Частные производные

Волченко Ю.М.

Содержание лекции

Классификация точек и множеств в $\mathbb{R}^n$. Понятие окрестности. Предел и непрерывность функции нескольких аргументов. Теоремы о непрерывных функциях. Частные производные. Теорема о неявной функции.

Тест-анимация для проверки умения брать частные производные.
Анимация работает только в программе Acrobat Reader!

Вычисление пределов функций нескольких переменных в системе *Mathematica*, вычисление частных производных.

8 июня 2013 г.

Изучив дифференциальное исчисление функций одного аргумента и убедившись в его эффективности при решении задач на монотонность функции, ее выпуклость, на наличие экстремумов и т. д., познакомимся теперь с дифференциальным исчислением функций нескольких аргументов и его возможностями для решения аналогичных задач. Естественно, необходимо повторить начальный материал по функциям нескольких переменных[†].

1 Классификация точек и множеств

Как вы помните, изложение теории функций одного аргумента начиналось с определения интервалов, полуинтервалов, отрезков и окрестностей, расположенных на числовой оси, на которой размещалась и область определения функции. Но в случае функции даже двух переменных ее область определения располагается уже не на оси, а на плоскости. А на плоскости естественно считать окрестностью точки уже не интервал, а нечто, со всех сторон окружающее точку. Поэтому окрестностью точки на плоскости будем считать окружность

[†] Лекция «Функция II».

с центром в этой точке. А что у нас будет интервалом или отрезком? Об этом чуть позже, а сейчас запишем определение окрестности в пространстве $\mathbb{R}^n$.

Окрестностью точки $M_0\left(x_1^0, \ldots, x_n^0\right) \in \mathbb{R}^n$ радиуса R называется множество

$$U\left(M_0, R\right) \triangleq \left\{M : \rho\left(M, M_0\right) < R\right\},$$

где $\rho\left(M, M_0\right) = \sqrt{\left(x_1 - x_1^0\right)^2 + \ldots + \left(x_n - x_n^0\right)^2}$ — расстояние между точками M_0 и $M\left(x_1, \ldots, x_n\right)$. Что это за множество? Оно определяется неравенством

$$\rho\left(M, M_0\right) < R \Longleftrightarrow \left(x_1 - x_1^0\right)^2 + \ldots + \left(x_n - x_n^0\right)^2 < R^2,$$

которое означает, что все точки этого множества находятся от точки M_0 на расстоянии, меньшем R. Значит, на плоскости это — внутренность окружности, в пространстве — внутренность трехмерной сферы, в пространстве $\mathbb{R}^n$ — внутренность n-мерной сферы, которая определяется уравнением

$$\left(x_1 - x_1^0\right)^2 + \ldots + \left(x_n - x_n^0\right)^2 = R^2,$$

в котором R — радиус сферы, $M_0\left(x_1^0, \ldots, x_n^0\right)$ — ее центр. Кстати, для прямой это определение тоже годится и в качестве окрестности дает интервал.

Как и в случае числовой прямой, добавим к пространству $\mathbb{R}^n$ еще одну точку, бесконечность, и такое пространство будем обозначать $\overline{\mathbb{R}}^n \triangleq \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ и называть ***расширенным n-мерным пространством***.

Окрестностью бесконечности радиуса R назовем внешнюю часть n-мерной сферы с центром в начале координат:

$$U\left(\infty, R\right) \triangleq \left\{M : \rho(0, M) > R\right\}.$$

Будем писать $U\left(M_0\right)$ или $U\left(\infty\right)$, если нас не будет интересовать конкретное значение радиуса окрестности.

Точка называется ***внутренней*** точкой множества, если она содержится в нем вместе с некоторой своей окрестностью.

Граничной точкой множества называется точка, каждая окрестность которой содержит как точки, принадлежащие множеству, так и точки, ему не принадлежащие.

Предельной точкой множества называется точка, в каждый окрестности которой содержатся точки множества, отличные от нее.

Точка называется ***внешней*** по отношению к множеству, если она не содержится в нем вместе с некоторой своей окрестностью.

На рис. 1 показаны введенные типы точек.

Множество называется ***открытым***, если каждая его точка — внутренняя.

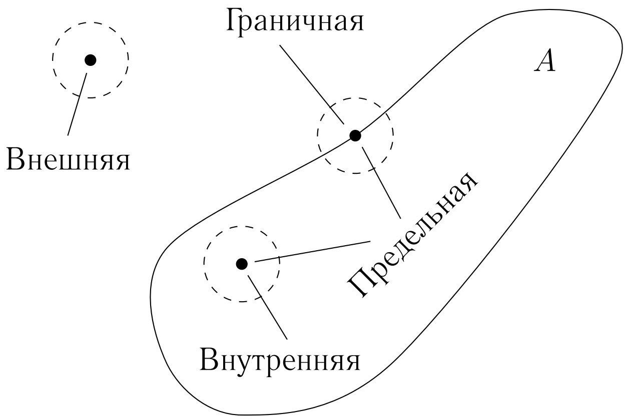


Рис. 1. Классификация точек множества A.

Множество называется ***замкнутым***, если оно содержит все свои предельные точки.

Окрестность является открытым множеством. Та же окрестность вместе с ограничивающей ее границей уже будет замкнутым множеством. Множества $\varnothing$ и $\mathbb{R}^n$ одновременно открыты и замкнуты.

