# Потенциальность и соленоидальность

Волченко Ю.М.

**Содержание лекции**

Условия независимости линейного интеграла от формы пути интегрирования. Потенциальное поле и потенциальная функция, ее вычисление. Соленоидальное поле и векторный потенциал. Свойства соленоидального поля. Гармоническое поле. Оператор и уравнение Лапласа. Гармоническая функция. Операции первого и второго порядка, их свойства. Электромагнитное поле как совокупность двух взаимодействующих полей.

3 сентября 2015 г.

Некоторые векторные поля играют особую роль в векторном анализе и его приложениях. Они называются потенциальными и соленоидальными. Например, электростатическое поле потенциально, а магнитостатическое соленоидально. Произвольное электромагнитное поле является суммой этих полей. И вообще любое векторное поле получается сложением потенциального и соленоидального полей.

Изучение новых понятий начнем с потенциального поля и тех условий, которые делают его таковым.

## 1 Условия независимости линейного интеграла от формы пути интегрирования

Говорят, что в векторном поле $\mathbf{F} = F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} + F_3\,\mathbf{k}$ линейный интеграл

$$\int\limits_{\mathcal{L}} \mathbf{F}\, d\mathbf{r}$$

в области $G$ ***не зависит от формы пути интегрирования***, если для любых двух точек $A, B \in G$ и любых двух кривых $\mathcal{L} = \mathcal{AB}$ и $\Gamma = \mathcal{AB}$ из этой области выполняется

$$\int\limits_{\mathcal{L}} \mathbf{F}\, d\mathbf{r} = \int\limits_{\Gamma} \mathbf{F}\, d\mathbf{r}. \tag{1}$$

**Теорема 1.** *Для того чтобы линейный интеграл векторного поля* $\mathbf{F}$ *в области* $G$ *не зависел от формы пути интегрирования, необходимо и достаточно выполнения одного из двух условий: 1) циркуляция векторного поля по любому замкнутому контуру, лежащему в* $G$*, равна нулю; 2) подынтегральное выражение является полным дифференциалом некоторой функции* $u\,(x, y, z)$*:*

$$\mathbf{F}\, d\mathbf{r} = du. \tag{2}$$

Доказательство приведено в Приложении[1)].

**Замечание 1.** *Функция* $u(x, , y, z)$ *из* (2)*, если она существует, называется* ***потенциальной функцией*** *или* ***потенциалом*** *векторного поля.*

**Теорема 2.** *Если для поля* $\mathbf{F}$ *потенциальная функция существует и имеет непрерывные вторые частные производные, то* $\operatorname{rot}\mathbf{F} = \mathbf{0}$.

*Доказательство.* Из условия теоремы следует, что

$$\frac{\partial u}{\partial x} = F_1,\ \frac{\partial u}{\partial y} = F_2,\ \frac{\partial u}{\partial z} = F_3, \tag{3}$$

поэтому

$$\operatorname{rot}\mathbf{F} = \operatorname{rot}\operatorname{grad} u = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} & \dfrac{\partial u}{\partial z} \end{vmatrix} = \tag{4}$$

$$= \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}\right)\mathbf{i} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)\mathbf{k} \equiv \mathbf{0}.$$

**Теорема 3.** *Если область* $G$ *связна, а векторное поле* $\mathbf{F}$ *в этой области имеет непрерывно дифференцируемые компоненты и* $\operatorname{rot}\mathbf{F} = \mathbf{0}$*, то в области* $G$ *существует потенциальная функция.*

*Доказательство.* По теореме Стокса и условию теоремы в области $G$

$$\text{Ц} = \int\limits_{\mathcal{L}} \mathbf{F}\, d\mathbf{r} = \iint\limits_{\sigma} \operatorname{rot}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\, d\sigma \equiv 0,$$

то есть выполнено условие 1) теоремы 1.

## 2 Потенциальное поле

Векторное поле $\mathbf{F}$ называется ***потенциальным***, если оно является градиентом некоторого скалярного поля $u$:

$$\mathbf{F} = \operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x}\,\mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\,\mathbf{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\,\mathbf{k}.$$

В этом случае $\mathbf{F}\,d\mathbf{r} = du$ и поэтому $u$ – потенциальная функция.

Необходимым и достаточным условием потенциальности векторного поля, имеющего дважды дифференцируемые непрерывные компоненты в связной области, является равенство в этой области нулю ротора поля:

$$\operatorname{rot}\mathbf{F} \equiv \mathbf{0}.$$

Действительно, если $\mathbf{F} = \operatorname{grad} u$, то $\operatorname{rot}\mathbf{F} = \operatorname{rot}\operatorname{grad} u$ вычисляется по формуле (4), что приводит к тождеству $\operatorname{rot}\mathbf{F} \equiv \mathbf{0}$. Наоборот, если $\operatorname{rot}\mathbf{F} \equiv \mathbf{0}$, то по доказанным теоремам найдется потенциальная функция $u$, для которой выполнятся равенства (3), означающие, что $\mathbf{F} = \operatorname{grad} u$.

Согласно теореме 1 в области непрерывности потенциала линейный интеграл векторного поля не зависит от формы пути интегрирования, а циркуляция по любому замкнутому контуру равна нулю.

Независимость линейного интеграла от формы пути интегрирования обеспечивает для фиксированной точки $M_0(x, y, z)$ и переменной точки $M(x, y, z)$ выполнение равенства

$$\int\limits_{\mathcal{M}_0\mathcal{M}} \mathbf{F}\,d\mathbf{r} = u\,(M) - u\,(M_0)\,. \tag{5}$$

Поэтому потенциал в точке $M$ относительно точки $M_0$ вычисляют по формуле

$$u\,(M) = \int\limits_{\mathcal{M}_0\mathcal{M}} \mathbf{F}\,d\mathbf{r} + u\,(M_0) = \int\limits_{\mathcal{M}_0\mathcal{M}} \mathbf{F}\,d\mathbf{r} + C,$$

$C = u\,(M_0)$. Для упрощения вычислений в качестве кривой $\mathcal{M}_0\mathcal{M}$ выбирают ломаную, показанную на рис. 1. В этом случае

$$u\,(M) = \int\limits_{\mathcal{M}_0\mathcal{M}} \mathbf{F}\,d\mathbf{r} + C =$$

$$= \int\limits_{\mathcal{M}_0\mathcal{M}_1} F_1\,(x, y, z)\;dx + \int\limits_{\mathcal{M}_1\mathcal{M}_2} F_2\,(x, y, z)\;dy + \int\limits_{\mathcal{M}_2\mathcal{M}} F_3\,(x, y, z)\;dz =$$

$$= \int\limits_{x_0}^{x} F_1(x, y_0, z_0)\ dx + \int\limits_{y_0}^{y} F_2(x, y, z_0)\ dy + \int\limits_{z_0}^{z} F_3(x, y, z)\ dz.$$

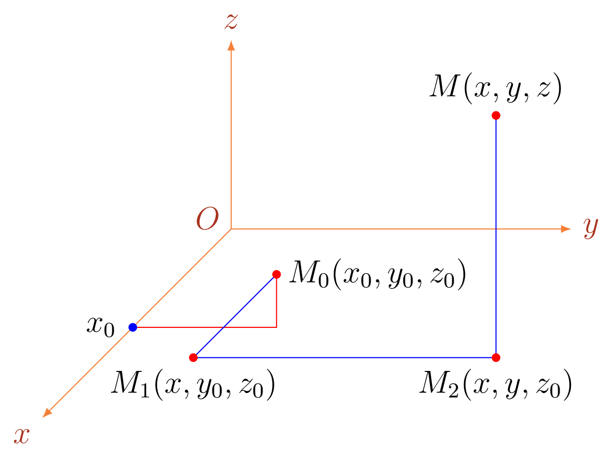


Рис. 1.

**Пример 1.** *Найти потенциальную функцию векторного поля*

$$\mathbf{F} = (2x - 3yz)\ \mathbf{i} + (2y - 3xz)\ \mathbf{j} + (2z - 3xy)\ \mathbf{k},$$

*если она существует.*

*Решение.* Вычислим ротор поля

$$\operatorname{rot}\mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 2x - 3yz & 2y - 3xz & 2z - 3xy \end{vmatrix} =$$
$$= (-3x + 3x)\,\mathbf{i} - (-3y + 3y)\,\mathbf{j} + (-3z + 3z)\,\mathbf{k} \equiv \mathbf{0}.$$

Следовательно, векторное поле потенциально. Найдем его потенциальную функцию:

$$u(M) = \int\limits_{x_0}^{x} (2x - 3y_0z_0)\ dx + \int\limits_{y_0}^{y} (2y - 3xz_0)\ dy + \int\limits_{z_0}^{z} (2z - 3xy)\ dz =$$
$$= \left(x^2 - 3xy_0z_0\right)\Big|_{x_0}^{x} + \left(y^2 - 3xyz_0\right)\Big|_{y_0}^{y} + \left(z^2 - 3xyz\right)\Big|_{z_0}^{z} =$$
$$= x^2 - \cancel{3xy_0z_0} - x_0^2 + 3x_0y_0z_0 + y^2 - \cancel{3xyz_0} - y_0^2 + \cancel{3xy_0z_0} + z^2 - 3xyz - z_0^2 + \cancel{3xyz_0} =$$
$$= x^2 + y^2 + z^2 - 3xyz - \left(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - 3x_0y_0z_0\right).$$

Обозначив $C = -\left(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - 3x_0y_0z_0\right)$, получим

$$u(M) = x^2 + y^2 + z^2 - 3xyz + C.$$

**Пример 2.** *Доказать потенциальность центрального поля*

$$\mathbf{F} = f\left(|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|\right)\left(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0\right),$$

