$, чтобы она стремилась к нулю равномерно относительно $\arg p$ при $|p|\to\infty$ и чтобы

$$\int\limits_{\alpha-j\infty}^{\alpha+j\infty}\left|F\left(p\right)\right|\,dt<M.$$

Отметим, однако, что применение этой формулы совсем не просто и поэтому прибегают к ней по большей части в крайних случаях. В то же время имеются методы обращения преобразования Лапласа меньшей степени хитроумности, но большей практической применимости.

4.1 Разложение изображения на сумму простейших ДРФ

Если ДРФ – дробно-рациональная функция (ДРФ), то ее, как известно, можно представить в виде суммы простейших ДРФ. Значит, остается научиться находить оригиналы для простейших ДРФ, а дальше применить теорему линейности.

Итак, найдем оригиналы для четырех различных типов простейших ДРФ.

Первый тип. Для самого простого типа ДРФ соответствие «изображение-оригинал» очевидно:

$$\frac{A}{p-a} \rightarrowtail Ae^{at}.$$

Второй тип. Для второго типа ДРФ задача также решается сразу:

$$\frac{A}{(p-a)^k} \rightarrowtail A\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}e^{at},$$

так как $1/p^n \rightarrowtail t^{n-1}/\,(n-1)!$.

Третий тип. Требуется найти оригинал для простейшей ДРФ вида

$$\frac{Ap+B}{p^2+ap+q},\ q > a^2/4.$$

Для этого сначала преобразуем ДРФ:

$$\frac{Ap+B}{p^2+ap+q} = \frac{Ap+B}{\left(p+\frac{a}{2}\right)^2+q-\frac{a^2}{4}} = \left\langle b=\sqrt{q-\frac{a^2}{4}}\right\rangle =$$
$$= \frac{Ap+B}{\left(p+\frac{a}{2}\right)^2+b^2} = \frac{A\left(p+\frac{a}{2}\right)+\left(B-\frac{Aa}{2}\right)}{\left(p+\frac{a}{2}\right)^2+b^2} =$$
$$= A\frac{\left(p+\frac{a}{2}\right)}{\left(p+\frac{a}{2}\right)^2+b^2} + \frac{B-\frac{Aa}{2}}{b}\cdot\frac{b}{\left(p+\frac{a}{2}\right)^2+b^2}.$$

Следовательно,

$$\frac{Ap+B}{p^2+ap+q} \rightarrowtail Ae^{-at/2}\cos bt + \frac{2B-Aa}{2b}e^{-at/2}\sin bt =$$
$$= \left(A\cos bt + \frac{2B-Aa}{2b}\sin bt\right)e^{-at/2}.$$

Нет необходимости запоминать эту формулу. Надо только запомнить те искусственные приемы, которые позволяют придать ДРФ подходящую форму.

Четвертый тип. Рассматривать получение оригинала для ДРФ

$$\frac{Ap+B}{(p^2+ap+q)^k},\ q > a^2/4,$$

не будем, так как это сопряжено с достаточно громоздкими выкладками.

Пример 4. *Найти оригинал для изображения*

$$F(p) = \frac{p}{(p+1)^2\,(p^2+4p+5)}.$$

Решение. Разложим заданную функцию в сумму простейших ДРФ:

$$\frac{p}{(p+1)^2(p^2+4p+5)} = \frac{A}{p+1}^{\backslash (p+1)\left(p^2+4p+5\right)} + \frac{B}{(p+1)^2}^{\backslash p^2+4p+5} + \frac{Cp+D}{p^2+4p+5}^{\backslash (p+1)^2}$$

$$\begin{array}{c|r|r|l} p=-1 & 2B=-1 & B=-\dfrac{1}{2} & B=-\dfrac{1}{2} \\ p^3 & A+C=0 & C=-A & C=-1 \\ p & 9A+4B+C+2D=1 & 8A+2D=3 & A=1 \\ p^0 & 5A+5B+D=0 & 5A+D=\dfrac{5}{2} & D=-\dfrac{5}{2} \end{array}$$

$$\frac{p}{(p+1)^2(p^2+4p+5)} = \frac{1}{p+1} - \frac{1/2}{(p+1)^2} - \frac{p+5/2}{p^2+4p+5}.$$