Множество называется ***ограниченным***, если оно содержится в некоторой окрестности какой-либо своей точки (рис. 2, а)).

Чтобы говорить о связности множества, нам понадобится понятие непрерывной кривой в пространстве $\mathbb{R}^n$.

Непрерывной кривой L в пространстве $\mathbb{R}^n$ назовем множество точек этого пространства, координаты которых представляют собой непрерывные функции параметра t:

$$L = \{(x_1, \ldots, x_n) : x_1 = \varphi_1(t), \ldots, x_n = \varphi_n(t), \ \alpha \le t \le \beta\}. \qquad (1)$$

Будем говорить, что точки $P(x_1, \ldots, x_n), Q(y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ ***можно соединить непрерывной кривой***, если существует непрерывная кривая L, определяемая формулой (1), такая, что

$$x_i = \varphi_i(\alpha), \ y_i = \varphi_i(\beta), \ i = \overline{1, n}.$$

Множество называется ***связным***, если любые две его точки можно соединить непрерывной кривой, целиком лежащей в этом множестве (рис. 2, б), в)).

Открытое связное множество является аналогом интервала, замкнутое связное — аналогом отрезка.

Открытое связное множество называется ***областью***.

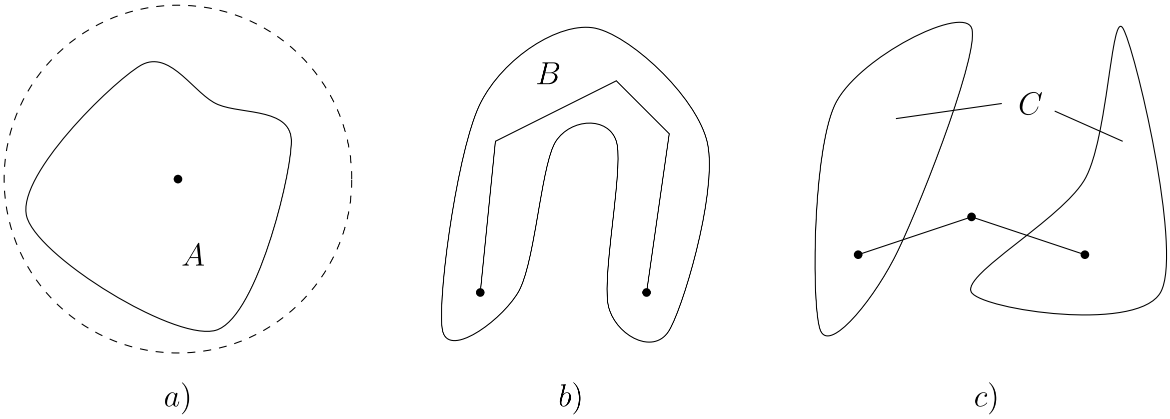


Рис. 2. Множества: а) A – ограниченное, б) B – связное, в) C – несвязное.

2 Предел и непрерывность

Теперь, когда мы имеем в n-мерном пространстве аналоги окрестностей, отрезков и интервалов, можно ввести понятие предела и непрерывности для функций нескольких переменных. Следует обратить внимание, что по форме новое определение почти ничем не отличаться от уже известного.

Величина $A \in \overline{\mathbb{R}}^n$ называется ***пределом*** функции $y = f(P)$, $P \in \mathbb{R}^n$, при $P \to P_0 \in \overline{\mathbb{R}}^n$, если

$$\forall(\varepsilon > 0)\, \exists(\delta > 0) \forall (P \neq P_0) \;\; P \in U(P_0, \delta) \Longrightarrow f(P) \in U(A, \varepsilon).$$

Короче это записывают так:

$$\lim_{P \to P_0} f(P) = A.$$

Если предел существует, он не зависит от способа стремления P к P_0.

Пример 1. *Имеет ли функция*

$$f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

предел при $P(x, y) \to O(0, 0)$?

Решение. Пусть P стремится к O по лучу $y = kx$. Тогда

$$\lim_{P \to O} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \lim_{P \to O} \frac{x^2 - k^2x^2}{x^2 + k^2x^2} = \frac{1 - k^2}{1 + k^2}.$$

Значение предела зависит от k и, следовательно, он не существует. □

Функция $y = f(P)$ называется ***непрерывной в точке*** $P_0 \in \mathbb{R}^n$, если

$$\lim_{P \to P_0} f(P) = f(P_0). \tag{2}$$

Таким образом, функция разрывна в одном из трех следующих случаев.

1. Значение $f(P_0)$ не существует.
2. Предел $\lim_{P\to P_0} f(P)$ не существует или бесконечен.
3. Значение $f(P_0)$ существует, предел $\lim_{P\to P_0} f(P)$ существует и конечен, но равенство (2) не выполняется.

Точки разрыва могут быть изолированными, образовывать линии разрыва, поверхности разрыва и т. п.

Пример 2. *Найти множество точек разрыва функции*

$$u = \frac{1}{z - x^2 - y^2} + \frac{1}{(x-2)^2 + y^2} + \frac{1}{(x-2)^2 + (y+1)^2 + z^2}.$$

Решение. Показано на рис 3.