*где $f$ — некоторая функция, $\mathbf{r}_0 = x_0\,\mathbf{i} + y_0\,\mathbf{j} + z_0\,\mathbf{k}$ — радиус-вектор точки $M_0$ (центра), $\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$ — радиус-вектор переменной точки $M$,*

$$|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0| = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}$$

*— расстояние от точки $M$ до точки $M_0$.*

*Решение.* Учитывая, что

$$\frac{\partial\,|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}{\partial x} = \frac{(x-x_0)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}, \qquad \frac{\partial\,|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}{\partial y} = \frac{(y-y_0)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}, \qquad \frac{\partial\,|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}{\partial z} = \frac{(z-z_0)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|},$$

придем к выводу, что ротор заданного поля тождественно равен $\mathbf{0}$:

$$\operatorname{rot}\mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ f\left(|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|\right)(x-x_0) & f\left(|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|\right)(y-y_0) & f\left(|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|\right)(z-z_0) \end{vmatrix} =$$
$$= \left[f\left(|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|\right)(y-y_0)(z-z_0)\,/\,|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0| - f\left(|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|\right)(z-z_0)(y-y_0)\,/\,|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|\right]\mathbf{i} -$$
$$- \left[f\left(|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|\right)(x-x_0)(z-z_0)\,/\,|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0| - f\left(|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|\right)(z-z_0)(x-x_0)\,/\,|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|\right]\mathbf{j} +$$
$$+ \left[f\left(|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|\right)(x-x_0)(y-y_0)\,/\,|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0| - f\left(|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|\right)(y-y_0)(x-x_0)\,/\,|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|\right]\mathbf{k}.$$

Следовательно, центральное поле потенциально.

**Пример 3.** *Напряженность электростатического поля, создаваемого системой из $n$ зарядов, выражается формулой*

$$\mathbf{E} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{E}_i, \qquad \mathbf{E}_i = \sum_{i=1}^{n} e_i\,\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}_i}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|^3},$$

*где $\mathbf{E}_i$ — напряженность, создаваемая $i$-м зарядом, $e_i$ — его величина, $\mathbf{r}_i$ — радиус-вектор точки $M_i$ местонахождения $i$-го заряда, $\mathbf{r}$ — радиус-вектор произвольной точки $M$ пространства. Доказать, что во всех точках, где нет зарядов, это поле потенциально.*

*Решение.* Векторное поле $\mathbf{E}_i$ — центрально и по результатам решения предыдущего примера везде, кроме точки $M_i$ (в которой поле просто не существует), потенциально, так как в остальных точках $\operatorname{rot}\mathbf{E}_i \equiv \mathbf{0}$. Но $\operatorname{rot}\mathbf{E} \equiv \sum_{i=1}^{n}\operatorname{rot}\mathbf{E}_i$ (докажите самостоятельно[2)]), поэтому $\operatorname{rot}\mathbf{E} \equiv \mathbf{0}$ везде, где нет зарядов, и, следовательно, там поле $\mathbf{E}$ потенциально.

## 3 Соленоидальное поле

Векторное поле $\mathbf{F}$ называется ***соленоидальным***, если оно является ротором другого векторного поля $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{F} = \operatorname{rot}\mathbf{A}.$$

Поле $\mathbf{A}$ называется ***векторным потенциалом*** поля $\mathbf{F}$.

**Теорема 4.** *Векторное поле* $\mathbf{F}$ *соленоидально в области* $G$ *тогда и только тогда, когда в этой области*

$$\operatorname{div}\mathbf{F} \equiv 0.$$

Доказательство приведено в Приложении[3)].

Из формулы Остроградского следует, что в соленоидальном поле выполняется

$$\Pi = \iint\limits_{\sigma} \mathbf{Fn}\,d\sigma = 0,$$

т. е. поток векторного поля через любую замкнутую поверхность равен нулю.

Возьмем в предыдущей формуле в качестве поверхности $\sigma$ часть векторной трубки, заключенной между сечениями $\sigma_1$ и $\sigma_3$ и имеющей боковую поверхность $\sigma_2$, рис. 2. Тогда формула примет вид

$$\iint\limits_{\sigma_1} \mathbf{Fn}\,d\sigma + \iint\limits_{\sigma_2} \mathbf{Fn}\,d\sigma + \iint\limits_{\sigma_3} \mathbf{Fn}\,d\sigma = 0.$$

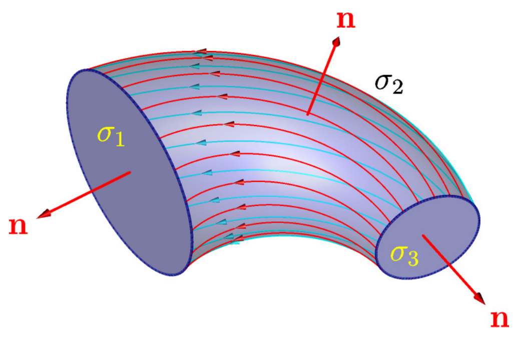


Рис. 2.

На боковой поверхности $\sigma_2$ вектор $\mathbf{F}$, направленный по касательной к векторной линии, перпендикулярен $\mathbf{n}$, поэтому $\mathbf{Fn} = 0$ на $\sigma_2$. Кроме того, в предыдущей формуле заменим на поверхности $\sigma_3$ внешнюю нормаль внутренней и формула станет такой:

$$\iint\limits_{\sigma_1} \mathbf{Fn}\,d\sigma - \iint\limits_{\sigma_3} \mathbf{Fn}\,d\sigma = 0,$$

откуда

$$\iint\limits_{\sigma_1} \mathbf{Fn}\,d\sigma = \iint\limits_{\sigma_3} \mathbf{Fn}\,d\sigma. \tag{6}$$

Величина $\iint\limits_{\sigma} \mathbf{Fn}\,d\sigma$ потока поля через поперечное сечение $\sigma$ векторной трубки называется ***напряжением векторной трубки в сечении*** $\sigma$.

Этот термин позволяет понять формулу (6). Она показывает, что для соленоидального поля *напряжение векторной трубки одинаково во всех ее сечениях* (например, количество жидкости, втекающей в сечение векторной трубки в единицу времени, равно количеству жидкости, вытекающей из другого ее сечения).

**Пример 4.** *Проверить соленоидальность векторного поля*

$$\mathbf{F} = \left(x^2y - 3z^3\right)\mathbf{i} + \left(z^2 - xyz\right)\mathbf{j} + \left(\frac{1}{2}xz^2 - 2xyz\right)\mathbf{k}.$$

*Решение.* Найдем дивергенцию поля:

$$\operatorname{div}\mathbf{F} = 2xy - xz + xz - 2xy \equiv 0.$$

Следовательно, векторное поле соленоидально.

**Пример 5.** *Найти дивергенцию центрального поля из примера 2.*

*Решение.* Найдем частные производные компонент поля:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F_1}{\partial x} &= f'\left(|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|\right)\frac{(x-x_0)^2}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|} + f\left(|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|\right),\\
\frac{\partial F_2}{\partial y} &= f'\left(|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|\right)\frac{(y-y_0)^2}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|} + f\left(|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|\right),\\
\frac{\partial F_3}{\partial z} &= f'\left(|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|\right)\frac{(z-z_0)^2}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|} + f\left(|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|\right).
\end{aligned}$$

Вычислим дивергенцию:

$$\operatorname{div}\mathbf{F} = f'\left(|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|\right)|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0| + 3f\left(|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|\right). \tag{7}$$

**Пример 6.** *Найти область соленоидальности векторного поля из примера 3.*

*Решение.* Так как поле $\mathbf{E}_i$ центрально, причем, $f\left(|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|\right) = e_i/\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i\right|^3$, то из формулы (7) получаем, что за исключением точки $M_i$

$$\operatorname{div}\mathbf{E}_i = e_i\left(-\frac{3\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i\right|^2}{\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i\right|^6}\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i\right| + \frac{3}{\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i\right|^3}\right) = e_i\frac{-3\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i\right|^3 + 3\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i\right|^3}{\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i\right|^6} \equiv 0.$$

Поэтому везде, кроме точки $M_i$, поле напряженности одного заряда соленоидально. Но ясно, что $\operatorname{div}\mathbf{E} = \sum_{i=1}^{n}\operatorname{div}\mathbf{E}_i$, поэтому поле системы зарядов соленоидально во всех точках, где нет зарядов.

# 4 Гармоническое поле

Векторное поле $\mathbf{F}$ называется ***гармоническим***, если оно одновременно потенциально и соленоидально: $\operatorname{rot}\mathbf{F} = \mathbf{0}$, $\operatorname{div}\mathbf{F} = 0$.

Так, поле электрической напряженности системы из нескольких зарядов, рассмотренное в примерах 3 и 6, является гармоничным во всем пространстве за исключением точек местонахождения зарядов.

Для гармонического поля в силу его потенциальности существует потенциальная функция $u(x,y,z)$, градиент которой равен полю:

$$\mathbf{F} = \operatorname{grad} u.$$

Но поскольку поле и соленоидально, то

$$\operatorname{div}\mathbf{F} = \operatorname{div}\operatorname{grad} u = 0. \tag{8}$$

Раскрывая в координатной форме дивергенцию градиента, получим

$$\operatorname{div}\operatorname{grad} u = \operatorname{div}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\,\mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\,\mathbf{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\,\mathbf{k}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}. \tag{9}$$

Оператор $\operatorname{div}\operatorname{grad}$ называется ***оператором Лапласа*** и обозначается

$$\triangle = \nabla\cdot\nabla = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Поэтому с помощью операторов Гамильтона и Лапласа равенство (9) можно записать так:

$$\nabla\cdot\nabla u = (\nabla\cdot\nabla)\cdot u = \triangle u.$$

Соответственно, равенство (8) принимает вид

$$\triangle u = 0,$$

или в развернутой форме:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0. \tag{10}$$

Это уравнение называется ***уравнением Лапласа***, а удовлетворяющая ему функция — ***гармонической***.