Для первых двух слагаемых изображения находятся легко:

$$\frac{1}{p+1} \rightarrowtail e^{-t}, \ -\frac{1/2}{(p+1)^2} \rightarrowtail -\frac{1}{2}te^{-t}.$$

Преобразуем третье слагаемое:

$$\frac{p+5/2}{p^2+4p+5} = \frac{(p+2)+1/2}{(p+2)^2+1} = \frac{p+2}{(p+2)^2+1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(p+2)^2+1},$$

в результате становится ясно, что имеет место соответствие

$$\frac{p+5/2}{p^2+4p+5} \rightarrowtail e^{-2t}\cos t + \frac{1}{2}e^{-2t}\sin t.$$

Применяем теорему линейности и получаем

$$\frac{p}{(p+1)^2(p^2+4p+5)} \rightarrowtail e^{-t} - \frac{1}{2}te^{-t} - e^{-2t}\cos t - \frac{1}{2}e^{-2t}\sin t =$$
$$= \left(1-\frac{t}{2}\right)e^{-t} - \left(\cos t + \frac{1}{2}\sin t\right)e^{-2t}.$$

4.2 Теоремы обращения

Следующие две теоремы существенно используют материал лекций по комплексному анализу.

Теорема 2. *Пусть $F(p)$ – аналитическая функция, $F(\infty)=0$ и точка $p=\infty$ – правильная, т.е. ее ряд Лорана имеет вид*

$$F(p) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{c_k}{p^k}.$$

Тогда оригинал этого изображения равен

$$f(t) = H(t)\sum_{k=1}^{\infty}c_k\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}.$$

Доказательство. Выполним над указанным оригиналом преобразование Лапласа:

$$\mathbb{L}\left[f\left(t\right)\right]=\int\limits_{0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}c_k\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}e^{-pt}\,dt=\sum_{k=1}^{\infty}c_k\int\limits_{0}^{\infty}\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}e^{-pt}\,dt=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{c_k}{p^k}.$$

Это и требовалось доказать.

Пример 5. *Для изображения*

$$F\left(p\right)=\frac{p}{p^2+1}$$

найти оригинал.

Решение. Представим заданное изображение следующим образом

$$F\left(p\right)=\frac{p}{p^2+1}=\frac{1}{p\left(1+\frac{1}{p^2}\right)}.$$

Теперь воспользуемся формулой суммы бесконечной геометрической прогрессии:

$$F\left(p\right)=\frac{1}{p\left(1+\frac{1}{p^2}\right)}=\sum_{k=0}^{\infty}\left(-1\right)^k\frac{1}{p^{2k+1}}.$$

Следовательно, по доказанной теореме искомый оригинал имеет вид

$$f\left(t\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^k t^{2k}}{(2k)!}=\cos t.$$

Теорема 3. *Пусть изображение $F\left(p\right)$ — ДРФ с полюсами $p_1, p_2, \ldots, p_m$. Тогда его оригинал определяется формулой*

$$f\left(t\right)=\sum_{k=1}^{m}\operatorname*{res}_{p=p_k}\left[F\left(p\right)e^{pt}\right].$$

Если p_k — простые полюсы и

$$F\left(p\right)=\frac{A\left(p\right)}{B\left(p\right)},$$

где $A\left(p\right)$, $B\left(p\right)$ — многочлены без общих корней, то

$$f\left(t\right)=\sum_{k=1}^{m}\frac{A\left(p_k\right)}{B'\left(p_k\right)}e^{p_k t}.$$

Если же p_k — полюсы кратности n_k, то

$$f\left(t\right)=\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{(n_k-1)!}\lim_{p\to p_k}\frac{d^{n_k-1}}{dp^{n_k-1}}\left[F\left(p\right)e^{pt}\left(p-p_k\right)^{n_k}\right].$$

