Применение операционного метода I

Волченко Ю.М.

Содержание лекции

Решение линейного дифференциального уравнения операционным методом. Применение интеграла Дюамеля. Решение систем линейных дифференциальных уравнений операционным методом.

Анимация процессов, происходящих в RLC-контуре и трансформаторе. Анимация работает только в программе Acrobat Reader!

Особенности применения системы *Mathematica* для решения дифференциальных уравнений операционным методом.

17 августа 2011 г.

Приступим к реализации той идеи, которая была высказана на первой лекции по операционному исчислению. Покажем, как дифференциальное уравнение в области оригиналов превратить в алгебраическое в области изображений, затем найти решение этого алгебраического уравнения и полученное решение обратным преобразованием перевести в решение исходного дифференциального уравнения.

1 Решение дифференциальных уравнений

Пусть требуется решить линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами вида

$$a_0x^{(n)}(t) + a_1x^{(n-1)}(t) + \ldots + a_{n-1}x'(t) + a_nx(t) = f(t)\,, \tag{1}$$

где $x(t)$ — неизвестная функция, $f(t)$ — известная функция, $a_0, a_1, \ldots, a_n$ — коэффициенты уравнения. При этом решение должно удовлетворять начальным условиям

$$x(0) = x_0,\ x'(0) = x_0',\ \ldots,\ x^{(n-1)}(0) = x_0^{(n-1)}. \tag{2}$$

Введем обозначения изображений $X(p) \rightarrowtail x(t)$, $F(p) \rightarrowtail f(t)$ и применим к уравнению (1) преобразование Лапласа. Учитывая соответствия

$$x'(t) \leftarrow\!\!\prec pX(p) - x_0,\ x''(t) \leftarrow\!\!\prec p^2X(p) - px_0 - x_0',\ \ldots, \tag{3}$$

$$x^{(n)}(t) \leftarrow\!\!\prec p^nX(p) - p^{n-1}x_0 - \ldots - px_0^{(n-2)} - x_0^{(n-1)}, \tag{4}$$

следующие из теоремы о дифференцировании оригинала, и используя теорему линейности, получим

$$X(p)\left(a_0p^n + a_1p^{n-1} + \ldots a_{n-1}p + a_0\right) = F(p) + \beta(p), \tag{5}$$

где $\beta(p)$ — многочлен от p, образованный из слагаемых, не содержавших $X(p)$ или $F(p)$. Алгебраическое уравнение (5) с неизвестным $X(p)$ называется ***операторным***, или ***изображающим***, или ***уравнением в изображениях***. Отметим, что благодаря соотношениям (4) начальные условия (2) уже учтены в самом уравнении.

Решение операторного уравнения находится просто:

$$\boxed{X(p) = \frac{F(p) + \beta(p)}{\alpha(p)},} \tag{6}$$

где $\alpha(p) = a_0p^n + a_1p^{n-1} + \ldots a_{n-1}p + a_n$.

Если $F(p)$ — дробно-рациональная функция, то правая часть полученной формулы — тоже дробно-рацинальная функция. В этом случае, раскладывая правую часть в сумму простейших ДРФ, находим изображения каждого слагаемого суммы, а затем, используя теорему линейности, — и оригинал $x(t)$. В других случаях приходится применять более сложные приемы отыскания решения.

Пример 1. *Решить операционным методом дифференциальное уравнение*

$$x^{IV} - x'' = 1$$

при нулевых начальных условиях $x(0) = x'(0) = x''(0) = x'''(0) = 0$.

Решение. Обозначим изображение неизвестной функции $X(p) \rightarrowtail x(t)$ и вспомним, что $1 \leftarrow\!\!\prec \frac{1}{p}$. Далее остается применить формулу (6):

$$X(p) = \frac{1/p}{p^4 - p^2} = \frac{1}{p^3(p-1)(p+1)}.$$

Разложим полученную ДРФ в сумму простейших ДРФ:

$$\frac{1}{p^3(p-1)(p+1)} = \frac{A}{p^3}^{\backslash p^2-1} + \frac{B}{p^2}^{\backslash p\left(p^2-1\right)} + \frac{C}{p}^{\backslash p^2\left(p^2-1\right)} + \frac{D}{p-1}^{\backslash p^3(p+1)} + \frac{E}{p+1}^{\backslash p^3(p-1)}$$

$$\begin{array}{r|rl} p=0 & -A=1 & A=-1 \\ p=-1 & 2E=1 & E=1/2 \\ p=1 & 2D=1 & D=1/2 \\ p^3 & B+D-E=0 & B=0 \\ p^2 & A-C=0 & C=-1 \end{array}$$

$$\frac{1}{p^3(p-1)(p+1)} = -\frac{1}{p^3} - \frac{1}{p} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p-1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p+1}.$$

Используя таблицу «изображение-оригинал», находим решение заданного дифференциального уравнения:

$$x(t) = -\frac{t^2}{2} - 1 + \frac{1}{2}\cdot e^t + \frac{1}{2}\cdot e^{-t} = \operatorname{ch} t - \frac{t^2}{2} - 1.$$

Пример 2. *Решить операционным методом уравнение*

$$x'' + x = 2\cos t,\ \ x(0) = 0,\ x'(0) = -1.$$

Решение. Введем обозначение неизвестной функции $X(p) \rightarrowtail x(t)$, тогда $x''(t) \leftarrowtail$ $\leftarrowtail p^2X(p) - x'(0) = p^2X(p) + 1$. Правую часть уравнения изображает функция $\frac{2p}{p^2+1} \rightarrowtail 2\cos t$. Применив к заданному уравнению преобразование Лапласа, придем к операторному уравнению вида

$$p^2X(p) + 1 + X(p) = \frac{2p}{p^2+1}.$$

Его решение получается таким:

$$X(p) = \frac{1}{p^2+1}\left(\frac{2p}{p^2+1} - 1\right) = \frac{2p}{(p^2+1)^2} - \frac{1}{p^2+1}.$$

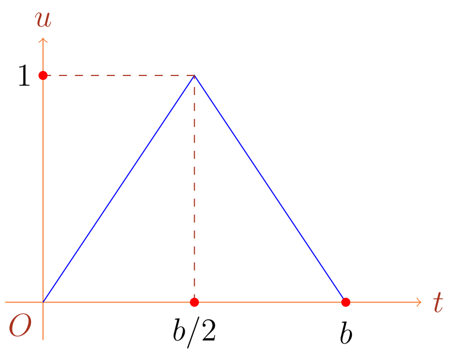
Второе слагаемое является изображением оригинала $\sin t$, а первое слагаемое представим следующим образом:

$$\frac{2p}{(p^2+1)^2} = -\frac{d}{dp}\left(\frac{1}{p^2+1}\right).$$

По теореме о дифференцировании изображения такая функция изображает оригинал $t\sin t$. Следовательно, решением заданного дифференциального уравнения будет

$$x(t) = t\sin t - \sin t = (t-1)\sin t.$$

Пример 3. *Операционным методом найти ток в RLC-контуре при входном напряжении вида (треугольный импульс)*



$$u(t) = \begin{cases} \dfrac{2t}{b}, & 0 < t < \dfrac{b}{2}; \\ -\dfrac{2t}{b} + 2, & \dfrac{b}{2} < t < b; \\ 0, & t \notin (0; b); \end{cases}$$