Уравнение (10) показывает, что потенциальная функция гармонического поля является решением уравнения Лапласа.

**Пример 7.** *Найти решение уравнения Лапласа для системы точечных зарядов из примера 3.*

*Решение.* Найдем потенциальную функцию для одного заряда (относительно некоторой точки $M_0$, не совпадающей ни с одной из точек $M_i$, $i=\overline{1,n}$):

$$u_i(x,y,z) = \int\limits_{\mathcal{M}_0\mathcal{M}} \mathbf{E}_i\,d\mathbf{r} = e_i \int\limits_{\mathcal{M}_0\mathcal{M}} \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}_i}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|^3}\,d\mathbf{r} = e_i \int\limits_{\mathcal{M}_0\mathcal{M}} \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}_i}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|^3}\,d(\mathbf{r}-\mathbf{r}_i) =$$

$$= e_i \int\limits_{\mathcal{M}_0\mathcal{M}} \frac{d(\mathbf{r}-\mathbf{r}_i)^2}{2\,|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|^3}.$$

Поскольку $(\mathbf{r}-\mathbf{r}_i)^2 = |\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|^2$, то $(\mathbf{r}-\mathbf{r}_i)\,d(\mathbf{r}-\mathbf{r}_i) = |\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|\,d(|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|)$, поэтому

$$u_i(x,y,z) = e_i \int\limits_{\mathcal{M}_0\mathcal{M}} \frac{d(|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|)^2}{2\,|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|^3} = e_i \int\limits_{\mathcal{M}_0\mathcal{M}} \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|^3}\,d(|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|) =$$

$$= e_i \int\limits_{\mathcal{M}_0\mathcal{M}} \frac{d(|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|^2} = e_i \int\limits_{\mathcal{M}_0}^{\mathcal{M}} \frac{d(|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|^2} == -\frac{e_i}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|} + C_i.$$

Положив $C_i = 0$, получим

$$\mathbf{E}_i = \operatorname{grad} u_i = \operatorname{grad}\left(-\frac{e_i}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|}\right).$$

Так как градиент суммы векторов равен сумме их градиентов, то

$$\mathbf{E} = \operatorname{grad}\left(-\sum_{i=1}^{n}\frac{e_i}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|}\right).$$

Следовательно, потенциальная функция всей системы зарядов имеет вид

$$u\,(x,y,z) = -\sum_{i=1}^{n}\frac{e_i}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|}$$

и является для этой системы решением уравнения Лапласа. □

Важность векторных полей рассмотренных типов поясняют следующие теоремы.

**Теорема 5.** *Любое векторное* $\mathbf{F}$ *поле может быть представлено в виде суммы потенциального* $\mathbf{A}$ *и соленоидального* $\mathbf{B}$ *полей:*

$$\mathbf{F} = \mathbf{A} + \mathbf{B}.$$

Доказательство приведено в Приложении[4)].

**Теорема 6.** *По ротору и дивергенции векторного поля его можно найти с точностью до гармонического поля.*

Доказательство см. в Приложении[5)].

## 5 Операции первого и второго порядка

Дифференциальными ***операциями первого порядка*** именуют операции взятия градиента, ротора и дивергенции. Их свойства, часть из которых мы уже рассмотрели, можно представить в виде нижеследующего перечня (далеко не полного), в котором используются следующие обозначения: $u$, $v$ — скалярные поля, $\mathbf{F} = F_1\,i + F_2\,\mathbf{j} + F_3\,\mathbf{k}$, $\mathbf{G} = G_1\,i + G_2\,\mathbf{j} + G_3\,\mathbf{k}$ — векторные поля, $C$ — скалярная постоянная, $\mathbf{C}$ — векторная постоянная.

СВОЙСТВА ОПЕРАЦИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

**1°.** $\nabla\,(u+v) = \nabla u + \nabla v.$

**2°.** $\nabla\,(Cu) = C\nabla u.$

**3°** $\nabla(uv) = u\nabla v + v\nabla u$.

**4°** $\nabla \cdot (\mathbf{F} + \mathbf{G}) = \nabla \cdot \mathbf{F} + \nabla \cdot \mathbf{G}$.

**5°** $\nabla \cdot (u\mathbf{F}) = \nabla u \cdot \mathbf{F} + u\,(\nabla \cdot \mathbf{F})$.

**6°** $\nabla \cdot (C\mathbf{F}) = C\,(\nabla \cdot \mathbf{F})$.

**7°** $\nabla \cdot (u\mathbf{C}) = \nabla u \cdot \mathbf{C}$.

**8°** $\nabla \cdot (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = \mathbf{G} \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) - \mathbf{F} \cdot (\nabla \times \mathbf{G})$.

**9°** $\nabla \times (\mathbf{F} + \mathbf{G}) = (\nabla \times \mathbf{F}) + (\nabla \times \mathbf{G})$.

**10°** $\nabla \times (u\mathbf{F}) = \nabla u \times \mathbf{F} + u\,(\nabla \times \mathbf{F})$.

**11°** $\nabla \times (C\mathbf{F}) = C\,(\nabla \times \mathbf{F})$.

**12°** $\nabla \times (u\mathbf{C}) = \nabla u \times \mathbf{C}$.

Применяя оператор Гамильтона к скалярному или векторному полю, мы получаем новое поле, к которому снова можно применить этот оператор. Повторное применение таких дифференциальных операций называют ***операциями второго порядка***. Имеют смысл лишь пять из них: div grad, rot grad, grad div, div rot, и rot rot.

## СВОЙСТВА ОПЕРАЦИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

**13°** $\operatorname{div}\operatorname{grad} u = \nabla \cdot \nabla u = \triangle u$.

**14°** $\operatorname{rot}\operatorname{grad} u = \nabla \times \nabla u = \mathbf{0}$.

*Векторное поле градиента потенциально.*

**15°** $\operatorname{grad}\operatorname{div} \mathbf{F} = \nabla \cdot (\nabla \cdot \mathbf{F}) =$

$$= \left(\frac{\partial^2 F_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_2}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 F_3}{\partial z \partial x}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial^2 F_1}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 F_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F_3}{\partial z \partial y}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial^2 F_1}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 F_2}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 F_3}{\partial z^2}\right)\mathbf{k}.$$

**16°** $\operatorname{div}\operatorname{rot} \mathbf{F} = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = 0$.

*Векторное поле ротора соленоидально.*

**17°** $\operatorname{rot}\operatorname{rot} \mathbf{F} = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{F}) =$

$$= \nabla \cdot (\nabla \cdot \mathbf{F}) - (\nabla \cdot \nabla)\,\mathbf{F} = \nabla \cdot (\nabla \cdot \mathbf{F}) - \triangle \mathbf{F},$$

где $\triangle \mathbf{F} = \triangle F_1\,\mathbf{i} + \triangle F_2\,\mathbf{j} + \triangle F_3\,\mathbf{k}$.

Справедливо также следующее свойство оператора Лапласа:

**18°** $\Delta(uv) = u\Delta v + v\Delta u + 2\nabla u \cdot \nabla v.$

Доказательства всех свойств приведены в Приложении[6)].

## 6 Применение

Любое электромагнитное поле описывается системой уравнений Максвелла, в которую входят ротор и дивергенция полей электрической $\mathbf{E}$ и магнитной $\mathbf{H}$ напряженностей (в системе СГС):

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\cdot\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}, \tag{11a}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{E} = 4\pi\rho, \tag{11b}$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{1}{c}\cdot\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi\mathbf{I}}{c}, \tag{11c}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{H} = 0, \tag{11d}$$

где $c$ — скорость света в пустоте, $\rho$ — плотность электрического заряда в данной точке пространства, $\mathbf{I}$ — плотность тока.

Из последнего уравнения видно, что магнитное поле соленоидально.

Если напряженности неизменны во времени, то есть $\partial\mathbf{E}/\partial t = 0$, $\partial\mathbf{H}/\partial t = 0$, то электромагнитное поле распадается на два векторных поля, электростатическое, определяемое уравнениями

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = 0, \quad \operatorname{div}\mathbf{E} = 4\pi\rho,$$

и магнитостатическое:

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{4\pi\mathbf{I}}{c}, \quad \operatorname{div}\mathbf{H} = 0.$$

Видно, что электростатическое поле потенциально.

В Приложении[7)] описывается происхождение и применение уравнений Максвелла.

В то же время в Приложении отсутствуют какие-либо примеры применения системы *Mathematica*. Объясняется это просто: вычисление ротора и дивергенции было рассмотрено на предыдущей лекции, решение же уравнений Лапласа и Пуассона лучше отнести к материалу лекций, посвященных уравнениям в частных производных.

## Приложение

1)

$\boxed{1)\Longrightarrow(1)}$

Пусть точки $A, B \in G$. Соединим их различными ориентированными путями, лежащими в $G$, рис. 3. Из 1) следует, что

$$\int\limits_{\mathcal{L}^+ + \Gamma^+} \mathbf{F}\, d\mathbf{r} = 0 \Longrightarrow \int\limits_{\mathcal{L}^-} \mathbf{F}\, d\mathbf{r} = \int\limits_{\Gamma^+} \mathbf{F}\, d\mathbf{r}.$$

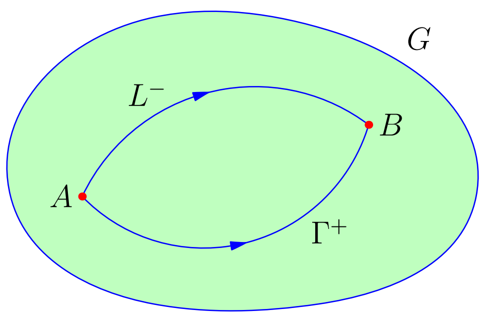


Рис. 3.