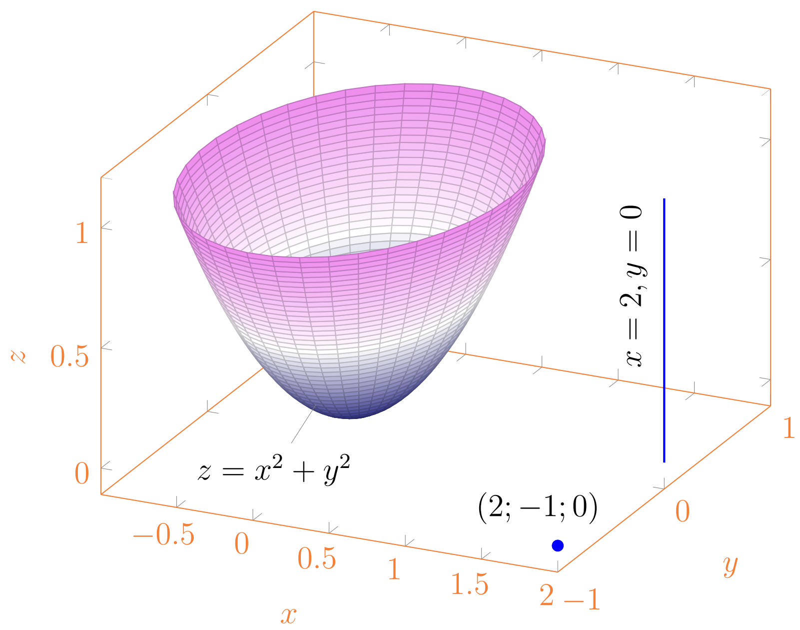


Рис. 3. Множество точек разрыва.

Теорема 1. *Сумма, разность и произведение непрерывных функций являются непрерывными функциями, частное от деления двух непрерывных функций есть непрерывная функция во всех точках, в которых делитель не обращается в ноль.*

Пусть функция $f(P)$, $P \in \mathbb{R}^n$, определена в области $D \subset \mathbb{R}^n$, причем, все координаты точек P этой области являются функциями переменной точки $M \in \mathbb{R}^m$, принадлежащей области $G \subset \mathbb{R}^m$, так что

$$\forall (M \in G)\ P = P(M) \in D.$$

Такая функция $f(P(M))$ называется ***сложной*** функцией переменной M, или ***суперпозицией***. Для нее справедлива

Теорема 2. *Если функция $f(P)$ непрерывна в точке $P_0 \in D$, каждая координата которой непрерывна в точке $M_0 \in G$, то сложная функция $f(P(M))$ непрерывна в точке $M_0 \in G$.*

Функция нескольких переменных называется ***элементарной***, если она получена из этих переменных и констант с помощью конечного числа арифметических действий и конечного числа суперпозиций элементарных функций одного аргумента.

Теоремы о непрерывных в точке функциях позволяют считать справедливым следующее утверждение.

Теорема 3. *Элементарная функция нескольких переменных непрерывна во всех точках, в которых она определена.*

Поэтому, например, многочлены любого числа аргументов непрерывны, так как непрерывны арифметические операции над непрерывными функциями. По этой же причине и в силу непрерывности экспоненты непрерывна сложная функция $e^{x^2+y^2}$. Функция из примера 2 разрывна в тех точках, в которых ее знаменатели обращаются в 0.

Функция называется ***непрерывной на множестве*** D, если она непрерывна в каждой точке этого множества.

Теорема 4. *Функция, непрерывная на ограниченном замкнутом множестве, принимает на нем свое наибольшее и наименьшее значения. Если это множество связно, то такая функция принимает также все промежуточные значения; в частности, если она на этом множестве принимает значения противоположных знаков, то в нем найдется точка, в которой функция обращается в ноль.*

3 Частные производные

Полным приращением функции $y = f(x_1, \dots, x_n)$ называется величина

$$\Delta y = f(x_1 + \Delta x_1, \dots, x_n + \Delta x_n) - f(x_1, \dots, x_n),$$

где Δx_i приращение i-го аргумента.

Частным приращением функции $y = f(x_1, \dots, x_n)$ по переменной x_i называется величина

$$\Delta_{x_i} y = f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + \Delta x_i, x_{i+1}, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_n).$$

Так, например, для функции $z = f(x, y)$ полное приращение составляет $\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$, а частные приращения по x и y равны, соответственно, $\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y)$ и $\Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x, y)$.

Частной производной функции $z = f(x, y)$ в точке $M(x, y)$ по аргументу x называется предел отношения ее частного приращения по x к приращению этого аргумента, когда последнее стремится к нулю:

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x} \triangleq \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x},}$$

если такой предел существует.

Подобным же образом определяется частная производная этой функции в точке M по аргументу y:

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial y} \triangleq \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y},}$$

если предел существует.

Частные производные обозначаются еще и так:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial x} = f'_x = z'_x, \ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial y} = f'_y = z'_y.$$

Частная производная функции по x, как это следует из ее определения, описывает поведение функции вдоль оси Ox при заданном значении y, например, ее монотонность вдоль этой оси. Частная производная функции по y описывает ее поведение вдоль оси Oy при заданном значении x.