нулевых начальных условиях

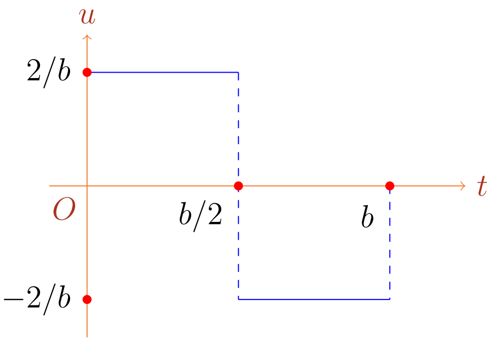
$$i\,(0) = i'\,(0) = 0$$

и выполнении неравенства $4L > CR^2$ *(случай свободных колебаний при постоянном входном напряжении).*

Решение. В лекции «Однородные ЛДУ высших порядков» было получено уравнение тока в RLC-контуре:

$$L\,\frac{d^2 i}{dt^2} + R\,\frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = \frac{du}{dt}, \tag{7}$$

где R — сопротивление, L — индуктивность, C — емкость, $u(t)$ — входное напряжение. Правая часть уравнения имеет вид



$$u'\,(t) = \begin{cases} \dfrac{2}{b}, & 0 < t < \dfrac{b}{2}; \\ -\dfrac{2}{b}, & \dfrac{b}{2} < t < b; \\ 0, & t \notin (0; b); \end{cases}$$

С помощью функции Хевисайда ее можно записать так:

$$\frac{du}{dt} = \frac{2}{b}\left\{\left[H\,(t) - H\left(t - \frac{b}{2}\right)\right] - \left[H\left(t - \frac{b}{2}\right) - H\,(t-b)\right]\right\} =$$
$$= \frac{2}{b}\left[H\,(t) - 2H\left(t - \frac{b}{2}\right) + H\,(t-b)\right].$$

Используя изображение функции Хевисайда, теоремы запаздывания и линейности, получаем

$$\frac{du}{dt} \longleftarrow \frac{2}{bp}\left(1 - 2e^{-bp/2} + e^{-bp}\right).$$

Обозначая $I\,(p) \rightarrowtail i\,(t)$ и применяя к уравнению (7) преобразование Лапласа, придем к операторному уравнению

$$Lp^2 I\,(p) + RpI\,(p) + \frac{I\,(p)}{C} = \frac{2}{bp}\left(1 - 2e^{-bp/2} + e^{-bp}\right),$$

из которого легко получить изображение неизвестной функции:

$$I\,(p) = \frac{2C}{b}\left(1 - 2e^{-bp/2} + e^{-bp}\right)\frac{1}{p\,(LCp^2 + RCp + 1)}. \tag{8}$$

Дискриминант квадратного трехчлена отрицателен по предположению:

$$D = R^2C^2 - 4LC = \left(R^2C - 4L\right)C < 0,$$

поэтому разложение последней в выражении (8) дроби в сумму простейших ДРФ выглядит так:

$$\frac{1}{p\,(LCp^2 + RCp + 1)} = \frac{A}{p}^{\backslash LCp^2+RCp+1} + \frac{ap+b}{LCp^2 + RCp + 1}^{\backslash p}$$

$$\begin{array}{c|r|l} p=0 & A=1 & A=1 \\ p^2 & LCA+a=0 & a=-LC \\ p & RCA+b=0 & b=-RC \end{array}$$

$$\frac{1}{p\left(LCp^2+RCp+1\right)}=\frac{1}{p}-\frac{LCp+RC}{LCp^2+RCp+1}=\frac{1}{p}-\frac{p+\frac{R}{L}}{p^2+\frac{R}{L}p+\frac{1}{LC}}.$$

Преобразуем вторую дробь к виду, подходящему для отыскания оригиналов:

$$\frac{p+\frac{R}{L}}{p^2+\frac{R}{L}p+\frac{1}{LC}}=\frac{p+\frac{R}{2L}+\frac{R}{2L}}{\left(p+\frac{R}{2L}\right)^2+\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{4L^2}}=$$

$$=\frac{p+\frac{R}{2L}}{\left(p+\frac{R}{2L}\right)^2+\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{4L^2}}+\frac{R}{2\beta L}\cdot\frac{\beta}{\left(p+\frac{R}{2L}\right)^2+\beta^2},$$

где $\beta=\sqrt{\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{4L^2}}$. Значит, последняя в выражении (8) дробь имеет следующий оригинал:

$$\frac{1}{p\left(LCp^2+RCp+1\right)}\rightarrowtail x(t)=H\left(t\right)-\left(\cos\beta t+\frac{R}{2\beta L}\sin\beta t\right)e^{-\frac{Rt}{2L}}.$$

Применяя теорему запаздывания, из формулы (8) получаем решение дифференциального уравнения:

$$i\left(t\right)=\frac{2C}{b}\left[x\left(t\right)-2x\left(t-b/2\right)H\left(t-b/2\right)+x\left(t-b\right)H\left(t-b\right)\right].$$

Поскольку экспонента в формуле для $x\left(t\right)$ при неограниченном увеличении параметра t стремится к нулю, то сама функция $x\left(t\right)$ стремится к 1, а ток $i\left(t\right)$ в этом случае неограниченно уменьшается.

Влияние параметра b на решение проанализировать несколько сложнее. Главную роль здесь играет быстрое уменьшение экспоненты e^{-2t}. Из-за этого уже при $t>2{,}5$ функция $x(t)$ отличается от 1 меньше, чем на 0,01. В результате при превышении параметром b этого значения и дальнейшем увеличении, график решения визуально все больше приближается к графику функции du/dt. При этом функция $x(t)$ формирует лишь подъем и спуск на «ступеньки», которые в соответствии с формулой решения оказываются в четыре раза меньшими «ступенек» du/dt. Рис. 1 проясняет сказанное с помощью анимации графика тока по параметру b. Для большей компактности рисунка высота «треугольника напряжения» уменьшена в три раза.

2 Использование интеграла Дюамеля

Применение интеграла Дюамеля к решению уравнения (1) основывается на следующих построениях.

Если в уравнении (1) произвести замену

$$x\left(t\right)=y\left(t\right)+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{t^k}{k!}x^{(k)}\left(0\right),\tag{9}$$

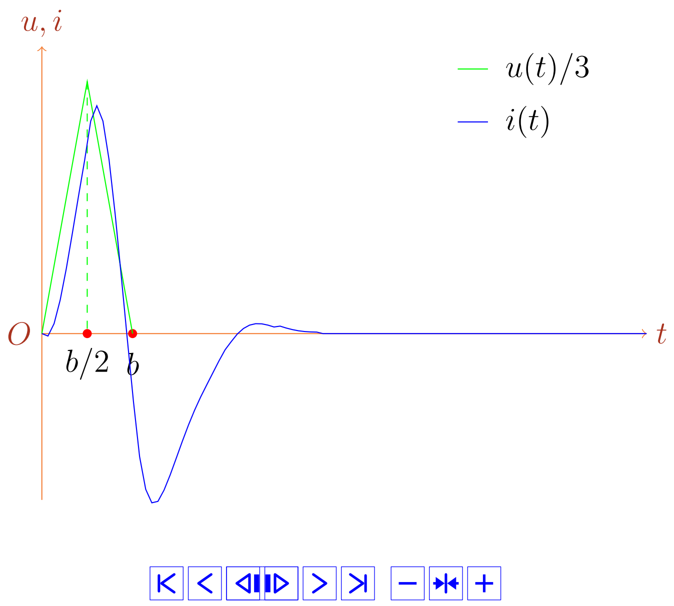


Рис. 1. Отклик на треугольный импульс.