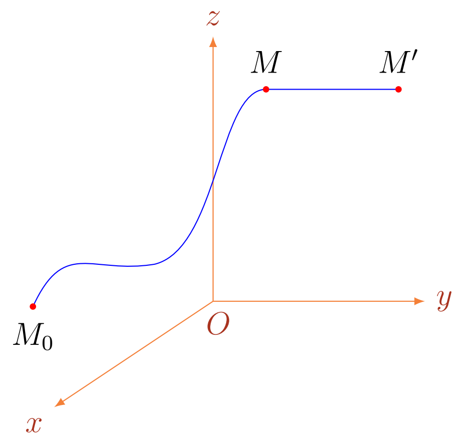


Рис. 4.

$\boxed{(1)\Longrightarrow 1)}$

Возьмем в области $G$ контур $\mathcal{C}$ и разрежем его в произвольных точках $A$ и $B$ на две части: $\mathcal{C} = \Gamma^+ + \mathcal{L}^+$, рис. 3. Из (1) имеем

$$\int\limits_{\mathcal{L}^-} \mathbf{F}\, d\mathbf{r} = \int\limits_{\Gamma^+} \mathbf{F}\, d\mathbf{r},$$

или

$$-\int\limits_{\mathcal{L}^-} \mathbf{F}\, d\mathbf{r} + \int\limits_{\Gamma^+} \mathbf{F}\, d\mathbf{r} = 0 \Longrightarrow \int\limits_{\mathcal{L}^+ + \Gamma^+} \mathbf{F}\, d\mathbf{r} = 0.$$

$\boxed{(1)\Longrightarrow 2)}$

Зафиксируем точку $M_0$. В силу (1) можно определить функцию точки $M(x, y, z)$ вида

$$u\,(M) = u\,(x, y, z) = \int\limits_{\mathcal{M}_0\mathcal{M}} \mathbf{F}\, d\mathbf{r},$$

так как значение интеграла (при фиксированной точке $M_0$) не будет зависеть от формы пути интегрирования, а лишь от координат точки $M$. Возьмем точку $M'\,(x, y + \Delta y, z)$, рис. 4. Тогда, так как $\mathcal{M}\mathcal{M}' \parallel Oy$, будем иметь

$$\Delta_y u = u\,(M') - u\,(M) = u\,(x, y + \Delta y, z) - u\,(x, y, z) =$$
$$= \int\limits_{\mathcal{M}_0\mathcal{M}\mathcal{M}'} \mathbf{F}\, d\mathbf{r} - \int\limits_{\mathcal{M}_0\mathcal{M}} \mathbf{F}\, d\mathbf{r} = \int\limits_{\mathcal{M}\mathcal{M}'} \mathbf{F}\, d\mathbf{r} = \int\limits_{\mathcal{M}\mathcal{M}'} F_2\, dy,$$

потому что $dx = dz = 0$. Переходя к обыкновенному интегралу и применяя теорему о среднем, получаем

$$\Delta_y u = F_2\left(x, y + \theta\Delta y, z\right)\ \Delta y,\ \theta \in [0;1].$$

Деля на $\Delta y$ и устремляя $\Delta y$ к нулю, находим, что

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y u}{\Delta y} = F_2\left(x, y, z\right).$$

Аналогично доказывается, что

$$\frac{\partial u}{\partial x} = F_1\left(x, y, z\right),\ \frac{\partial u}{\partial z} = F_3\left(x, y, z\right).$$

Таким образом,

$$\mathbf{F}\, d\mathbf{r} = F_1\, dx + F_2\, dy + F_3\, dz = \frac{\partial u}{\partial x}\, dx + \frac{\partial u}{\partial y}\, dy + \frac{\partial u}{\partial z}\, dz = du.$$

$\boxed{2) \Longrightarrow (1)}$

Пусть $\mathbf{F}\, d\mathbf{r} = du$, где $u$ – некоторая функция. Возьмем непрерывную и кусочно гладкую кривую $\mathbf{r}\left(t\right) = x\left(t\right)\ \mathbf{i} + y\left(t\right)\ \mathbf{j} + z\left(t\right)\ \mathbf{k}$, соединяющую точки $M_0, M \in G$ и лежащую в $G$. Пусть $\mathbf{r}\left(t_0\right) = M_0$, а $\mathbf{r}\left(T\right) = M$, тогда

$$\int\limits_{\mathcal{M}_0\mathcal{M}} \mathbf{F}\, d\mathbf{r} = \int\limits_{\mathcal{M}_0\mathcal{M}} \frac{\partial u}{\partial x}\, dx + \frac{\partial u}{\partial y}\, dy + \frac{\partial u}{\partial z}\, dz = \int\limits_{t_0}^{T} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\, x' + \frac{\partial u}{\partial y}\, y' + \frac{\partial u}{\partial z}\, z'\right) dt =$$

$$= \int\limits_{t_0}^{T} \frac{du}{dt}\, dt = u(\mathbf{r}(T)) - u(\mathbf{r}(t_0)) = u\left(M\right) - u\left(M_0\right).$$

Следовательно, линейный интеграл не зависит от формы пути интегрирования.

2) Пусть векторное поле $\mathbf{F}$ является суммой нескольких векторных полей:

$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}^i,\ \mathbf{F}^i = F_1^i\, \mathbf{i} + F_2^i\, \mathbf{j} + +F_3^i\, \mathbf{k}.$$

Запишем его ротор и вспомним одно из свойств определителей:

$$\operatorname{rot} \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \sum_{i=1}^{n} F_1^i & \sum_{i=1}^{n} F_2^i & \sum_{i=1}^{n} F_3^i \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ F_1^i & F_2^i & F_3^i \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{rot} \mathbf{F}_i.$$

3) Если векторное поле $\mathbf{F}$ соленоидально, то есть является ротором некоторого другого поля $\mathbf{A} = A_1\, \mathbf{i} + A_2\, \mathbf{j} + A_3$, то его дивергенция равна нулю:

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{A} = \operatorname{div} \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix} = \tag{П1}$$

$$= \operatorname{div}\left[\left(\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z}\right)\mathbf{i} - \left(\frac{\partial A_3}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial z}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y}\right)\mathbf{k}\right] = \tag{П2}$$

$$= \frac{\partial^2 A_3}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 A_2}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 A_3}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 A_1}{\partial z \partial y} + \frac{\partial^2 A_2}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 A_1}{\partial y \partial z} \equiv 0. \tag{П3}$$

Обратно. Пусть дивергенция поля равна нулю: $\operatorname{div}\mathbf{F} = 0$. Найдем какое-нибудь векторное поле $\mathbf{A} = A_1\,\mathbf{i} + A_2\,\mathbf{j} + A_3\,\mathbf{k}$, ротор которого будет равен полю $\mathbf{F} = F_1\,\mathbf{i} + F_2\,\mathbf{j} + F_3\,\mathbf{k}$:

$$\mathbf{F} = \operatorname{rot}\mathbf{A}.$$

Для этого перепишем последнее равенство в координатной форме:

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z} &= F_1, \\ -\frac{\partial A_3}{\partial x} + \frac{\partial A_1}{\partial z} &= F_2, \\ \frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y} &= F_3. \end{aligned}$$

Таким образом, чтобы найти поле $\mathbf{A}$, надо решить эту систему дифференциальных уравнений. Поскольку требуется найти хоть какое-нибудь поле $\mathbf{A}$, удовлетворяющее нашим требованиям, будем по ходу дела упрощать некоторые уравнения. Для начала положим $A_3 = 0$, тогда система примет вид

$$\begin{aligned} -\frac{\partial A_2}{\partial z} &= F_1, \\ \frac{\partial A_1}{\partial z} &= F_2, \\ \frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y} &= F_3. \end{aligned} \tag{П4}$$

Из первого и второго уравнений получим

$$\begin{aligned} A_2 &= -\int F_1\,dz + C_1(x,y), \\ A_1 &= \int F_2\,dz + C_2(x,y), \end{aligned} \tag{П5}$$

где $C_1$, $C_2$ — произвольные функции. Подставим выражения для $A_1$ и $A_2$ в уравнение (П4):

$$-\frac{\partial}{\partial x}\int F_1\,dz + \frac{\partial C_1(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}\int F_2\,dz - \frac{\partial C_2(x,y)}{\partial y} = F_3.$$

Положим $C_2(x,y) \equiv 0$ и перепишем уравнение:

$$\frac{\partial C_1(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\int F_1\,dz + \frac{\partial}{\partial y}\int F_2\,dz + F_3. \tag{П6}$$

Найдем производную правой части по $z$:

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial}{\partial x}\int F_1\,dz + \frac{\partial}{\partial y}\int F_2\,dz + F_3\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial z}\int F_1\,dz\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial z}\int F_2\,dz\right) + \frac{\partial F_3}{\partial z} =$$

$$= \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} = \operatorname{div}\mathbf{F} = 0.$$

Значит, правая часть (П6) от $z$ не зависит, поэтому, интегрируя это равенство по $x$, получим, что

$$C_1(x,y) = \int \left[\frac{\partial}{\partial x}\int F_1\,dz + \frac{\partial}{\partial y}\int F_2\,dz + F_3\right] dx + C(y)\,. \tag{П7}$$