На рис. 4 показана *геометрическая интерпретация частных производных*. На поверхности $z = f(x, y)$ взята точка $M(x, y)$, через которую проведены два сечения, параллельные плоскостям xOz и yOz. В сечении получены кривые и к ним проведены касательные AM и BM. Рассуждая так же, как при геометрической интерпретации производной функции одного аргумента (проводя через точку M секущую к кривой и т. д.), придем к выводу, что *частная производная по x — это угловой коэффициент касательной AM*: $\frac{\partial f}{\partial x} = \operatorname{tg} \alpha$, а *частная производная по y — это угловой коэффициент касательной BM*: $\frac{\partial f}{\partial y} = \operatorname{tg} \beta$.

При определения частной производной $\partial f / \partial x$ рассматривается изменение лишь аргумента x, а аргумент y остается неизменным. Отсюда получаем

Правило. *Когда берется производная $\partial f / \partial x$, все величины, зависящее только от y, временно считаются постоянными*. Поэтому, например,

$$\frac{\partial \left[\alpha(x) \beta(y) + \gamma(y)\right]}{\partial x} = \alpha'(x) \beta(y).$$

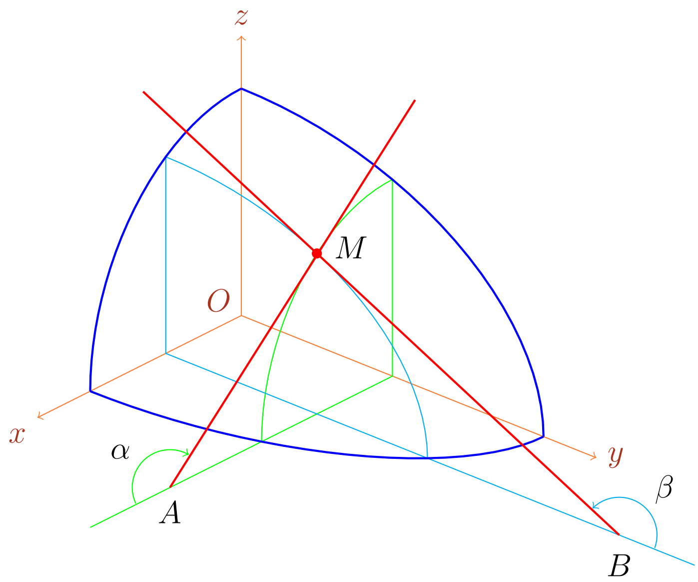


Рис. 4. Геометрический смысл частных производных.

Такое же рассуждение справедливо относительно производной $\partial f/\partial y$.

Пример 3. *Найти частные производные функции*

$$f(x,y)=x+\frac{y}{x}.$$

Решение. Находим:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=1-\frac{y}{x^2},\ \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{1}{x}.$$

Пример 4. *Показать, что функции напряжения*

$$u(x,t)=\sqrt{\frac{L}{C}}e^{-\frac{R}{L}t}\frac{\varphi(x-at)-\varphi(x+at)}{2}$$

и тока

$$i(x,t)=e^{-\frac{R}{L}t}\frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2}$$

удовлетворяют так называемым уравнениям длинной линии

$$\frac{\partial u}{\partial x}+Ri+L\frac{\partial i}{\partial t}=0, \tag{3}$$

$$\frac{\partial i}{\partial x}+\frac{RC}{L}u+C\frac{\partial u}{\partial t}=0. \tag{4}$$

Здесь R, C, L, $a=1/\sqrt{LC}$ — константы, $\varphi(x)$ — некоторая дифференцируемая функция.

Решение. Найдем частные производные напряжения и тока:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\sqrt{\frac{L}{C}}e^{-\frac{R}{L}t}\frac{\varphi'(x-at)-\varphi'(x+at)}{2},\ \frac{\partial i}{\partial x}=e^{-\frac{R}{L}t}\frac{\varphi'(x-at)+\varphi'(x+at)}{2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\sqrt{\frac{L}{C}}\,\frac{R}{L}\,e^{-\frac{R}{L}t}\,\frac{\varphi(x-at)-\varphi(x+at)}{2} - a\sqrt{\frac{L}{C}}\,e^{-\frac{R}{L}t}\,\frac{\varphi'(x-at)+\varphi'(x+at)}{2},$$
$$\frac{\partial i}{\partial t} = -\,e^{-\frac{R}{L}t}\,\frac{R}{L}\,\frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2} - ae^{-\frac{R}{L}t}\,\frac{\varphi'(x-at)-\varphi'(x+at)}{2}.$$

Подставим эти выражения вместо производных в уравнение (3):

$$\cancel{\sqrt{\frac{L}{C}}\,e^{-\frac{R}{L}t}\,\frac{\varphi'(x-at)-\varphi'(x+at)}{2}} + \cancel{Re^{-\frac{R}{L}t}\,\frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2}} -$$
$$-\cancel{Le^{-\frac{R}{L}t}\,\frac{R}{L}\,\frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2}} - \cancel{L\,\frac{1}{\sqrt{LC}}\,e^{-\frac{R}{L}t}\,\frac{\varphi'(x-at)-\varphi'(x+at)}{2}} \equiv 0,$$

Подстановка в уравнение (4) тоже дает тождество:

$$\cancel{e^{-\frac{R}{L}t}\,\frac{\varphi'(x-at)+\varphi'(x+at)}{2}} + \cancel{\frac{RC}{L}\sqrt{\frac{L}{C}}\,e^{-\frac{R}{L}t}\,\frac{\varphi(x-at)-\varphi(x+at)}{2}} -$$
$$-\cancel{C\sqrt{\frac{L}{C}}\,\frac{R}{L}e^{-\frac{R}{L}t}\,\frac{\varphi(x-at)-\varphi(x+at)}{2}} - \cancel{C\,\frac{1}{\sqrt{LC}}\sqrt{\frac{L}{C}}\,e^{-\frac{R}{L}t}\,\frac{\varphi'(x-at)+\varphi'(x+at)}{2}} \equiv 0.$$

$\square$

Свои умения в вычислении частных производных вы можете проверить с помощью теста.