то начальные условия станут нулевыми. Действительно, в этом случае

$$x^{(m)}(t) = y^{(m)}(t) + \sum_{k=m}^{n-1} \frac{t^{k-m}}{(k-m)!} x^{(k)}(0), \ m = \overline{0, n-1},$$

следовательно,

$$x^{(m)}(0) = y^{(m)}(0) + x^{(m)}(0),$$
$$y^{(m)}(0) = 0, \ m = \overline{0, n-1}.$$

После указанной замены уравнение (1) приобретет вид

$$b_0 y^{(n)}(t) + b_1 y^{(n-1)}(t) + \ldots + b_{n-1} y'(t) + b_n y(t) = g(t). \tag{10}$$

Рассмотрим еще одно, вспомогательное, уравнение, отличающееся от уравнения (10) правой частью, в которой вместо функции g стоит 1:

$$b_0 z^{(n)}(t) + b_1 z^{(n-1)}(t) + \ldots + b_{n-1} z'(t) + b_n z(t) = 1. \tag{11}$$

Начальные условия оставим нулевыми:

$$z^{(m)}(0) = 0, \ m = \overline{0, n-1}.$$

Обозначим $Z(p) \rightarrowtail z(t)$. Тогда в соответствии с формулой (6) и соотношением $1/p \rightarrowtail 1$ изображение решения этого уравнения выразится формулой

$$Z(p) = \frac{1/p}{\alpha(p)} = \frac{1}{p\,\alpha(p)}. \tag{12}$$

где $\alpha(p) = b_0p^n + b_1p^{n-1} + \ldots b_{n-1}p + b_n$. Если обозначить $Y(p) \rightarrowtail y(t)$, $G(p) \rightarrowtail g(t)$, то изображение решения уравнения (10) в соответствии с этой же формулой будет таким:

$$Y(p) = \frac{G(p)}{\alpha(p)}.$$

Следовательно,

$$Y(p) = pG(p)\,Z(p)\,.$$

Но по формуле Дюамеля

$$pG(p)\,Z(p) \rightarrowtail y(t) = g(t)\underbrace{z(0)}_{0} + \int\limits_0^t g(\tau)\,z'(t-\tau)\;d\tau = \int\limits_0^t g(\tau)\,z'(t-\tau)\;d\tau.$$

Если оригинал $y(t)$ найден, то к функции $x(t)$ можно вернуться по формуле (9).

Из вышеприведенных рассуждений складывается следующая схема применения интеграла Дюамеля.

1. Сделать замену (9).

2. Получить уравнения (10) и (11).

3. Найти изображение $Z(p)$ решения уравнения (11) по формуле (12), а по нему — само решение $z(t)$ и его производную $z'(t)$.

4. По формуле Дюамеля

$$y(t) = \int\limits_0^t g(\tau)\,z'(t-\tau)\;d\tau$$

найти решение уравнения (10).

5. Найти решение уравнения (1) по формуле (9).

Пример 4. *Решить уравнение*

$$x' + 2x = t,\; x(0) = 1,$$

используя интеграл Дюамеля.

Решение. Сделаем замену по формуле (9):

$$x(t) = y(t) + 1. \tag{13}$$

Заданное уравнение станет таким:

$$y'(t) + 2[y(t) + 1] = t,$$
$$y'(t) + 2y(t) = t - 2,\; y(0) = 0.$$

Значит, $g(t) = t - 2$. Решим операционным методом вспомогательное уравнение (11) вида

$$z'(t) + 2z(t) = 1,\; z(0) = 0.$$

По формуле (12) получаем

$$Z(p) = \frac{1/p}{p+2} = \frac{1}{p(p+2)} = \frac{1}{2}\cdot\frac{p+2-p}{p(p+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+2}\right).$$

Следовательно,

$$z(t) = \frac{1}{2}\left(1 - e^{-2t}\right),\ z'(t) = e^{-2t}.$$

Применение интеграла Дюамеля дает

$$y(t) = \int_0^t g(\tau)\, z'(t-\tau)\, d\tau = \int_0^t (\tau - 2)\, e^{-2(t-\tau)}\, d\tau = e^{-2t}\int_0^t (\tau-2)\, e^{2\tau}\, d\tau =$$
$$= \left\langle u = \tau - 2,\ dv = e^{2\tau}d\tau,\ du = d\tau,\ v = \frac{1}{2}e^{2\tau}\right\rangle =$$
$$= e^{-2t}\left[\frac{\tau-2}{2}e^{2\tau}\Big|_0^t - \frac{1}{2}\int_0^t e^{2\tau}\, d\tau\right] = e^{-2t}\left[\frac{t-2}{2}e^{2t} + 1 - \frac{1}{4}e^{2\tau}\Big|_0^t\right] =$$
$$= e^{-2t}\left[\frac{t-2}{2}e^{2t} + 1 - \frac{1}{4}\left(e^{2t} - 1\right)\right] = \frac{t-2}{2} + e^{-2t} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4}e^{-2t} =$$
$$= \frac{t}{2} - \frac{5}{4}\left(1 - e^{-2t}\right).$$

Возвращаясь к переменной $x(t)$ по формуле (13), находим решение заданного дифференциального уравнения:

$$x(t) = \frac{t}{2} - \frac{5}{4}\left(1 - e^{-2t}\right) + 1 = \frac{t}{2} - \frac{1}{4}\left(1 - 5e^{-2t}\right).$$

3 Решение систем дифференциальных уравнений

Применение операционного метода к решению систем дифференциальных уравнений практически ничем не отличается от случая одного уравнения. Особенности использования метода рассмотрим на примере решения системы из двух дифференциальных уравнений.

Пример 5. *Решить систему дифференциальных уравнений вида*

$$\begin{cases} x' + 4x - y = 0, \\ y' + 2x + y = 0, \end{cases}$$
$$x(0) = 2,\ y(0) = 3.$$

Решение. Введем изображения неизвестных функций $X(p) \rightarrowtail x(t)$, $Y(p) \rightarrowtail y(t)$. Тогда

$$x'(t) \leftarrow pX(p) - x(0) = pX(p) - 2,$$
$$y'(t) \leftarrow pY(p) - y(0) = pY(p) - 3.$$

Применив к каждому из уравнений системы преобразование Лапласа, получим систему алгебраических (операторных) уравнений вида

$$\begin{cases} pX(p) - 2 + 4X(p) - Y(p) = 0, \\ pY(p) - 3 + 2X(p) + Y(p) = 0, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} (p+4)\,X(p) - Y(p) = 2, \\ 2X(p) + (p+1)\,Y(p) = 3. \end{cases}$$

Найдем изображения неизвестных функций $X(p)$ и $Y(p)$, решив эту систему по правилу Крамера:

$$\Delta(p) = \begin{vmatrix} p+4 & -1 \\ 2 & p+1 \end{vmatrix} = p^2 + 5p + 6 = (p+2)(p+3),$$

$$\Delta_1(p) = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & p+1 \end{vmatrix} = 2p+5,\ \Delta_2(p) = \begin{vmatrix} p+4 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3p+8;$$

$$X(p) = \frac{2p+5}{(p+2)(p+3)} = \frac{(p+2)+(p+3)}{(p+2)(p+3)} = \frac{1}{p+2} + \frac{1}{p+3},$$

$$Y(p) = \frac{3p+8}{(p+2)(p+3)} = \frac{2(p+3)+(p+2)}{(p+2)(p+3)} = \frac{2}{p+2} + \frac{1}{p+3}.$$