Пример 6. *Найти оригинал по его изображению*

$$F(p) = \frac{1}{(p-1)(p^2+1)}.$$

Решение. Изображение имеет вид $A(p)/B(p)$, где $A(p) \equiv 1$, $B(p) = (p-1)(p^2+1)$, причем, все полюсы $p_1 = 1$, $p_2 = -j$, $p_3 = j$ функции $F(p)$ – простые. Следовательно, в соответствии с рассмотренной теоремой

$$f(t) = \frac{1}{B'(p_1)} e^{p_1 t} + \frac{1}{B'(p_2)} e^{p_2 t} + \frac{1}{B'(p_3)} e^{p_3 t},$$

где $B'(p) = p^2+1+2p(p-1) = 3p^2-2p+1$, $B'(p_1) = 2$, $B'(p_2) = -3+2j+1 = -2+2j$, $B'(p_3) = 3-2j+1 = -2-2j$. В результате получаем

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2}e^t + \frac{1}{2}\cdot\frac{e^{-jt}}{j-1} - \frac{1}{2}\cdot\frac{e^{jt}}{j+1} = \frac{1}{2}\left(e^t - \frac{1+j}{2}e^{-jt} - \frac{1-j}{2}e^{jt}\right) = \\ &= \frac{1}{2}\left(e^t - \frac{e^{jt}+e^{-jt}}{2} - \frac{e^{jt}-e^{-jt}}{2j}\right) = \frac{1}{2}\left(e^t - \cos t - \sin t\right). \end{aligned}$$

Пример 7. *Найти оригинал по его изображению*

$$F(p) = \frac{p}{(p^2-1)^2}.$$

Решение. Функция $F(p)$ имеет полюсы $p_1 = 1$, $p_2 = -1$, каждый второго порядка. Согласно рассмотренной теореме

$$\begin{aligned} f(t) &= \lim_{p\to 1}\frac{d}{dp}\left[\frac{pe^{pt}}{(p+1)^2}\right] + \lim_{p\to -1}\frac{d}{dp}\left[\frac{pe^{pt}}{(p-1)^2}\right] = \\ &= \lim_{p\to 1}\frac{(e^{pt}+pte^{pt})(p+1)^2 - 2(p+1)pe^{pt}}{(p+1)^4} + \\ &+ \lim_{p\to -1}\frac{(e^{pt}+pte^{pt})(p-1)^2 - 2(p-1)pe^{pt}}{(p-1)^4} = \\ &= \frac{(e^t+te^t)4-4e^t}{4\cdot 4} + \frac{(e^{-t}-te^{-t})4-4e^{-t}}{4\cdot 4} = \frac{t}{4}\left(e^t - e^{-t}\right) = \frac{1}{2}t\,\mathrm{sh}\,t. \end{aligned}$$

□

Применение системы *Mathematica* для обращения преобразования Лапласа и в связи с другими вопросами см. в Приложении[2)].

На следующей странице приведена таблица «изображение-оригинал», которой удобно пользоваться при решении задач. При постоянном применении таблицы на практике ее рекомендуется заучить наизусть. Проверку знания таблицы можно провести на тестировщике, непосредственно следующем за ней.

Изображение	Оригинал
$\dfrac{1}{p}$	1
$\dfrac{1}{p+a}$	e^{-at}
$\dfrac{a}{p^2+a^2}$	$\sin at$
$\dfrac{p}{p^2+a^2}$	$\cos at$
$\dfrac{a}{p^2-a^2}$	$\operatorname{sh} at$
$\dfrac{p}{p^2-a^2}$	$\operatorname{ch} at$
$\dfrac{b}{(p+a)^2+b^2}$	$e^{-at}\sin bt$
$\dfrac{p+a}{(p+a)^2+b^2}$	$e^{-at}\cos bt$
$\dfrac{b}{(p+a)^2-b^2}$	$e^{-at}\operatorname{sh} bt$
$\dfrac{p+a}{(p+a)^2-b^2}$	$e^{-at}\operatorname{ch} bt$
$\dfrac{n!}{p^{n+1}}$	t^n
$(-1)^n F^{(n)}(p)$	$t^n f(t)$
$p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0)$	$f^{(n)}(t)$
$F_1(p)\, F_2(p)$	$\int\limits_0^t f_1(\tau)\, f_2(t-\tau)\, d\tau$
$pF(p)\, G(p)$	$g(0)\, f(t) + \int\limits_0^t f(\tau)\, g'(t-\tau)\, d\tau$

Что должно стоять в правой части формулы вместо знака вопроса?
Щелкнув мышкой, проверьте ответ.
Щелкните мышкой второй раз и получите новый вопрос. И т.д.

$$\frac{p}{p^2 + a^2} \rightarrowtail ?$$

Тест на знание таблицы «изображение-оригинал».