Положив $C(y) \equiv 0$, из равенств (П7) и (П5) найдем следующее решение системы (П4):

$$A_1 = \int F_2\,dz,$$
$$A_2 = -\int F_1\,dz + \int \left[\frac{\partial}{\partial x}\int F_1\,dz + \frac{\partial}{\partial y}\int F_2\,dz + F_3\right] dx,$$
$$A_3 = 0.$$

4)

*Доказательство одного равенства.*
Вначале покажем, что для $\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$ выполняется равенство

$$\Delta\,\frac{1}{|\mathbf{r}|} = -4\pi\delta(\mathbf{r})\,, \tag{П8}$$

где $\delta(\mathbf{r}) = \delta(x)\,\delta(y)\,\delta(z)$ − трехмерная дельта-функция. Одномерные дельта-функции рассматривались ранее†. В выкладках используем равенства

$$\frac{\partial|\mathbf{r}|}{\partial x} = \frac{x}{|\mathbf{r}|},\ \frac{\partial|\mathbf{r}|}{\partial y} = \frac{y}{|\mathbf{r}|},\ \frac{\partial|\mathbf{r}|}{\partial z} = \frac{z}{|\mathbf{r}|};$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{|\mathbf{r}|}\right) = -\frac{x}{|\mathbf{r}|^3},\ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{|\mathbf{r}|}\right) = -\frac{y}{|\mathbf{r}|^3},\ \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{|\mathbf{r}|}\right) = -\frac{z}{|\mathbf{r}|^3}; \tag{П9}$$

$$\nabla\,\frac{1}{|\mathbf{r}|} = -\frac{x}{|\mathbf{r}|^3}\,\mathbf{i} - \frac{y}{|\mathbf{r}|^3}\,\mathbf{j} - \frac{z}{|\mathbf{r}|^3}\,\mathbf{k} = -\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}. \tag{П10}$$

Если $\mathbf{r} \neq \mathbf{0}$, то

$$\Delta\,\frac{1}{|\mathbf{r}|} = \nabla\cdot\nabla\,\frac{1}{|\mathbf{r}|} = \nabla\cdot\left(-\frac{x}{|\mathbf{r}|^3}\,\mathbf{i} - \frac{y}{|\mathbf{r}|^3}\,\mathbf{j} - \frac{z}{|\mathbf{r}|^3}\,\mathbf{k}\right) =$$
$$= -\frac{|\mathbf{r}|^3 - 3\,|\mathbf{r}|^2\,x^2/\,|\mathbf{r}|}{|\mathbf{r}|^6}\,\mathbf{i} - \frac{|\mathbf{r}|^3 - 3\,|\mathbf{r}|^2\,y^2/\,|\mathbf{r}|}{|\mathbf{r}|^6}\,\mathbf{j} - \frac{|\mathbf{r}|^3 - 3\,|\mathbf{r}|^2\,z^2/\,|\mathbf{r}|}{|\mathbf{r}|^6}\,\mathbf{k} =$$
$$= -\frac{3\,|\mathbf{r}|^3 - 3\,|\mathbf{r}|^3}{|\mathbf{r}|^6} \equiv 0.$$

Пусть теперь $\mathbf{r} = \mathbf{0}$. Возьмем сферу $\sigma$ радиуса $R$ с центром в начале координат, объем которой обозначим $V$, и, учитывая, что для сферы $\mathbf{n} = \mathbf{r}/|\mathbf{r}|$, вычислим следующий тройной интеграл, переходя от него по формуле Остроградского к поверхностным интегралам:

$$\iiint\limits_V \Delta\,\frac{1}{|\mathbf{r}|}\,dV = \iiint\limits_V \nabla\cdot\nabla\,\frac{1}{|\mathbf{r}|}\,dV = \iint\limits_\sigma \mathbf{n}\cdot\nabla\,\frac{1}{|\mathbf{r}|}\,d\sigma =$$
$$= \iint\limits_\sigma \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}\cdot\left(-\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}\right)\,d\sigma = -\iint\limits_\sigma \frac{1}{|\mathbf{r}|^2}\,d\sigma =$$

†Лекция «Интегралы по мере», Приложение.

$$= -\frac{1}{R^2} \iint\limits_{\sigma} d\sigma = -\frac{4\pi R^2}{R^2} = -4\pi.$$

Как видим, результат интегрирования не зависит от радиуса сферы. Стягивая последнюю к началу координат, в пределе будем иметь число $-4\pi$. Таким образом, $\Delta\left(1/\left|\mathbf{r}\right|\right)$ ведет себя как трехмерная дельта-функция: она равна нулю всюду, кроме начала координат, а интеграл от нее по сфере, окружающей начало координат, стремится к конечной величине $-4\pi$. Поэтому естественно считать, что выполняется равенство (П8). Изменяя точку отсчета, для фиксированного вектора $\mathbf{r}_0 = x_0\,\mathbf{i} + y_0\,\mathbf{j} + z_0\,\mathbf{k}$ получим соотношение

$$\Delta\,\frac{1}{\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0\right|} = -4\pi\delta\left(\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0\right|\right). \qquad (\text{П}11)$$

*Решение уравнения Пуассона.*
Уравнение

$$\Delta u = f\left(\mathbf{r}\right) \qquad (\text{П}12)$$

называется *уравнением Пуассона*. Покажем, что его решением является функция

$$u\left(\mathbf{r}\right) = -\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_V \frac{f\left(\mathbf{r}_0\right)}{\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0\right|}\,dV_0, \qquad (\text{П}13)$$

где $dV_0 = dx_0\,dy_0\,dz_0$. Для этого достаточно подставить функцию (П13) в уравнение (П12) и воспользоваться формулой (П11):

$$\Delta u\left(\mathbf{r}\right) = -\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_V f\left(\mathbf{r}_0\right)\Delta\,\frac{1}{\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0\right|}\,dV_0 = \iiint\limits_V f\left(\mathbf{r}_0\right)\delta\left(\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0\right|\right)\,dV_0 = f\left(\mathbf{r}\right).$$

Отметим, что решение (П13) не единственно. К нему можно прибавить любую гармоническую функцию и снова получится решение уравнения Пуассона, так как оператор Лапласа от гармонической функции равен нулю.
*Доказательство теоремы.*
В силу потенциальности поля $\mathbf{A}$, можно положить $\mathbf{A} = \nabla u$, где $u$ – некоторая скалярная функция, которую предстоит определить. Так как $\mathbf{B} = \mathbf{F} - \mathbf{A}$ и поле $\mathbf{B}$ соленоидально, то должно выполняться равенство

$$\nabla\cdot\mathbf{B} = \nabla\cdot\mathbf{F} - \nabla\cdot\nabla u = 0.$$

Но $\nabla\cdot\nabla u = \triangle u$ и поэтому

$$\triangle u = \nabla\cdot\mathbf{F}.$$

Получили уравнение Пуассона, которое, как было показано, имеет решение (П13). Используя его, получим поле $\mathbf{A} = \nabla u$, а затем поле $\mathbf{B} = \mathbf{F} - \mathbf{A}$.

[5)] Пусть требуется найти векторное поле $\mathbf{F}$ по его ротору $\mathbf{C} = \nabla\times\mathbf{F}$ и дивергенции $u = \nabla\cdot\mathbf{F}$. Предположим, что $\operatorname{div}\mathbf{C} = 0$. Так как в силу теоремы 5 любое векторное поле представимо в виде суммы потенциального и соленоидального полей, будем искать поле $\mathbf{F}$ в виде

$$\mathbf{F} = \mathbf{A} + \mathbf{B},$$

где $\mathbf{A}$ потенциально, а $\mathbf{B}$ соленоидально, причем,

$$\nabla\times\mathbf{A} = \mathbf{0}, \quad \nabla\cdot\mathbf{A} = u; \qquad (\text{П}14)$$

$$\nabla\times\mathbf{B} = \mathbf{C}, \quad \nabla\cdot\mathbf{B} = 0. \qquad (\text{П}15)$$

Так как поле $\mathbf{A}$ потенциально, то $\mathbf{A} = \nabla\varphi$. Чтобы найти $\varphi$, подставим это выражение вместо $\mathbf{A}$ во второе уравнение (П14):

$$\nabla \cdot \nabla\varphi = u,$$
$$\Delta\varphi = u.$$

Получили уравнение Пуассона (П12), решение которого всегда существует (например, вида (П13)). Таким образом, функцию $\varphi$ можно считать найденной, а вместе с ней — и поле $\mathbf{A}$.

Перейдем к полю $\mathbf{B}$. Так как по предположению поле $\mathbf{C}$ соленоидально, то существует такое векторное поле $\mathbf{D}$, что $\mathbf{C} = \nabla \times \mathbf{D}$. Поэтому первое уравнение в (П15) разрешимо. Обозначим какое-нибудь его частное решение $\mathbf{B}_0$, тогда его общее решение можно записать в виде $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \nabla\psi$, поскольку $\nabla \times \nabla\psi = \mathbf{0}$ (см. (4)). Чтобы найти $\psi$, воспользуемся вторым уравнением (П15):

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \nabla \cdot (\mathbf{B}_0 + \nabla\psi) = \nabla \cdot \mathbf{B}_0 + \nabla \cdot \nabla\psi = \nabla \cdot \mathbf{B}_0 + \Delta\psi = 0,$$

или

$$\Delta\psi = -\nabla \cdot \mathbf{B}_0.$$

Снова пришли к уравнению Пуассона, решая которое, найдем $\psi$, а затем и поле $\mathbf{B}$.