Используя таблицы «изображение-оригинал», находим соответствующие найденным изображениям оригиналы, т.е. решение заданной системы уравнений:

$$x(t) = e^{-2t} + e^{-3t},$$
$$y(t) = 2e^{-2t} + e^{-3t}.$$

Пример 6 (Трансформатор). *Найти токи в электрической схеме, показанной на рис. 2 (M — коэффициент взаимоиндукции). Токи $i_1(t)$ и $i_2(t)$ задаются системой уравнений*

$$\begin{cases} L_1 \dfrac{di_1}{dt} + R_1 i_1 + M \dfrac{di_2}{dt} = u(t), \\ L_2 \dfrac{di_2}{dt} + R_2 i_2 + R i_2 + M \dfrac{di_1}{dt} = 0, \end{cases}$$

$i_1(0) = 0$, $i_2(0) = 0$, *а напряжение на входе равно* $u(t) = E\cos\omega t$.

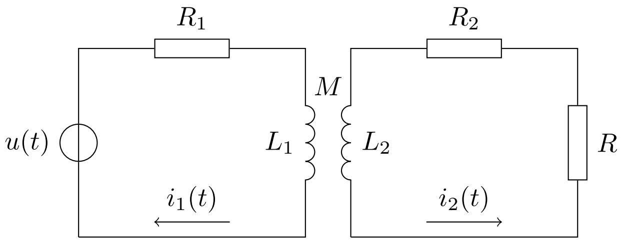


Рис. 2. Трансформатор.

Решение. Перейдем к изображениям:

$$i_1(t) \leftarrow I_1(p),\ i_1'(t) \leftarrow pI_1(p),\ i_2(t) \leftarrow I_2(p),\ i_2'(t) \leftarrow pI_2(p),$$
$$u(t) \leftarrow E\,\frac{p}{p^2+\omega^2}.$$

Применим преобразование Лапласа к каждому из уравнений системы:

$$\begin{cases} pL_1I_1(p) + R_1I_1(p) + pMI_2(p) = E\,\dfrac{p}{p^2+\omega^2}, \\ L_2pI_2 + (R_2+R)\,I_2(p) + pMI_1(p) = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(L_1 p + R_1\right) I_1(p) + M p I_2(p) = E\,\dfrac{p}{p^2+\omega^2}, \\ M p I_1(p) + \left(L_2 p + R_2 + R\right) I_2(p) = 0. \end{cases}$$

Решим полученную систему операторных уравнений по правилу Крамера:

$$\begin{aligned} \Delta(p) &= \begin{vmatrix} L_1 p + R_1 & M p \\ M p & L_2 p + R_2 + R \end{vmatrix} = \\ &= \left(L_1 L_2 - M^2\right) p^2 + \left(R_1 L_2 + L_1 R_2 + L_1 R\right) p + R_1 R_2 + R_1 R, \\ \Delta_1(p) &= \begin{vmatrix} E\,\frac{p}{p^2+\omega^2} & M p \\ 0 & L_2 p + R_2 + R \end{vmatrix} = E\,\frac{p\left(L_2 p + R_2 + R\right)}{p^2+\omega^2}, \\ \Delta_2(p) &= \begin{vmatrix} L_1 p + R_1 & E\,\frac{p}{p^2+\omega^2} \\ M p & 0 \end{vmatrix} = -E\,\frac{M p^2}{p^2+\omega^2}. \end{aligned}$$

Для идеального трансформатора, для которого $R_1 \approx 0$, $R_2 \approx 0$, $L_1 L_2 - M^2 \approx 0$, тогда

$$\Delta(p) = L_1 R p,\ \Delta_1(p) = E\,\frac{p\left(L_2 p + R\right)}{p^2+\omega^2},\ \Delta_2(p) = -E\,\frac{M p^2}{p^2+\omega^2}.$$

Найдем изображения неизвестных функций:

$$\begin{aligned} I_1(p) &= \frac{\Delta_1(p)}{\Delta(p)} = \frac{E}{L_1 R}\cdot\frac{L_2 p + R}{p^2+\omega^2} = \frac{E}{L_1 R}\left(L_2\,\frac{p}{p^2+\omega^2} + \frac{R}{\omega}\cdot\frac{\omega}{p^2+\omega^2}\right), \\ I_2(p) &= \frac{\Delta_2(p)}{\Delta(p)} = -\frac{E M}{L_1 R}\cdot\frac{p}{p^2+\omega^2}, \end{aligned}$$

а затем искомые оригиналы:

$$i_1(t) = \frac{E}{L_1 R}\left(L_2 \cos\omega t + \frac{R}{\omega}\sin\omega t\right), \tag{14}$$

$$i_2(t) = -\frac{E M}{L_1 R}\cos\omega t. \tag{15}$$

Так как $M \approx \sqrt{L_1 L_2}$, то

$$i_2(t) = -\frac{E\sqrt{L_1 L_2}}{L_1 R}\cos\omega t = -\frac{E}{R}\sqrt{\frac{L_2}{L_1}}\cos\omega t.$$

Амплитуда напряжения на резисторе R равна

$$u_R(t) = \left|i_2(t)\right| R = \sqrt{\frac{L_2}{L_1}}\,E.$$

Таким образом, это напряжение или больше, чем входное напряжение E, когда $L_2 > L_1$ (трансформатор повышает напряжение), или меньше него, когда $L_2 < L_1$ (трансформатор понижает напряжение). Величина L_2/L_1 называется *коэффициентом трансформации*. □

В Приложении[1)] показано применение системы *Mathematica* для решения дифференциальных уравнений и их систем операционным методом.

Приложение

[1)] Для того чтобы решить дифференциальное уравнение в системе *Mathematica* операционным методом, надо выполнить следующую последовательность действий. Для иллюстрации возьмем пример, рассмотренный на лекции.

Сначала выполним преобразование Лапласа правой части уравнения:

```
LaplaceTransform[D[x[t],t,4] - x''[t] == 1,t,p]
```

$$-p^2\,\mathrm{LaplaceTransform}[x[t],t,p] + p^4\,\mathrm{LaplaceTransform}[x[t],t,p] + p\,x[0] - p^3\,x[0] + x'[0] - p^2\,x'[0] - p\,x''[0] - x^{(3)}[0] == \frac{1}{p}$$

Затем найдем решение полученного операторного уравнения относительно изображения неизвестной функции:

```
Solve[%,LaplaceTransform[x[t],t,p]]
```

$$\left\{\left\{\mathrm{LaplaceTransform}[x[t],t,p] \to \frac{1}{p^3(-1+p^2)}(1 - p^2\,x[0] + p^4\,x[0] - p\,x'[0] + p^3\,x'[0] + p^2\,x''[0] + p\,x^{(3)}[0])\right\}\right\}$$

Далее обратим полученное изображение и найдем соответствующий ему оригинал, который и будет решением нашего дифференциального уравнения:

```
InverseLaplaceTransform[%,p,t]
```

$$\left\{\left\{x[t] \to -1 - \frac{t^2}{2} + x[0] - x''[0] + t(x'[0] - x^{(3)}[0]) + \frac{1}{2}e^{-t}(1 + x''[0] - x^{(3)}[0]) + \frac{1}{2}e^{t}(1 + x''[0] + x^{(3)}[0])\right\}\right\}$$

Отметим, что уравнение решено при произвольных начальных условиях, т.е. найдено его общее решение. Это сделано умышленно, чтобы показать и такую возможность, предоставляемую системой *Mathematica*. Учесть заданные начальные условия нетрудно, причем, это можно сделать как в начале вычислений, так и в конце. Сейчас мы сделаем второе:

```
sol1 = x[t] /. %[[1]] /. {x[0] → 0, x'[0] → 0, x''[0] → 0, x^(3)[0] → 0}
```

$$-1 + \frac{e^{-t}}{2} + \frac{e^{t}}{2} - \frac{t^2}{2}$$

Ответ получен тот же, что и на лекции. В дальнейшем будем подставлять начальные условия в самом начале решения, чтобы упростить получаемые выражения.