Приложение

[1] Свертку двух функций в системе *Mathematica* можно получить с помощью оператора `Convolve[f,g,x,y]`, где `f` и `g` — функции, из которых компонуется свертка, `x` — их аргумент, `y` — аргумент свертки. Правда, свертка эта определена не так, как на лекции (другие пределы интегрирования):

$$f_1 * f_2(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_1\,(\tau)\, f_2\,(t-\tau)\; d\tau.$$

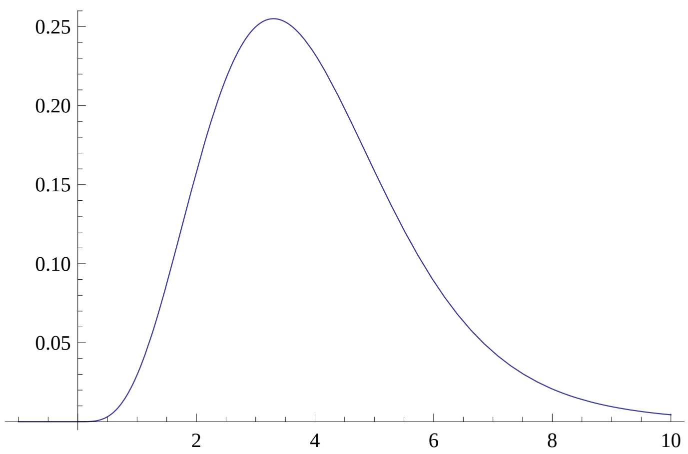
Но если функции f_1 и f_2 являются оригиналами, то подынтегральная функция в последней формуле не будет равна нулю как раз в интервале $[0;t]$. Действительно, функция $f_1(\tau)$ не равна нулю, если $0 < \tau$, а функция $f_2(t-\tau)$ не равна нулю, когда $t - \tau > 0$, или $\tau < t$. Поэтому, используя оператор `Convolve`, необходимо функции, образующие свертку, умножать на единичную ступенчатую функцию Хевисайда, например, на `UnitStep`. Найдем, к примеру, свертку функций $e^{-x}\sin x$ и $x^2 e^{-x}$. На языке системы *Mathematica* это выглядит так:

```
z = Convolve[e^-x Sin[x]UnitStep[x],e^-x x^2 UnitStep[x],x,y]
```

$e^{-y}(-2+y^2+2\mathrm{Cos}[y])\ \mathrm{UnitStep}[y]$

Можно построить график найденной свертки:

```
Plot[z,{y,-1,10}]
```



В дальнейшем полученную свертку можно использовать как обычную функцию в любых вычислениях.

[2] Попробуем с помощью системы *Mathematica* решить задачи, рассмотренные на лекции.

Неизвестно, пользуется ли *Mathematica* теоремой о свертке, но пример из этого п. лекции она решает правильно:

$$\mathrm{Factor}\left[\left[\mathrm{LaplaceTransform}\left[\int_0^t (t-\tau)e^{\tau}\,d\tau, t, p\right]\right]\right]$$

$$\frac{1}{(-1+p)p^2}$$

Для обращения преобразования Лапласа в системе *Mathematica* предусмотрен специальный оператор, который имеет вид `InverseLaplaceTransform[expr,s,t]`, где `expr` — изображение, `s` — аргумент изображения, `t` — аргумент оригинала. Найдем с его помощью оригинал изображения, полученного на предыдущей лекции:

$$\mathrm{InverseLaplaceTransform}\left[\frac{1}{1+(1+p)^2}, p, t\right]$$

$-\frac{1}{2}\mathrm{I}\,e^{(-1-\mathrm{I})t}\left(-1+e^{2\mathrm{I}t}\right)$

Как видим, ответ получен в комплексной форме. Чтобы привести его к действительному виду, выполним следующее упрощение:

```
FullSimplify[%]
```