Чем могут отличаться два решения поставленной задачи? Прибавим к найденному полю $\mathbf{F}$ некоторое поле $\mathbf{K}$: $\mathbf{F}' = \mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{K}$. Возьмем ротор и дивергенцию от поля $\mathbf{F}'$:

$$\nabla \times \mathbf{F}' = \mathbf{C} + \nabla \times \mathbf{K},$$
$$\nabla \cdot \mathbf{F}' = u + \nabla \cdot \mathbf{K}.$$

Таким образом, равенство $\mathbf{F} = \mathbf{F}'$ будет выполняться, если $\nabla \times \mathbf{K} = \mathbf{0}$, $\nabla \cdot \mathbf{K} = 0$, то есть, если поле $\mathbf{K}$ — гармонично.

6)

## ДОКАЗАТЕЛЬСТВА СВОЙСТВ ОПЕРАЦИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

**1°** $\nabla (u + v) = \nabla u + \nabla v$.

Очевидно.

**2°** $\nabla (Cu) = C\nabla u$.

Очевидно.

**3°** $\nabla (uv) = u\nabla v + v\nabla u$.

Следует из того, что

$$\begin{aligned}\nabla (uv) &= \frac{\partial (uv)}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial (uv)}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial (uv)}{\partial z}\mathbf{k} = \\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial x}v + u\frac{\partial v}{\partial x}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial u}{\partial y}v + u\frac{\partial v}{\partial y}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial u}{\partial z}v + u\frac{\partial v}{\partial z}\right)\mathbf{k} = \\ &= u\left(\frac{\partial v}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial v}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial v}{\partial z}\mathbf{k}\right) + v\left(\frac{\partial u}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\mathbf{k}\right) = u\nabla v + v\nabla u.\end{aligned}$$

**4°** $\nabla \cdot (\mathbf{F} + \mathbf{G}) = \nabla \cdot \mathbf{F} + \nabla \cdot \mathbf{G}$.

Очевидно.

5°. $\nabla \cdot (u\mathbf{F}) = \nabla u \cdot \mathbf{F} + u\,(\nabla \cdot \mathbf{F})$.

Доказательство:

$$\nabla \cdot (u\mathbf{F}) = \frac{\partial\,(uF_1)}{\partial x} + \frac{\partial\,(uF_2)}{\partial y} + \frac{\partial\,(uF_3)}{\partial z} =$$
$$= \frac{\partial u}{\partial x}\,F_1 + \frac{\partial u}{\partial y}\,F_2 + \frac{\partial u}{\partial z}\,F_3 + u\left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}\right) = \nabla u \cdot \mathbf{F} + u\,(\nabla \cdot \mathbf{F})\,.$$

6°. $\nabla \cdot (C\mathbf{F}) = C\,(\nabla \cdot \mathbf{F})$.

Следует из свойства 5°.

7°. $\nabla \cdot (u\mathbf{C}) = \nabla u \cdot \mathbf{C}$.

Следствие свойства 5°.

8°. $\nabla \cdot (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = \mathbf{G} \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) - \mathbf{F} \cdot (\nabla \times \mathbf{G})$.

В самом деле,

$$\nabla \cdot (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = \nabla \cdot \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ F_1 & F_2 & F_3 \\ G_1 & G_2 & G_3 \end{vmatrix} =$$
$$= \nabla \cdot \left[(F_2G_3 - F_3G_2)\,\mathbf{i} - (F_1G_3 - F_3G_1)\,\mathbf{j} + (F_1G_2 - F_2G_1)\,\mathbf{k}\right] =$$
$$= \left(\frac{\partial F_2}{\partial x}\,G_3 + \frac{\partial G_3}{\partial x}\,F_2 - \frac{\partial F_3}{\partial x}\,G_2 - \frac{\partial G_2}{\partial x}\,F_3\right) -$$
$$- \left(\frac{\partial F_1}{\partial y}\,G_3 + \frac{\partial G_3}{\partial y}\,F_1 - \frac{\partial F_3}{\partial y}\,G_1 - \frac{\partial G_1}{\partial y}\,F_3\right) +$$
$$+ \left(\frac{\partial F_1}{\partial z}\,G_2 + \frac{\partial G_2}{\partial z}\,F_1 - \frac{\partial F_2}{\partial z}\,G_1 - \frac{\partial G_1}{\partial z}\,F_2\right) =$$
$$= G_1\left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\right) + G_2\left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}\right) + G_3\left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) -$$
$$- F_1\left(\frac{\partial G_3}{\partial y} - \frac{\partial G_2}{\partial z}\right) - F_2\left(\frac{\partial G_1}{\partial z} - \frac{\partial G_3}{\partial x}\right) - F_3\left(\frac{\partial G_2}{\partial x} - \frac{\partial G_1}{\partial y}\right) =$$
$$= \mathbf{G} \cdot \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} - \mathbf{F} \cdot \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ G_1 & G_2 & G_3 \end{vmatrix} =$$
$$= \mathbf{G} \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) - \mathbf{F} \cdot (\nabla \times \mathbf{G})\,.$$

9°. $\nabla \times (\mathbf{F} + \mathbf{G}) = (\nabla \times \mathbf{F}) + (\nabla \times \mathbf{G})$.

Доказать, как уже рекомендовалось, самостоятельно.

10°. $\nabla \times (u\mathbf{F}) = \nabla u \times \mathbf{F} + u\,(\nabla \times \mathbf{F})$.

Следует из равенства

$$\nabla \times (u\mathbf{F}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ uF_1 & uF_2 & uF_3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial u}{\partial y}\,F_3 + \frac{\partial F_3}{\partial y}\,u - \frac{\partial u}{\partial z}\,F_2 - \frac{\partial F_2}{\partial z}\,u\right)\mathbf{i} -$$

$$-\left(\frac{\partial u}{\partial x}F_3+\frac{\partial F_3}{\partial x}u-\frac{\partial u}{\partial z}F_1-\frac{\partial F_1}{\partial z}u\right)\mathbf{j}+\left(\frac{\partial u}{\partial x}F_2+\frac{\partial F_2}{\partial x}u-\frac{\partial u}{\partial y}F_1-\frac{\partial F_1}{\partial y}u\right)\mathbf{k}=$$

$$=\left(\frac{\partial u}{\partial y}F_3-\frac{\partial u}{\partial z}F_2\right)\mathbf{i}-\left(\frac{\partial u}{\partial x}F_3-\frac{\partial u}{\partial z}F_1\right)\mathbf{j}+\left(\frac{\partial u}{\partial x}F_2-\frac{\partial u}{\partial y}F_1\right)\mathbf{k}+$$

$$+u\left[\left(\frac{\partial F_3}{\partial y}-\frac{\partial F_2}{\partial z}\right)\mathbf{i}-\left(\frac{\partial F_3}{\partial x}-\frac{\partial F_1}{\partial z}\right)\mathbf{j}+\left(\frac{\partial F_2}{\partial x}-\frac{\partial F_1}{\partial y}\right)\mathbf{k}\right]=$$

$$=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\ \dfrac{\partial u}{\partial x}&\dfrac{\partial u}{\partial y}&\dfrac{\partial u}{\partial z}\\ F_1&F_2&F_3\end{vmatrix}+u\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x}&\dfrac{\partial}{\partial y}&\dfrac{\partial}{\partial z}\\ F_1&F_2&F_3\end{vmatrix}=\nabla u\times\mathbf{F}+u\,(\nabla\times\mathbf{F})\,.$$

**11°** $\nabla\times(C\mathbf{F})=C\,(\nabla\times\mathbf{F})$.

Следствие свойства 10°.

**12°** $\nabla\times(u\mathbf{C})=\nabla u\times\mathbf{C}$.

Следует из свойства 10°.

## ДОКАЗАТЕЛЬСТВА СВОЙСТВ ОПЕРАЦИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

**13°** $\operatorname{div}\operatorname{grad}u=\nabla\cdot\nabla u=\triangle u$.

Это свойство было доказано в тексте лекции, см. равенство (9).

**14°** $\operatorname{rot}\operatorname{grad}u=\nabla\times\nabla u=\mathbf{0}$.

Доказательство представлено равенством (4). Следует также из того, что векторное произведение коллинеарных векторов равно нулю.

**15°** $\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{F}=\nabla\cdot(\nabla\cdot\mathbf{F})=\nabla\cdot\left(\dfrac{\partial F_1}{\partial x}+\dfrac{\partial F_2}{\partial y}+\dfrac{\partial F_3}{\partial z}\right)=$

$$=\left(\frac{\partial^2F_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2F_2}{\partial y\partial x}+\frac{\partial^2F_3}{\partial z\partial x}\right)\mathbf{i}+\left(\frac{\partial^2F_1}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2F_2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2F_3}{\partial z\partial y}\right)\mathbf{j}+$$

$$+\left(\frac{\partial^2F_1}{\partial x\partial z}+\frac{\partial^2F_2}{\partial y\partial z}+\frac{\partial^2F_3}{\partial z^2}\right)\mathbf{k}.$$

**16°** $\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{F}=\nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{F})=0$.

Доказательство дано формулой (П2). Да и смешанное произведение с двумя одинаковыми множителями равно нулю.

**17°** $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{F}=\nabla\times(\nabla\times\mathbf{F})=$

$$=\nabla\cdot(\nabla\cdot\mathbf{F})-(\nabla\cdot\nabla)\,\mathbf{F}=\nabla\cdot(\nabla\cdot\mathbf{F})-\triangle\mathbf{F},$$

где $\triangle\mathbf{F}=\triangle F_1\,\mathbf{i}+\triangle F_2\,\mathbf{j}+\triangle F_3\,\mathbf{k}$.

Из векторной алгебры известно, что $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=\mathbf{b}\cdot(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})-\mathbf{c}\cdot(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})$.