Решим и остальные примеры, рассмотренные на лекции, кроме случая системы уравнений:

```
LaplaceTransform[x''[t] + x[t] == 2 Cos[t],t,p] /. {x[0] → 0, x'[0] → -1}
Solve[%,LaplaceTransform[x[t],t,p]]
InverseLaplaceTransform[%,p,t]
```

$$1 + \mathrm{LaplaceTransform}[x[t],t,p] + p^2\,\mathrm{LaplaceTransform}[x[t],t,p] == \frac{2p}{1+p^2}$$

$$\left\{\left\{\mathrm{LaplaceTransform}[x[t],t,p] \to \frac{-1+2p-p^2}{(1+p^2)^2}\right\}\right\}$$

$$\left\{\left\{x[t] \to -\mathrm{Sin}[t] + t\,\mathrm{Sin}[t]\right\}\right\}$$

```
LaplaceTransform[x'[t] + 2 x[t] == t,t,p] /. x[0] → 1
```

```
Solve[%,LaplaceTransform[x[t],t,p]]
InverseLaplaceTransform[%,p,t]
```

$$-1 + 2\ \mathtt{LaplaceTransform[x[t],t,p]} + p\ \mathtt{LaplaceTransform[x[t],t,p]} == \frac{1}{p^2}$$

$$\left\{\left\{\mathtt{LaplaceTransform[x[t],t,p]} \to \frac{1+p^2}{p^2(2+p)}\right\}\right\}$$

$$\left\{\left\{\mathtt{x[t]} \to -\frac{1}{4} + \frac{5e^{-2t}}{4} + \frac{t}{2}\right\}\right\}$$

Решение систем дифференциальных уравнений требует незначительных модификаций. В качестве иллюстрации возьмем лекционный пример:

```
LaplaceTransform[{x'[t] + 4 x[t] - y[t] == 0,
    y'[t] + 2 x[t] + y[t] == 0},t,p] /. {x[0] → 2, y[0] → 3}
Solve[%,{LaplaceTransform[x[t],t,p],LaplaceTransform[y[t],t,p]}]
InverseLaplaceTransform[%,p,t]
{-2 + 4 LaplaceTransform[x[t],t,p] +
    p LaplaceTransform[x[t],t,p] - LaplaceTransform[y[t],t,p] == 0,
    -3 + 2 LaplaceTransform[x[t],t,p] + LaplaceTransform[y[t],t,p] +
    p LaplaceTransform[y[t],t,p] == 0}
```

$$\left\{\left\{\mathtt{LaplaceTransform[x[t],t,p]} \to -\frac{-5-2p}{6+5p+p^2},\right.\right.$$
$$\left.\left.\mathtt{LaplaceTransform[y[t],t,p]} \to -\frac{-8-3p}{6+5p+p^2}\right\}\right\}$$

$$\{\{\mathtt{x[t]} \to e^{-3t}(1+e^t),\ \mathtt{y[t]} \to e^{-3t}(1+2e^t)\}\}$$

Задачу о трансформаторе мы несколько усложним, считая, как и раньше, что $R_1 = R_2 = 0$, но откажемся от ограничения $L_1L_2 - M^2 = 0$:

```
LT = LaplaceTransform[{L1 i1'[t] + R1 i1[t] + M i2'[t] == E Cos[ωt],
    L2 i2'[t] + R2 i2[t] + R i2[t] + M i1'[t] == 0},t,p]
```

$$\left\{\mathtt{R1\ LaplaceTransform[i1[t],t,p] + L1(-i1[0] + p\ LaplaceTransform[i1[t],t,p])}\right.$$
$$\mathtt{+\ M(-i2[0] + p\ LaplaceTransform[i2[t],t,p])} == \frac{p\,E}{p^2+\omega^2},$$
$$\mathtt{M(-i1[0] + p\ LaplaceTransform[i1[t],t,p]) + R\ LaplaceTransform[i2[t],t,p] +}$$
$$\mathtt{R2\ LaplaceTransform[i2[t],t,p] + L2(-i2[0] +}$$
$$\left.\mathtt{p\ LaplaceTransform[i2[t],t,p]) == 0}\right\}$$

```
sol = Solve[LT,{LaplaceTransform[i1[t],t,p],LaplaceTransform[i2[t],t,p]}]
    /. {i1[0] → 0, i2[0] → 0, R1 → 0, R2 → 0}
```

$$\left\{\left\{\mathtt{LaplaceTransform[i1[t],t,p]} \to -\frac{p(L2\ p+R)E}{(M^2p^2 - L1\ p(L2\ p+R))(p^2+\omega^2)},\right.\right.$$
$$\left.\left.\mathtt{LaplaceTransform[i2[t],t,p]} \to \frac{M\ p^2 E}{(-L1\,L2\,p^2 + M^2p^2 - L1\,p\,R)(p^2+\omega^2)}\right\}\right\}$$

```
dec = InverseLaplaceTransform[sol,p,t]
FullSimplify[i1[t] /. dec[[1]]]
FullSimplify[i2[t] /. dec[[1]]]
```

$$\frac{\mathtt{E}\left(-\mathtt{e}^{-\frac{\mathtt{L1\,R\,t}}{\mathtt{L1\,L2}-\mathtt{M}^2}}\mathtt{M}^2\,\mathtt{R}\,\omega+\mathtt{M}^2\,\mathtt{R}\,\omega\mathtt{Cos}[\mathtt{t}\omega]+(\mathtt{L1\,R}^2+\mathtt{L2}(\mathtt{L1\,L2}-\mathtt{M}^2)\,\omega^2)\mathtt{Sin}[\mathtt{t}\omega]\right)}{\mathtt{L1}^2\,\mathtt{R}^2\omega+(-\mathtt{L1\,L2}+\mathtt{M}^2)^2\,\omega^3}$$

$$\frac{\mathtt{M\,E}\left(\mathtt{e}^{-\frac{\mathtt{L1\,R\,t}}{\mathtt{L1\,L2}-\mathtt{M}^2}}\mathtt{L1\,R}-\mathtt{L1\,R\,Cos}[\mathtt{t}\omega]+(-\mathtt{L1\,L2}+\mathtt{M}^2)\,\omega\,\mathtt{Sin}[\mathtt{t}\omega]\right)}{\mathtt{L1}^2\,\mathtt{R}^2+(-\mathtt{L1\,L2}+\mathtt{M}^2)^2\,\omega^2}$$

Обозначим $\hat{i}_1$ и $\hat{i}_2$ токи для случая $L_1L_2 - M^2 = 0$, тогда результат, полученный системой *Mathematica* можно переписать в следующем более компактном виде:

$$\hat{i}_1(t) = \frac{E}{\omega K}\left[M^2R\omega\left(\cos\omega t - e^{-\frac{L_1R}{m}t}\right) + (L_1R^2 + mL_2\omega^2)\sin\omega t\right],$$
$$\hat{i}_2(t) = \frac{ME}{K}\left[L_1R\left(e^{-\frac{L_1R}{m}t} - \cos\omega t\right) - m\omega\sin\omega t\right],$$

где $m = L_1L_2 - M^2$, $K = L_1^2R^2 - m^2\omega^2$. Нетрудно видеть, что при $m \to 0+0$ токи $\hat{i}_1$ и $\hat{i}_2$ превращаются в, соответственно, токи i_1 и i_2 из равенств (14), (15). Это превращение демонстрирует анимационный рис. 3.