Что должно стоять в правой части формулы вместо знака вопроса?
Щелкнув мышкой, проверьте ответ.
Щелкните мышкой второй раз и получите новый вопрос. И т.д.

$$z = xy^2 + x^3y - 2x + 1$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = ?, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = ?$$

Тест на умение брать частные производные.

Частные производные функции числа переменных, большего двух, определяются аналогичным образом. Именно, ***частной производной*** функции $y = f(x_1, \ldots, x_n)$ в точке $M(x_1, \ldots, x_n)$ по переменной x_i называется предел отношения ее частного приращения по x_i к приращению этого аргумента, когда последнее стремится к нулю (если такой предел существует):

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} \triangleq \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{\Delta_{x_i} y}{\Delta x_i} =$$

$$= \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i + \Delta x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n) - f(x_1, \ldots, x_n)}{\Delta x_i}.$$

4 Неявные функции

На основе аппарата частных производных может быть решен вопрос о представлении неявной функции в явной форме. Рассмотрим уравнение

$$F(x, y) = 0.$$

Пусть $A_x \neq \varnothing$ – множество решений такого уравнения для заданного x. Соответствие $f : x \to A_x$, или $f(x) = A_x$ называется ***неявной функцией***. В общем случае эта функция многозначна. Например, уравнение $x^2 + y^2 = 1$ определяет двузначную функцию $y = \pm\sqrt{1 - x^2}$.

Теорема 5 (о неявной функции). *Пусть функция $F(x, y)$ определена в окрестности точки (x_0, y_0), причем, $F(x_0, y_0) = 0$. Пусть производные F'_x и F'_y существуют и непрерывны в этой окрестности и $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$. Тогда существует окрестность точки x_0, в которой определена единственная однозначная непрерывная функция $y = f(x)$, удовлетворяющая соотношениям*

$$y_0 = f(x_0), \; F(x, f(x)) \equiv 0, \; y'(x) = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}. \tag{5}$$

Пример 5. *Для неявной функции*

$$x^2 + y^2 - 1 = 0$$

в окрестности точки $\left(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}\right)$ найти явную функцию $y = f(x)$.

Решение. Левая часть уравнения имеет вид $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ и для нее в окрестности заданной точки выполнены условия теоремы о неявной функции: $F\left(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}\right) = 0$, $F'_y\left(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}\right) = 2y|_{1/\sqrt{2}} = 2/\sqrt{2} \neq 0$. Поэтому существует единственная однозначная непрерывная функция

$$y = \sqrt{1 - x^2},$$

удовлетворяющая условиям (5):

$$y' = -\frac{2x}{2\sqrt{1 - x^2}} = -\frac{x}{y} = -\frac{F'_x}{F'_y}.$$

Точки $(-1; 0)$ и $(1; 0)$ не удовлетворяют условиям теоремы, так как $F'_y\big|_{(-1;0)} = F'_y\big|_{(1;0)} = 2y|_{y=0} = 0$. В окрестности этих точек однозначных функций не существует. □

В Приложении[1)] можно познакомиться с возможностями применения системы *Mathematica* для вычисления пределов и частных производных функций нескольких переменных.

Приложение

[1]) Мы уже знаем, что *Mathematica* умеет вычислять пределы функции одного аргумента и поэтому вправе ожидать, что пределы функций нескольких переменных она тоже в состоянии находить. Однако ожидания не оправдываются — *Mathematica* не умеет этого делать! И, конечно, вовсе не оттого, что ее создатели поленились снабдить ее этой возможностью. Просто предел функции нескольких переменных обычно находят на языке «ε-δ», а ЭВМ на этом языке доказывать не умеет!

Что же она все-таки умеет? Она умеет вычислять повторные пределы. Что это такое, рассмотрим на примере функции двух переменных $z = f(x, y)$. Предел, определенный на лекции, запишем в виде

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y)$$

и назовем *двойным пределом*. Если даже он существует, то вовсе не обязательно совпадает с одним из *повторных пределов*:

$$\lim_{y \to y_0} \lim_{x \to x_0} f(x, y), \ \lim_{x \to x_0} \lim_{y \to y_0} f(x, y).$$

В первом повторном пределе сначала вычисляется предел по x, а затем предел по y, во втором вычисление пределов происходит в обратном порядке.

Как связаны между собой все эти пределы? Справедлива теорема

Теорема П1. *Если существует двойной предел и при любом y существует простой предел*

$$\lim_{x \to x_0} f(x, y), \tag{П1}$$

то существует и повторный предел

$$\lim_{y \to y_0} \lim_{x \to x_0} f(x, y) \tag{П2}$$

и равен двойному.