**18°** $\Delta\,(uv)=u\Delta v+v\Delta u+2\nabla u\cdot\nabla v$.

Действительно, используя свойство 3°, получим

$$\begin{aligned}\Delta\,(uv)&=\nabla\cdot(\nabla(uv))=\nabla\cdot(u\nabla v+v\nabla u)=\nabla\cdot(u\nabla v)+\nabla\cdot(v\nabla u)=\\&=\nabla u\cdot\nabla v+u(\nabla\cdot\nabla v)+\nabla v\cdot\nabla u+v(\nabla\cdot\nabla u)=\\&=u\Delta v+v\Delta u+2\nabla u\cdot\nabla v.\end{aligned}$$

7)

## ПРОИСХОЖДЕНИЕ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА

Перепишем уравнения Максвелла (11) с помощью оператора набла:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \tag{П16}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho, \tag{П17}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi \mathbf{I}}{c}, \tag{П18}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0, \tag{П19}$$

и рассмотрим возникновение каждого из этих уравнений.

***Первое уравнение Максвелла.***

В 1831 г., исходя из экспериментальных данных и собственных воззрений, Фарадеем был сформулирован закон об электромагнитной индукции, который гласит, что *в цепи, которую пронизывает изменяющийся во времени магнитный поток* $\Phi$*, возникает электродвижущая сила* $\varepsilon_\Phi$*, пропорциональная скорости изменения потока*:

$$\varepsilon_\Phi = -k\,\frac{\partial \Phi}{\partial t}. \tag{П20}$$

Это утверждение основывалось на опытах, в которых проводящие контуры помещались в переменное магнитное поле. Фарадей установил, что ток в контуре возникает, если 1) в соседнем контуре включается или выключается постоянный ток, 2) соседний контур с постоянным током движется относительно первого контура, 3) внутрь контура вносится (или из него выносится) постоянный магнит. Если ток в соседнем контуре не изменяется и контуры не движутся относительно друг друга, никакого тока не возникает.

Придадим опытам Фарадея математическую форму. Пусть магнитное поле $\mathbf{H}$ пронизывает контур $\mathcal{L}$, на который натянута поверхность $\sigma$. По определению потока

$$\Phi = \iint\limits_{\sigma} \mathbf{H}\mathbf{n}\,d\sigma. \tag{П21}$$

Электродвижущая сила, возникающая в контуре, есть не что иное, как циркуляция по контуру $\mathcal{L}$ электрического поля $\mathbf{E}$, возникающего вокруг контура:

$$\varepsilon_\Phi = \int\limits_{\mathcal{L}} \mathbf{E}\,d\mathbf{r}. \tag{П22}$$

Подставив эти интегралы в уравнение (П20), получим

$$\int\limits_{\mathcal{L}} \mathbf{E}\,d\mathbf{r} = -k\,\frac{\partial}{\partial t} \iint\limits_{\sigma} \mathbf{H}\mathbf{n}\,d\sigma.$$

По формуле Стокса отсюда следует, что

$$\iint\limits_{\sigma} (\nabla \times \mathbf{E})\,\mathbf{n}\,d\sigma = -k\,\frac{\partial}{\partial t} \iint\limits_{\sigma} \mathbf{H}\mathbf{n}\,d\sigma,$$

или

$$\iint\limits_{\sigma} \left[(\nabla \times \mathbf{E}) + k\,\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}\right] \mathbf{n}\,d\sigma = 0.$$

В силу произвольности контура $\mathcal{L}$ и натянутой на него поверхности $\sigma$ подынтегральное выражение должно равняться нулевому вектору во всех точках пространства:

$$\nabla \times \mathbf{E} + k\,\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \mathbf{0}.$$

Позже было установлено, что коэффициент пропорциональности является величиной, обратной скорости света, так что предыдущее равенство можно переписать в виде (П16):

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}. \tag{П23}$$

Максвелл обобщил закон Фарадея, посчитав, что не только в контуре, но и всегда и везде изменяющееся магнитное поле порождает поле электрическое, в результате чего и появилось уравнение (П16).

Все генераторы электрического тока имеют в своей конструкции вращающийся внутри катушки магнит, который создает электрическое поле, циркуляция которого в катушке и есть тот ток, который производит генератор.

***Второе уравнение Максвелла.***

*Закон Кулона*

В 1785 г. Кулон открыл закон взаимодействия двух зарядов, названный его именем. Этот закон записывается в виде

$$\mathbf{F} = \frac{e_1 e_2}{|\mathbf{r}|^3}\,\mathbf{r}, \tag{П24}$$

где $e_i$ — величина $i$-го заряда, $\mathbf{r}$ — вектор, направленный от первого ко второму заряду.

Напряженностью $\mathbf{E}$ электрического поля в данной точке называется отношение силы $\mathbf{F}$, с которой поле действует на помещенный в данную точку положительный электрический заряд $q$, к величине этого заряда:

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{q}.$$

отсюда

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E}. \tag{П25}$$

Поместим в начало координат точечный заряд $e$, а в точке $M$ расположим точечный заряд $q$. По закону Кулона (П24) сила взаимодействия двух зарядов будет равна

$$\mathbf{F} = \frac{eq}{|\mathbf{r}|^3}\,\mathbf{r}, \tag{П26}$$

где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор точки $M$. Сравнивая равенства (П25) и (П26), получим, что

$$\mathbf{E} = e\,\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}. \tag{П27}$$

Если заряд $e$ помещен не в начало координат, а в некоторую другую точку $M_0$, то, очевидно, вектор $\mathbf{r}$ следует заменить вектором $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$:

$$\mathbf{E} = e\,\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3},$$

где $\mathbf{r}_0$ — радиус-вектор точки $M_0$.

Поле $n$ точечных зарядов получается *суперпозицией*[†] полей отдельных зарядов и имеет вид, представленный в примере 3:

$$\mathbf{E} = \sum_{i=1}^{n} e_i \, \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_i}{\left|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i\right|^3}. \tag{П28}$$

*Поток поля зарядов*

Вернемся к полю одного заряда (П27). Найдем поток этого поля через замкнутую поверхность $\sigma$. Если $\sigma$ не охватывает начало координат, то внутри объема $V$, ограниченного этой поверхностью, $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ (см. решение примера 6). По теореме Остроградского тогда и поток равен нулю.

Если же $\sigma$ охватывает начало координат, формулой Остроградского пользоваться нельзя, так как дивергенция не всюду существует в области $V$. Поэтому поток будем вычислять непосредственно. Для этого построим сферу $\sigma_R$ с центром в начале координат такого радиуса $R$, чтобы она полностью помещалась внутри поверхности $\sigma$. Между сферой и $\sigma$ дивергенция равна нулю, так как в этой области нет начала координат. Тогда поток поля через составную замкнутую поверхность $\sigma \cup \sigma_R$, ограничивающую пространство между сферой и $\sigma$, по формуле Остроградского равен нулю:

$$\iint\limits_{\sigma} \mathbf{E}\mathbf{n} \, d\sigma + \iint\limits_{\sigma_R} \mathbf{E} \left(-\mathbf{n}\right) \, d\sigma = 0,$$

причем, в интеграле для сферы берется внутренняя нормаль $-\mathbf{n}$, которая является внешней нормалью для поверхности $\sigma \cup \sigma_R$. Переписывая уравнение в виде

$$\iint\limits_{\sigma} \mathbf{E}\mathbf{n} \, d\sigma = \iint\limits_{\sigma_R} \mathbf{E}\mathbf{n} \, d\sigma,$$

получаем, что потоки через поверхность $\sigma$ и сферу $\sigma_R$ в направлении их внешних нормалей (направленных от начала координат) равны. Следовательно, можно заменить вычисление потока через $\sigma$ его вычислением через сферу, учитывая, что для сферы $\mathbf{n} = \mathbf{r}/\left|\mathbf{r}\right|$, а $\left|\mathbf{r}\right| = R$. Поэтому

$$\mathbf{E} = e \, \frac{\mathbf{r}}{\left|\mathbf{r}\right|^3} = \frac{e}{\left|\mathbf{r}\right|^2} \cdot \frac{\mathbf{r}}{\left|\mathbf{r}\right|} = \frac{e}{R^2} \cdot \mathbf{n}, \quad \mathbf{E}\mathbf{n} = \frac{e}{R^2},$$

а искомый поток равен

$$\iint\limits_{\sigma} \mathbf{E}\mathbf{n} \, d\sigma = \frac{e}{R^2} \iint\limits_{\sigma_R} d\sigma = \frac{4\pi R^2 e}{R^2} = 4\pi e.$$

Применяя полученный результат и принцип суперпозиции к полю (П28), получим, что для поверхности $\sigma$, охватывающей все $n$ зарядов, поток выражается формулой

$$\iint\limits_{\sigma} \mathbf{E}\mathbf{n} \, d\sigma = 4\pi \sum_{i=1}^{n} e_i. \tag{П29}$$

[†] Из линейности уравнений Максвелла следует, что для электрических и магнитных полей можно пользоваться *принципом суперпозиции*, который заключается в том, что одновременное воздействие таких полей на некоторый объект представимо в виде суммы их воздействий.

*Плотность зарядов*

Максвелл предложил считать, что полученная формула справедлива не только для дискретного распределения зарядов, но и для непрерывного. Пусть в достаточно малом объеме $dV$ находится достаточно большое количество зарядов $de$. Поскольку расстояния между зарядами малы, чисто математически удобно заменить истинное дискретное распределение зарядов умозрительным непрерывным распределением с *плотностью зарядов*

$$\rho\left(\mathbf{r}\right)=\frac{de}{dV}. \tag{П30}$$

Тогда формула (П29) преобразуется в следующее равенство:

$$\iint\limits_{\sigma}\mathbf{En}\,d\sigma=4\pi\iiint\limits_{V}\rho\left(\mathbf{r}\right)\,dV, \tag{П31}$$

где $V$ — объем, ограниченный поверхностью $\sigma$, а тройной интеграл представляет собой суммарный заряд в области $V$. В формуле (П29) сумма тоже представляет собой суммарный заряд, так что имеется полная аналогия между формулами (П29) и (П31).