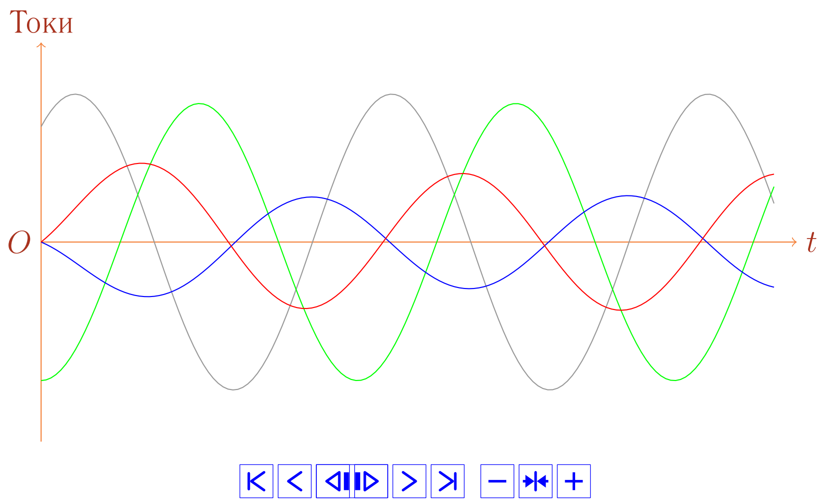


Рис. 3. Токи в трансформаторе: $\bullet - i_1$, $\bullet - i_2$, $\bullet - \hat{i}_1$, $\bullet - \hat{i}_2$.

Поскольку правая часть дифференциального уравнения в системах автоматизации фактически представляет собой сигнал, поступающий в систему, а этот сигнал часто является кусочно-непрерывной функцией, посмотрим, как *Mathematica* справляется с такими дифференциальными уравнениями.

Пусть требуется решить линейное уравнение второго порядка

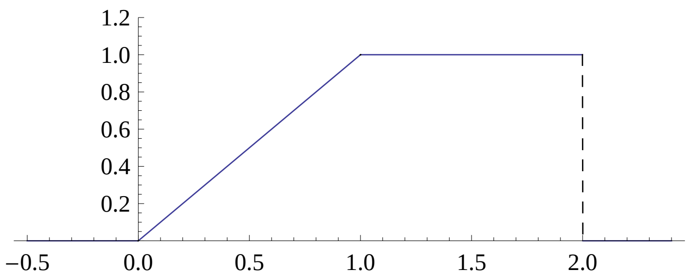
$$x'' + 9x = f(t),\ x(0) = 1,\ x'(0) = 0, \tag{П1}$$

где функция $f(t)$ имеет вид

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \vee t > 2; \\ t, & 0 < t < 1; \\ 1, & 1 < t < 2. \end{cases}$$

Зададим эту функцию в системе *Mathematica* и построим ее график:

```
f[t_] := Piecewise[{{0, t < 0 || t > 2}, {t, 0 < t < 1}, {1, 1 < t < 2}}]
Plot[f[t], {t,-0.5,2.4}, PlotRange → {0,1.2}, ExclusionsStyle → Dashed,
    AspectRatio → 1/3]
```



Теперь решим уравнение (П1) в системе *Mathematica*:

```
LaplaceTransform[x''[t] + 9 x[t] == f[t],t,p] /. {x[0] → 1, x'[0] → 0}
Solve[%,LaplaceTransform[x[t],t,p]]
sol = InverseLaplaceTransform[%,p,t] /. HTtoH
```

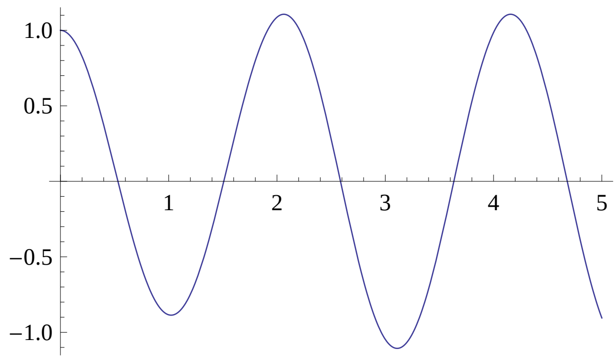
$$-p + 9\,\mathrm{LaplaceTransform}[x[t],t,p] + p^2\,\mathrm{LaplaceTransform}[x[t],t,p] == \frac{e^{-2p}(-e^{p}+e^{2p}-p)}{p^2}$$

$$\left\{\left\{\mathrm{LaplaceTransform}[x[t],t,p] \to \frac{e^{-2p}(-e^{p}+e^{2p}-p+e^{2p}p^3)}{p^2\,(9+p^2)}\right\}\right\}$$

$$\left\{\left\{x[t] \to \frac{1}{27}\,(3\ t + 27\ \mathrm{Cos}[3\ t] + 3\ (-1 + \mathrm{Cos}[3\ (-2 + t)])\ H[-2 + t] + H[-1 + t]\ (3 - 3\ t + \mathrm{Sin}[3\ (-1 + t)]) - \mathrm{Sin}[3\ t])\right\}\right\}$$

Уравнение решено, но можно еще построить график решения:

```
Plot[x[t] /. sol[[1]] /. HtoHT, {t,0,5}]
```

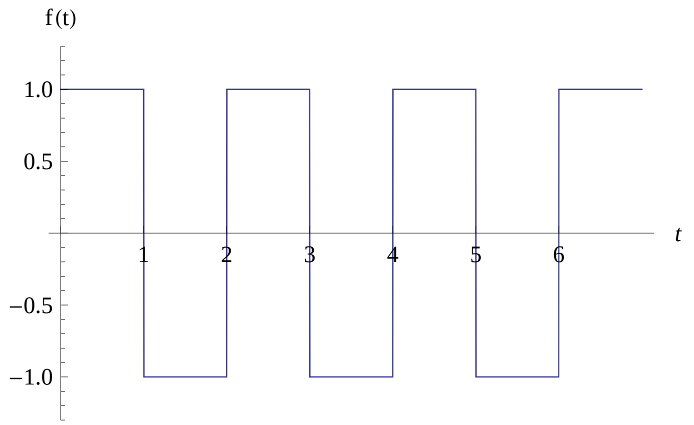


Решение дифференциальных уравнений с периодической правой частью представляет определенный интерес не только в связи с приложениями, но из-за того, что, как мы видели на прошлой лекции, *Mathematica* не в состоянии найти периодический оригинал по его изображению. Однако, было также показано, что некий косвенный путь все же позволяет отыскать такой оригинал. Попробуем применить тот же подход для решения указанного дифференциального уравнения.