Следствие П1. *Если существует двойной предел и при любом y существует простой предел*

$$\lim_{x \to x_0} f(x, y),$$

а при любом x существует простой предел

$$\lim_{y \to y_0} f(x, y),$$

то существуют оба повторных предела, которые равны двойному.

Следствие П2. *Если повторный предел* (П2) *не существует, то либо не существует простой предел* (П1)*, либо не существует двойной предел.*

Следствие П3. *Если хотя бы один из повторных пределов не существует или оба они существуют, но не равны друг другу, то либо не существует хотя бы один из простых пределов, либо не существует двойной предел.*

Из этих утверждений видно, что существование повторных и простых пределов не гарантирует существование двойного предела. А вычислять-то мы уже умеем именно повторные и простые пределы! Поэтому с помощью приведенных утверждений можно только доказать, что двойной предел не существует. Видимо, с этой целью *Mathematica* и умеет вычислять повторные пределы.

Разберем несколько примеров. Пусть требуется найти двойной предел

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}. \tag{П3}$$

Найдем соответствующие повторные пределы:

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = -\lim_{y\to 0}\frac{y^2}{y^2} = -1, \tag{П4}$$

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2} = 1. \tag{П5}$$

Повторные пределы существуют, но не равны друг другу; простые пределы существуют, так как мы их нашли, вычисляя повторные пределы; значит, в силу следствия П3 двойной предел (П3) не существует.

Могла ли нам помочь в решении этого вопроса *Mathematica*? Конечно, она ведь умеет вычислять повторные пределы:

$$\mathtt{Limit}\left[\frac{\mathtt{x}^2-\mathtt{y}^2}{\mathtt{x}^2+\mathtt{y}^2}\ /.\ \mathtt{x}\to 0, \mathtt{y}\to 0\right]$$

$$-1$$

$$\mathtt{Limit}\left[\frac{\mathtt{x}^2-\mathtt{y}^2}{\mathtt{x}^2+\mathtt{y}^2}\ /.\ \mathtt{y}\to 0, \mathtt{x}\to 0\right]$$

$$1$$

Обратите внимание на то, что переменные x и y при вычислении пределов переставлены по сравнению с формулами (П4) и (П5). *Mathematica* может вычислить и предел, рассмотренный при решении примера 1:

$$\mathtt{Limit}\left[\frac{\mathtt{x}^2-\mathtt{y}^2}{\mathtt{x}^2+\mathtt{y}^2}\ /.\ \mathtt{y}\to \mathtt{k\,x}, \mathtt{x}\to 0\right]$$

$$\frac{1-\mathtt{k}^2}{1+\mathtt{k}^2}$$

Рассмотренный пример приводит к важному выводу: *перестановка переменных x и y при вычислении повторных пределов может привести к различным результатам вычислений.*

В следующем примере попытаемся найти предел

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} x\sin\frac{1}{y}.$$

Простой предел

$$\lim_{y\to 0} x\sin\frac{1}{y} = x\lim_{y\to 0}\sin\frac{1}{y}$$

не существует, поэтому не существует и повторный предел

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} x\sin\frac{1}{y}.$$

Следствие П2 (надо только переставить местами x и y), поскольку простой предел не существует, в этой ситуации ничего не может сказать о существовании двойного предела. Но существование последнего легко доказать на основании определения предела:

$$\forall(\varepsilon > 0)\exists(\delta = \varepsilon > 0)\forall(P(x,y) \neq O(0,0))$$
$$\sqrt{x^2+y^2} < \varepsilon \Longrightarrow \left| x \sin\frac{1}{y} \right| \le |x| \le \sqrt{x^2+y^2} < \varepsilon.$$

Мы видим, что и повторный, и простой пределы не существуют, но двойной предел все же существует.

В последнем примере на эту тему, наоборот, повторные пределы (а, значит, и простые) существуют, конечны и равны между собой, а двойной предел все же не существует. Речь идет о пределе

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{xy}{x^2+y^2}.$$

Повторные и простые пределы существуют:

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}\frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}\frac{xy}{x^2+y^2} = 0.$$

Чтобы доказать, что двойной предел не существует, сделаем при его вычислении две различные замены:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{xy}{x^2+y^2} = \langle x = 1/\alpha,\ y = 1/\alpha\rangle = \lim_{\alpha\to\infty}\frac{\frac{1}{\alpha^2}}{\frac{2}{\alpha^2}} = \frac{1}{2},$$
$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{xy}{x^2+y^2} = \langle x = 2/\alpha,\ y = 1/\alpha\rangle = \lim_{\alpha\to\infty}\frac{\frac{2}{\alpha^2}}{\frac{5}{\alpha^2}} = \frac{2}{5}.$$

Два разных значения одного и того же двойного предела свидетельствуют о том, что этот предел не существует.