$e^{-t}\,\mathrm{Sin}[t]$

На той же предыдущей лекции отмечалось, что единичная ступенчатая функция Хевисайда представлена двумя функциями системы *Mathematica*: `UnitStep[t]` и `HeavisideTheta[t]`. А вот обратное преобразование Лапласа всегда выражается с помощью второй функции:

$\mathtt{InverseLaplaceTransform}\left[\frac{e^{-3p}(-1+e^{p})}{p+4},p,t\right]$

$e^{8-4t}\left(-e^{4}\ \mathtt{HeavisideTheta[-3\ +\ t]}\ +\ \mathtt{HeavisideTheta[-2\ +\ t]}\right)$

В дальнейшем для сокращения записи мы будем заменять идентификатор функции Хевисайда более коротким `H[t]`, пользуясь именованными правилами

```
HtoHT = H → HeavisideTheta;
HTtoH = HeavisideTheta → H;
```

Например, предыдущее вычисление оригинала по его изображению будет теперь выглядеть так:

$\mathtt{InverseLaplaceTransform}\left[\frac{e^{-3p}(-1+e^{p})}{p+4},p,t\right]\ \mathtt{/.\ HTtoH}$

$e^{8-4t}\left(-e^{4}\ \mathtt{H[-3\ +\ t]}\ +\ \mathtt{H[-2\ +\ t]}\right)$

Mathematica легко находит оригиналы дробно-рациональных функций, например, таких, которые использовались в примерах лекции:

$\mathtt{FullSimplify}\left[\ \mathtt{InverseLaplaceTransform}\left[\frac{2p}{(p-1)(p^{2}-2p-3)},p,t\right]\right]$
$\quad\mathtt{/.\ \{Cosh\ \to\ ch,\ Sinh\ \to\ sh\}}$

$\frac{1}{2}e^{t}\left(-1+\mathrm{ch}[2\ t]+2\,\mathrm{sh}[2\ t]\right)$

$\mathtt{Simplify}\left[\mathtt{ComplexExpand}\left[\mathtt{InverseLaplaceTransform}\left[\frac{p}{(p+1)^{2}(p^{2}+4p+5)},p,t\right]\right]\right]$

$-\frac{1}{2}e^{-2t}\left(e^{t}(-2+t)+2\,\mathrm{Cos}[t]+\mathrm{Sin}[t]\right)$

Не вызывает затруднений и изображение, представленное простейшей ДРФ четвертого типа:

$\mathtt{Simplify}\left[\mathtt{ComplexExpand}\left[\mathtt{InverseLaplaceTransform}\left[\frac{1}{(p^{2}+4p+5)^{3}},p,t\right]\right]\right]$

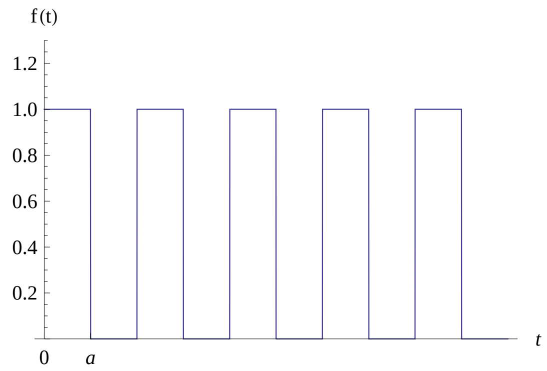
$-\frac{1}{8}e^{-2t}\left(3t\ \mathrm{Cos}[t]\ +\ (-3+t^{2})\,\mathrm{Sin}[t]\right)$

Некоторая проблема возникает при попытке отыскать оригинал периодической функции по ее изображению. На прошлой лекции было найдено изображение

$$F(p)=\frac{e^{ap}}{p(1+e^{ap})}$$

бесконечной периодической последовательности прямоугольных импульсов

$$f(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\mathtt{UnitBoxC}[t,2ka,(2k+1)a,1]. \qquad (\Pi1)$$