В качестве примера рассмотрим уравнение

$$x' + x = f(t),\ x(0) = 2,$$

где правая часть $f(t)$ имеет вид



Всю последовательность прямоугольных импульсов можно определить как бесконечную сумму:

$$f(t)=\sum_{k=0}^{\infty}(\texttt{UnitBoxC}[t,2k,2k+1,1]-\texttt{UnitBoxC}[t,2k+1,2k+2,1]).$$

Сначала найдем преобразование Лапласа общего члена этого ряда:

```
Simplify[ LaplaceTransform[ UnitBoxC[t, 2 k , 2 k + 1, 1]
    - UnitBoxC[t, 2 k + 1, 2 k + 2, 1],t,p, Assumptions → k > 0]]
```

$$\frac{\mathrm{e}^{-2(1+\mathrm{k})\,\mathrm{p}}\,(-1+\mathrm{e}^{\mathrm{p}})^2}{\mathrm{p}}$$

Следовательно, вся правая часть уравнения после преобразования будет иметь вид:

$$F(p)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(e^p-1)^2\,e^{-2(k+1)p}}{p}.$$

Теперь преобразуем левую часть уравнения:

```
LTDU = LaplaceTransform[x'[t] + x[t],t,p] /. x[0] → 2
-2 + LaplaceTransform[x[t],t,p] + p LaplaceTransform[x[t],t,p]
```

Приравняем друг другу изображения левой и правой части уравнения и найдем из этого равенства изображение неизвестной функции:

$$\texttt{Solve}\left[\texttt{LTDU == HoldForm}\left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-2(1+\mathrm{k})\,\mathrm{p}}\,(-1+\mathrm{e}^{\mathrm{p}})^2}{\mathrm{p}}\right],\ \texttt{LaplaceTransform[x[t],t,p]}\right]$$

$$\left\{\left\{\texttt{LaplaceTransform[x[t],t,p]}\ \to\ \frac{2+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-2(1+\mathrm{k})\,\mathrm{p}}\,(-1+\mathrm{e}^{\mathrm{p}})^2}{\mathrm{p}}}{1+\mathrm{p}}\right\}\right\}$$

Здесь пришлось заключить ряд в скобки оператора `HoldForm`, который сохраняет выражение неизменным, не допуская над ним никаких преобразований. Дело в том, что сумму такого ряда *Mathematica* легко найдет и получит функцию, от которой найти обратное преобразование Лапласа не сможет (см. материал лекции «Теоремы операционного исчисления»). Перепишем $X(p)$ — изображение неизвестной функции — в виде суммы двух слагаемых:

$$X(p)=\frac{2}{1+p}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{e^{-2(1+k)p}\,(-1+e^p)^2}{p(1+p)}$$

и найдем оригинал для первого из них и оригинал общего члена ряда для второго:

```
sol1 = InverseLaplaceTransform[2/(1 + p), p, t]
sol2 = InverseLaplaceTransform[(e^(-2(1+k)p) (-1 + e^p)^2)/(p(1 + p)), p, t] /. HTtoH
```

$2\,e^{-t}$

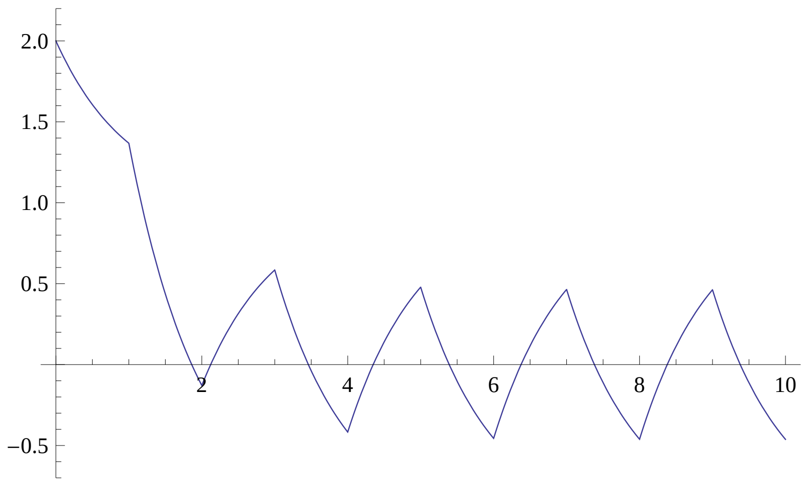
$e^{-t}\left(\left(-e^{2+2k}+e^{t}\right)H[-2-2k+t]-2\left(-e^{1+2k}+e^{t}\right)H[-1-2k+t]-\left(e^{2k}-e^{t}\right)H[-2k+t]\right)$

Таким образом, искомое решение имеет вид

$$x(t) = 2e^{-t} + \sum_{k=0}^{\infty}\left[\left(1-e^{2k+2-t}\right)H(-2k-2+t) - 2\left(1-e^{2k+1-t}\right)H(-2k-1+t) + \right.$$
$$\left. + \left(1-e^{2k-t}\right)H(-2k+t)\right].$$

Построим его график:

```
Plot[sol1 + Sum[sol2, {k,0,10}] /. HtoHT, {t,0,10}, PlotRange → {-0.7,2.2}]
```



Рассмотрим более сложный пример, позаимствованный из [3]. Требуется решить дифференциальное уравнение

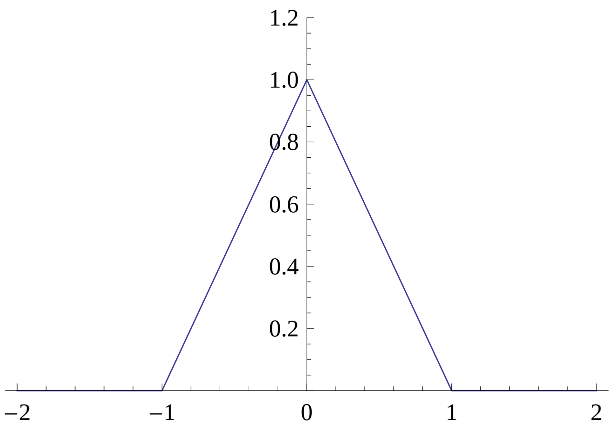
$$x'' + 4x = f(t),\ x(0) = x'(0) = 0,$$

с правой частью вида

$$f(t) = f(t+2\pi) = \begin{cases} t - 2k\pi, & 2k\pi < t < (2k+1)\pi; \\ -t + 2(k+1)\pi, & (2k+1)\pi < t < 2(k+1)\pi; \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Чтобы задать правую часть уравнения, представляющую собой так называемую «пилообразную» функцию, в системе *Mathematica*, используем оператор `UnitTriangle`. График этой функции имеет вид равнобедренного треугольника высоты 1, основанием которого служит отрезок $[-1;1]$ на оси абсцисс:

```
Plot[UnitTriangle[x], {x,-2,2}, PlotRange → {0,1.2}]
```