С частными производными дело обстоит намного лучше — *Mathematica* их вычисляет так же легко, как и обычные производные[†]. Если использовать оператор `D`, это будет выглядеть так:

$\partial_{\mathtt{x}}(\mathtt{x}^2\mathtt{y}^3 + 2\mathtt{x} - 5\mathtt{y} + 1)$

$2 + 2\mathtt{x}\mathtt{y}^3$

$\partial_{\mathtt{y}}(\mathtt{x}^2\mathtt{y}^3 + 2\mathtt{x} - 5\mathtt{y} + 1)$

$-5 + 3\mathtt{x}^2\mathtt{y}^2$

Оператор `Derivative` больше подходит для функции, заданной пользователем, только теперь его уже нельзя обозначать штрихом, а требуется указывать в форме

$$\mathtt{Derivative[n_1,\ldots,n_k][f][arg_1,\ldots,arg_k]},$$

где $\mathtt{n_i}$ равно 1, если по аргументу $\mathtt{arg_i}$ берется производная, а остальные $\mathtt{n_j}$, $\mathtt{j} \neq \mathtt{i}$, должны быть нулями.

Продифференцируем с его помощью функцию $z = \cos x \sin y^2$:

```
f[x_,y_]:=Cos[x] Sin[y^2]
Derivative[1,0][f][x,y]
```

[†]Лекция «Производная».

```
Derivative[0,1][f][x,y]
```

$-\mathtt{Sin}[x]\,\mathtt{Sin}[y^2]$

$2y\,\mathtt{Cos}[x]\,\mathtt{Cos}[y^2]$

Оператор хорош тем, что при необходимости может вычислить и значение производной:

$\mathtt{Derivative[1,0][f]}[\pi/6, \sqrt{\pi/2}]$

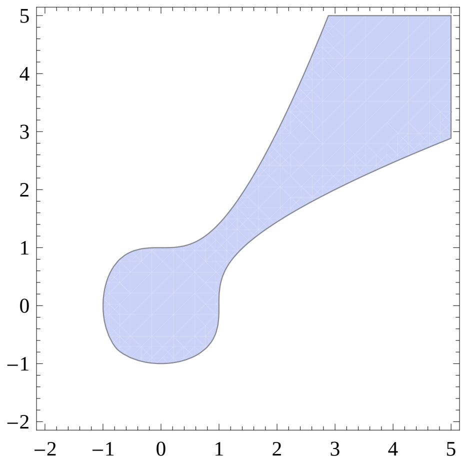
$-\frac{1}{2}$

С помощью системы *Mathematica* определяют области непрерывности и множества точек разрыва функций нескольких переменных. Для функций двух и трех переменных удается получить наглядное графическое решение.

Найдем, например, графическое изображение области непрерывности функции

$$z = \frac{1}{\sqrt{y^3+1-x^2}\sqrt{x^3+1-y^2}}:$$

$\mathtt{RegionPlot}[y^3+1-x^2>0\ \&\&\ x^3+1-y^2>0, \{x,-2,5\},\{y,-2,5\}]$



Множество точек разрыва функции

$$z = \frac{1}{(x+2y-1)\ln(y-x^2)}:$$

сначала отыщем с помощью оператора `Reduce`:

$\mathtt{Reduce}[(x+2y-1)\mathrm{Log}[y-x^2]==0\ ||\ y<x^2, \{x,y\}, \mathtt{Reals}]$

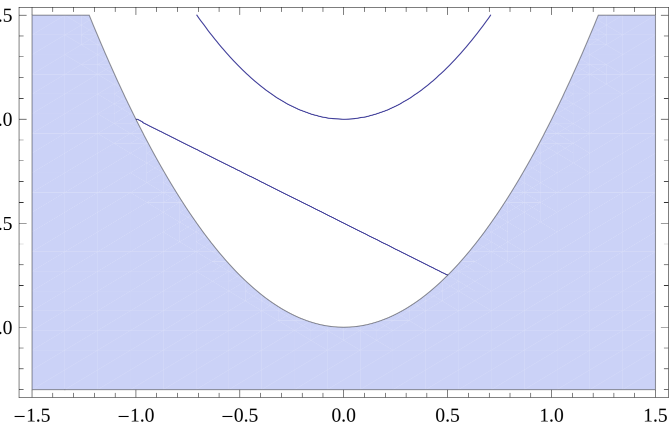
$y==1+x^2\ ||\ \left(-1<x<\frac{1}{2}\right)\ \&\&\ y==\frac{1-x}{2}\ ||\ y<x^2$

Мы видим, что искомое множество образует не только плоскую фигуру, но также включает в себя отрезок прямой и часть параболы. Однако точки, прямые и кривые оператор `RegionPlot` строить не умеет. Поэтому объединим его с оператором `ContourPlot`, чтобы получить требуемое множество в полном объеме:

$\mathtt{plot1} = \mathtt{ContourPlot}[(x+2y-1)\mathrm{Log}[y-x^2]==0, \{x,-1.5,1.5\},\{y,-0.3,1.5\}];$