Способна ли *Mathematica* найти оригинал по этому изображению? То есть по конечному выражению найти бесконечный ряд? Оказывается, не может:

```
InverseLaplaceTransform[e^(ap)/((1 + e^(ap))p)]
InverseLaplaceTransform[e^(ap)/((1 + e^(ap))p)]
```

Что же делать? С аналитическим решением этого вопроса можно познакомиться в рекомендованной литературе [3]. А мы попробуем использовать систему *Mathematica* для решения поставленной задачи непрямым путем. Вернемся к записи бесконечного ряда прямоугольных импульсов в виде (П1) и воспользуемся теоремой линейности в следующей форме:

$$g_k(t) \leftarrow G_k(t) \Longrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} g_k(t) \leftarrow \sum_{k=0}^{\infty} G_k(t),$$

где $g_k(t) =$ `UnitBoxC[t,2ka,(2k + 1)a,1]`. Но изображение этой функции имеет вид

```
LaplaceTransform[UnitBoxC[t,2ka,(2k + 1)a,1],t,p,
  Assumptions → a > 0 && k > 0]
```

$$\frac{e^{-a(1+2k)p}(-1+e^{ap})}{p}$$

Следовательно, изображение всего сигнала (П1) записывается в виде бесконечного ряда:

$$F(p) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-a(1+2k)p}\left(-1+e^{ap}\right)}{p}. \tag{П2}$$

Кстати, это выражение с помощью формулы бесконечной геометрической прогрессии приводится к уже полученному выражению:

$$F(p) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-a(1+2k)p}\left(-1+e^{ap}\right)}{p} = \frac{\left(-1+e^{ap}\right)}{p} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-a(1+2k)p} = \frac{1-e^{-ap}}{p} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-2kap} =$$
$$= \frac{1-e^{-ap}}{p} \cdot \frac{1}{1-e^{-2ap}} = \frac{1}{p(1+e^{-ap})} = \frac{e^{ap}}{p(1+e^{ap})}.$$

Но нас интересует не это, нам надо выполнить обратное преобразование Лапласа над изображением (П2). Для этого достаточно найти оригинал общего члена этого ряда, а затем снова применить теорему линейности. Получим

```
FullSimplify[InverseLaplaceTransform[(e^(-a(1+2k)p)(-1 + e^(ap)))/p,p,t]] ./ HTtoH
```

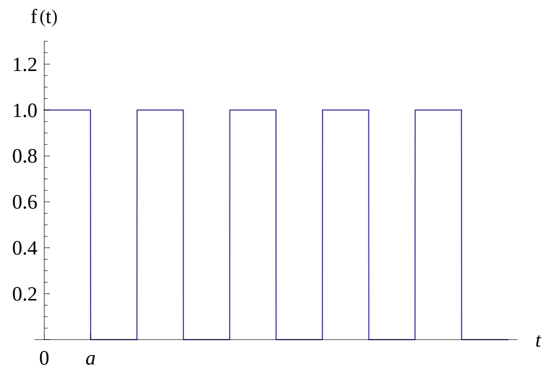
```
H[-2ak + t] - H[-a(1 + 2 k) + t]
```

Значит, оригинал периодического сигнала можно записать так:

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} [H(-2ak + t) - H(-a(1 + 2k) + t)].$$

Очевидно, что это просто другая форма записи (П1). Построение графика подтверждает это:

```
f[t_] := Sum[(H[-2ak + t] - H[-a(1 + 2k) + t]), {k, 0, 10}] /. HtoHT
Plot[f[t] /. a → 1, {t,0,10}, AxesLabel → {t,"f(t)"},
  Ticks → {{{0,0},{1,a}}}, ExclusionsStyle → Dashed, PlotRange → {0,1.3}]
```



Литература

[1] Бугров Я.С., Никольский С.М. *Высшая математика. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного.* – М.: Наука, 1985, – с. 441-446.

[2] Письменный Д.Т. *Конспект лекций по высшей математике.* – М.: Рольф, 2000. Ч. 2. – с. 238-246.

[3] Мартыненко В.С. *Операционное исчисление.* – Киев: Выща школа, 1990, – с. 57-67, 68-70, 107-117, 166-189.