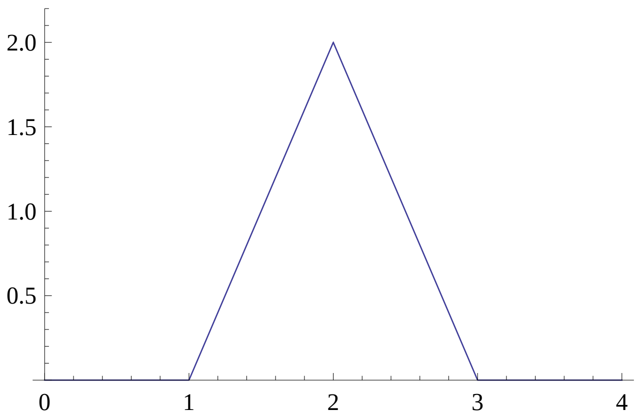


Чтобы иметь возможность изменять размеры такого треугольника, введем свой оператор:

```
UnitTriangleC[a_,b_,h_,x_] := h UnitTriangle[(2 x − ( a + b))/(b − a)]
```

Зададим с его помощью, например, треугольник высоты 2, имеющий основанием отрезок $[1;3]$ на оси абсцисс:

```
Plot[UnitTriangleC[1,3,2,x],{x,0,4},PlotRange → {0,2.2}]
```



Теперь можно задать и функцию $f(t)$:

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \texttt{UnitTriangleC}[2\pi k, 2\pi(k+1), \pi, t]$$

и построить ее график (рис. 4):

```
f[t_] := Sum[UnitTriangleC[2π k, 2π(k + 1), π, t], {k, 0, 5}]
Plot[f[t], {t, 0, 8π}, PlotRange → {0, π + 0.5},
    Ticks → {{{0, 0}, {2π, 2π}, {4π, 4π}, {6π, 6π}, {8π, 8π}}, {π, π}},
    AxesLabel → {t, "f(t)"}]
```

Выполним преобразование Лапласа общего члена ряда:

```
Simplify[LaplaceTransform[UnitTriangleC[t,2πk,2π(k + 1),π,t],t,p,
    Assumptions → k > 0]]
```

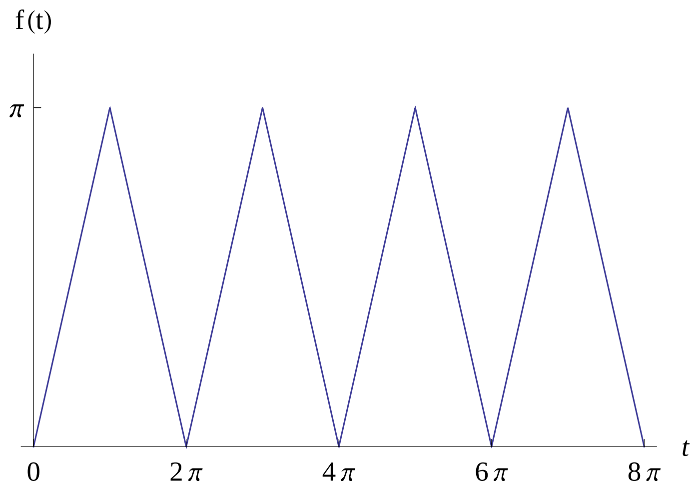


Рис. 4.

$$\frac{e^{-2(1+k)p\pi}(-1+e^{p\pi})^2}{p^2}$$

Таким образом, правая часть уравнения после преобразования имеет вид

$$F(p) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(e^{p\pi}-1)^2 e^{-2(k+1)p\pi}}{p^2}.$$

Преобразуем левую часть уравнения:

```
LTDU = LaplaceTransform[x''[t] + 4x[t],t,p] /. {x[0] → 0, x'[0] → 0}
```

$4\ \mathtt{LaplaceTransform[x[t],t,p]} + p^2\ \mathtt{LaplaceTransform[x[t],t,p]}$

Найдем изображение неизвестной функции:

$$\mathtt{Solve}\left[\mathtt{LTDU} == \mathtt{HoldForm}\left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-2(1+k)p\pi}(-1+e^{p\pi})^2}{p^2}\right], \mathtt{LaplaceTransform[x[t],t,p]}\right]$$

$$\left\{\left\{\mathtt{LaplaceTransform[x[t],t,p]} \to \frac{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-2(1+k)p\pi}(-1+e^{p\pi})^2}{p^2}}{4+p^2}\right\}\right\}$$

Найдем оригинал общего члена ряда:

$$\mathtt{sol = InverseLaplaceTransform}\left[\frac{e^{-2(1+k)p\pi}(-1+e^{p\pi})^2}{p^2(4+p^2)}, p, t\right] \ /.\ \mathtt{HTtoH}$$

$$\frac{1}{8}(2H[\pi - 2(1+k)\pi + t](2\pi + 4k\pi - 2t - \mathrm{Sin}[4k\pi - 2t]) +$$
$$H[-2k\pi + t](-4k\pi + 2t + \mathrm{Sin}[4k\pi - 2t]) +$$
$$H[-2(k+1)\pi + t](-4(k+1)\pi + 2t + \mathrm{Sin}[4k\pi - 2t]))$$

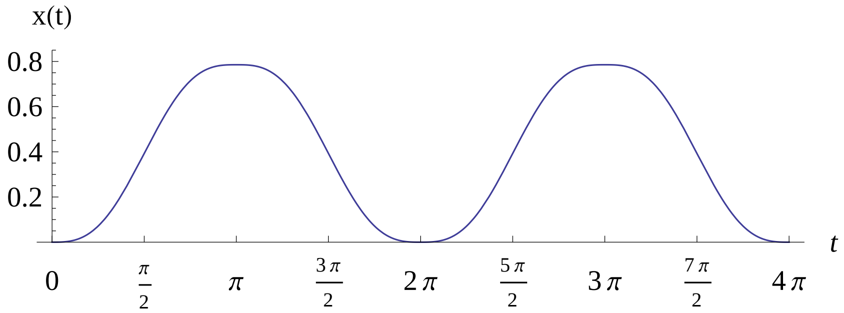
Следовательно, искомый оригинал-решение имеет вид

$$x(t) = \frac{1}{8}\sum_{k-0}^{\infty}(2H[\pi - 2(1+k)\pi + t](2\pi + 4k\pi - 2t - \mathrm{Sin}[4k\pi - 2t]) +$$
$$+ H[-2k\pi + t](-4k\pi + 2t + \mathrm{Sin}[4k\pi - 2t]) +$$

$$+H[-2(1+k)\pi+t](-4(1+k)\pi+2t+\mathrm{Sin}[4k\pi-2t]))\,.$$

Построим график решения, ограничившись несколькими членами ряда:

$$\texttt{Plot}\Big[\sum_{k=0}^{10}\texttt{sol /. HtoHT, \{t,0,4}\pi\texttt{\}, PlotRange} \to \texttt{\{0,0.85\},}$$
$$\texttt{AspectRatio} \to \texttt{1/4, AxesLabel} \to \texttt{\{t,"x(t)"\},}$$
$$\texttt{Ticks} \to \texttt{\{\{0,}\pi\texttt{/2,}\pi\texttt{,3}\pi\texttt{/2,2}\pi\texttt{,5}\pi\texttt{/2,3}\pi\texttt{,7}\pi\texttt{/2,4}\pi\texttt{\}\}}\Big]$$



Результат вполне согласуется с полученным в [3].

Литература

[1] Бугров Я.С., Никольский С.М. *Высшая математика. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного.* – М.: Наука, 1985, – с. 447-452.

[2] Письменный Д.Т. *Конспект лекций по высшей математике.* – М.: Рольф, 2000. Ч. 2. – с. 247-250.

[3] Мартыненко В.С. *Операционное исчисление.* – Киев: Выща школа, 1990, – с. 204-235.