$\mathtt{plot2} = \mathtt{RegionPlot}[y<x^2, \{x,-1.5,1.5\},\{y,-0.3,1.5\}];$

$\mathtt{Show[plot1,plot2,AspectRatio} \to \mathtt{Automatic]}$

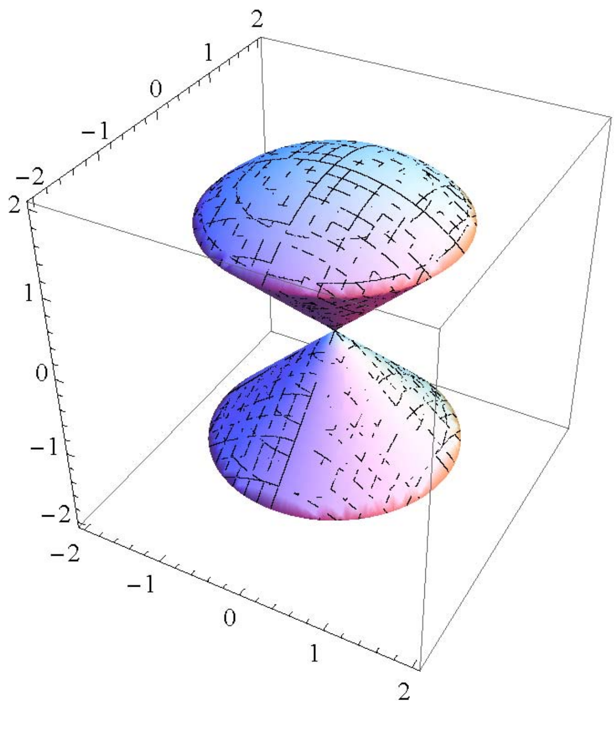


Построим трехмерную область непрерывности функции

$$z = \frac{1}{\sqrt{z^2 - x^2 - y^2}\sqrt{4 - x^2 - y^2 - z^2}},$$

которая представляет собой внутренность конуса, ограниченного сферой:

```
RegionPlot3D[x^2 + y^2 < z^2 && x^2 + y^2 + z^2 < 4,{x,−2,2},{y,−2,2},{z,−2,2},
    PlotPoints → 35]
```



Несложно выполнить в системе *Mathematica* рисунок, подобный рис. 4. В качестве функции двух переменных возьмем функцию

$$f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - \frac{y^2}{16}},\ 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 4,$$

графиком которой является часть эллипсоида, заключенного в первом октанте декартовой системы координат. Выберем точку (x_0, y_0) на его поверхности и выполним сечения эллипсоида плоскостями $x = x_0$ и $y = y_0$. Составим уравнения касательных к эллипсоиду в выбранной точке:

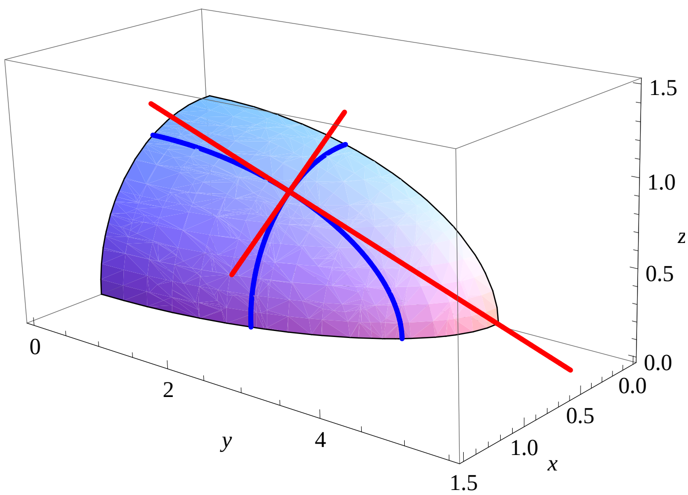
$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}(x - x_0),\ y = y_0;$$
$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}(y - y_0),\ x = x_0.$$

На языке системы *Mathematica* это будет выглядеть так:

```
f[x_,y_] := Sqrt[1 - x^2 - y^2/16]
x0 = 1/2; y0 = 2;
zx[x_] := f[x0, y0] + Derivative[1,0][f][x0,y0](x - x0);
zy[y_] := f[x0, y0] + Derivative[0,1][f][x0,y0](y - y0);
```

Построим график:

```
plot1 = ContourPlot3D[x^2 + y^2/16 + z^2 == 1,{x,0,1.5},{y,0,5.5},{z,0,1.5},
    AxesLabel -> {x,y,z}, Mesh -> None];
plot2 = ParametricPlot3D[{Sqrt[1 - y0^2/16] Cos[t]],y0, Sqrt[1 - y0^2/16] Sin[t]},{t,0,π/2},
    PlotStyle -> {Thick,Blue}];
plot3 = ParametricPlot3D[{x0,4 Sqrt[1 - x0^2] Cos[t], Sqrt[1 - x0^2] Sin[t]},{t,0,π/2},
    PlotStyle -> {Thick,Blue}];
plot4 = ParametricPlot3D[{x,y0,zx[x]},{x,0,1},PlotStyle -> {Thick,Red}];
plot5 = ParametricPlot3D[{x0,y,zy[y]},{y,0,5.5},PlotStyle -> {Thick,Red}];
Show[plot1,plot2,plot3,plot4,plot5, ImageSize -> {270,270},
    BoxRatios -> {1,2,1}]
```



Были использованы опции `ImageSize`, которая устанавливает размер рисунка в пикселях, и `BoxRatios`, определяющая пропорции геометрического объекта вдоль координатных осей.

Изменяя значения координат `x0` и `y0`, можно получать геометрическое представление частных производных рассматриваемой функции в различных точках ее графика.

Литература

[1] Бугров Я.С., Никольский С.М. *Высшая математика. Дифференциальное и интегральное исчисление*. – М.: Наука, 1984, – с. 290-303.

[2] Письменный Д.Т. *Конспект лекций по высшей математике*. – М.: Рольф, 2000. Ч. 1. – с. 260–263.