Следует также отметить, что для системы точечных зарядов плотность может быть записана в виде

$$\rho\left(\mathbf{r}\right)=\sum_{i=1}^{n}e_i\delta\left(\mathbf{r}-\mathbf{r}_i\right), \tag{П32}$$

то есть она равна нулю вне точек расположения зарядов и равна $e_i$ в точках $M_i$. Подставляя это выражение для плотности в равенство (П31), получим формулу (П29).

Для получения второго уравнения Максвелла используем формулу инвариантного определения дивергенции[†]

$$\nabla\cdot\mathbf{E}\left(M\right)=\lim_{V\to M}\frac{\iint\limits_{\sigma}\mathbf{En}\,d\sigma}{V},$$

в которой заменим числитель правой частью равенства (П31):

$$\nabla\cdot\mathbf{E}\left(M\right)=4\pi\lim_{V\to M}\frac{\iiint\limits_{V}\rho\left(\mathbf{r}\right)\,dV}{V}.$$

Предел является плотностью заряда в точке $M$, поэтому для любой точки $M$ выполняется (П17):

$$\nabla\cdot\mathbf{E}=4\pi\rho.$$

Второе уравнение Максвелла, говорит о том, что *дивергенция (плотность потока в точке) лишь тогда не равна нулю, когда в этой точке не равна нулю плотность зарядов*. Или по-другому, на основании формулы (П31): *если в некотором объеме суммарный заряд не равен нулю, то и поток через поверхность, ограничивающую этот объем, не равен нулю.*

***Третье уравнение Максвелла.***

*Закон Био-Савара*

В 1820 г. был установлен закон Био-Савара:

$$d\mathbf{B}=ki\,\frac{d\mathbf{l}\times\mathbf{r}}{\left|\mathbf{r}\right|^3}, \tag{П33}$$

[†] Лекция «Ротор и дивергенция».

где $d\mathbf{B}$ — магнитная индукция, которая является силовой характеристикой магнитного поля и определяется, исходя из силового действия магнитного поля на электрический заряд, на малый элемент проводника с током, либо на небольшую рамку с током; $k$ — коэффициент пропорциональности; $i$ — ток, который проходит через элемент проводника $d\mathbf{l}$; $\mathbf{r}$ — вектор, проведенный от $d\mathbf{l}$ к текущей точке пространства. Таким образом, этот закон констатирует, что проходящий по проводнику ток возбуждает магнитное поле и показывает, каким это поле будет.

### *Плотность тока. Уравнение непрерывности*

Чтобы представить закон Био-Савара в интегральной форме, вводят понятие *вектора плотности тока* $\mathbf{I}$, который представляет собой поток зарядов, которые проходят в единицу времени через площадку, имеющую единичную площадь и перпендикулярную потоку. Тогда количество зарядов, протекающих через малую площадку $\Delta s$ за единицу времени (поток зарядов), равно

$$\mathbf{In}\,\Delta s.$$

Полный поток зарядов через некоторую поверхность $\sigma$ равен

$$J = \iint\limits_{\sigma} \mathbf{In}\, d\sigma \tag{П34}$$

и называется *полным током* через поверхность.

Один из основных законов физики говорит о том, что *электрический заряд неуничтожим*: он не исчезает и не создается. Заряды могут перемещаться в пространстве, но не возникают из ничего и не исчезают в никуда. Поэтому, если через замкнутую поверхность $\sigma$ существует положительный поток (П34), то заряд $e$ внутри этой поверхности должен убывать. Какое количество электричества вышло за пределы $\sigma$, на столько же должен уменьшиться заряд $e$, т. е. на величину $-de/dt$. В результате получаем формулу

$$\iint\limits_{\sigma} \mathbf{In}\, d\sigma = -\frac{de}{dt},$$

которая называется *уравнением непрерывности* и выражает закон сохранения заряда в интегральной форме.

Пусть $\sigma$ ограничивает объем $V$. Применяя формулу Остроградского, найдем, что

$$\iint\limits_{\sigma} \mathbf{In}\, d\sigma = \iiint\limits_{V} \nabla\cdot\mathbf{I}\, dV = -\frac{de}{dt}. \tag{П35}$$

Из определения плотности зарядов (П30) следует, что заряд $e$ можно представить в виде тройного интеграла, и предыдущая формула примет вид

$$\iiint\limits_{V} \nabla\cdot\mathbf{I}\, dV = -\frac{d}{dt}\iiint\limits_{V} \rho\, dV = -\iiint\limits_{V} \frac{\partial\rho}{\partial t}\, dV.$$

Значит, в силу произвольности области $V$ справедлива дифференциальная форма уравнения непрерывности:

$$\nabla\cdot\mathbf{I} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0. \tag{П36}$$

В случае *постоянного тока* количество электричества, втекающего в любой элемент объема, должно равняться количеству электричества, вытекающего из него. Следовательно, поток (П34) должен быть равен нулю. Вследствие (П35) тогда

$$\iiint\limits_V \nabla \cdot \mathbf{I}\, dV = 0$$

и снова в силу произвольности области $V$ получаем

$$\nabla \cdot \mathbf{I} = \mathbf{0}. \tag{П37}$$

В соответствии с (П36) и (П37) приходим к выводу, что

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0.$$

Это означает, что *для постоянных токов плотность заряда во всех точках пространства одинакова*.

*Вычисление ротора магнитной индукции*

В формуле Био-Савара (П33) выполним небольшое преобразование:

$$i d\mathbf{l} \times \mathbf{r} \approx |\mathbf{I}|\, \Delta s\, d\mathbf{l} \times \mathbf{r} = |\mathbf{I}|\, \Delta s\, |d\mathbf{l}|\, \frac{d\mathbf{l}}{|d\mathbf{l}|} \times \mathbf{r} = |\mathbf{I}|\, \mathbf{n}\, \Delta s\, |d\mathbf{l}| \times \mathbf{r}.$$

Поскольку ток течет вдоль проводника, вектор $\mathbf{I}$ имеет направление вектора $d\mathbf{l}$, как и вектор $\mathbf{n} = d\mathbf{l}/|d\mathbf{l}|$, поэтому $|\mathbf{I}|\mathbf{n} = \mathbf{I}$. Продолжая преобразование, получим, что

$$i d\mathbf{l} \times \mathbf{r} \approx \mathbf{I}\Delta s\, |d\mathbf{l}| \times \mathbf{r} = (\mathbf{I} \times \mathbf{r})\, \Delta V, \tag{П38}$$

где $\Delta V = \Delta s\, |d\mathbf{l}| = \Delta x\, \Delta y\, \Delta z$ —элемент объема. Теперь формуле (П33) можно придать вид

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = k \iiint\limits_V \mathbf{I}(\mathbf{r}') \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}\, dV'. \tag{П39}$$

Здесь $\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$ – радиус-вектор точки, в которой вычисляется вектор магнитной индукции; $\mathbf{r}' = x'\,\mathbf{i} + y'\,\mathbf{j} + z'\,\mathbf{k}$ – радиус-вектор точки, по которой проводится интегрирование и в которой вычисляется плотность тока; $dV' = dx'\, dy'\, dz'$.

Докажем, что

$$\mathbf{I}(\mathbf{r}') \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = \nabla \times \frac{\mathbf{I}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \tag{П40}$$

где оператор $\nabla$ действует на $\mathbf{r}$. Действительно, если $\mathbf{I}(\mathbf{r}') = I_1(\mathbf{r}')\,\mathbf{i} + I_2(\mathbf{r}')\,\mathbf{j} + I_1(\mathbf{r}')\,\mathbf{k}$, то, используя (П9), получим

$$\nabla \times \frac{\mathbf{I}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \dfrac{I_1(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} & \dfrac{I_2(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} & \dfrac{I_3(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \end{vmatrix} = \left(-\frac{I_3(\mathbf{r}')\,(y - y')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} + \frac{I_2(\mathbf{r}')\,(z - z')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}\right)\mathbf{i} -$$

$$-\left(-\frac{I_3(\mathbf{r}')\,(x - x')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} + \frac{I_1(\mathbf{r}')\,(z - z')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}\right)\mathbf{j} + \left(-\frac{I_2(\mathbf{r}')\,(x - x')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} + \frac{I_1(\mathbf{r}')\,(y - y')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}\right)\mathbf{k} =$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ I_1(\mathbf{r}') & I_2(\mathbf{r}') & I_3(\mathbf{r}') \\ \dfrac{x-x'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} & \dfrac{y-y'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} & \dfrac{z-z'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} \end{vmatrix} = \mathbf{I}(\mathbf{r}') \times \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}.$$

Следовательно, равенство (П39) принимает вид

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = k\left(\nabla \times \iiint\limits_V \frac{\mathbf{I}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,dV'\right).$$

Возьмем ротор от обеих частей равенства, применяя свойство 17° операции взятия ротора от ротора:

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) = k\left[\nabla \times \left(\nabla \times \iiint\limits_V \frac{\mathbf{I}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,dV'\right)\right] = \tag{П41}$$
$$= k\nabla \cdot \iiint\limits_V \mathbf{I}(\mathbf{r}')\,\nabla\left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right)\,dV' - k\iiint\limits_V \mathbf{I}(\mathbf{r}')\,\Delta\left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right)\,dV'.$$

Обозначим $\nabla'$ оператор набла, действующий не по переменным $x$, $y$, $z$, а по переменным $x'$, $y'$, $z'$. Очевидно, что

$$\nabla\left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right) = -\nabla'\left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right).$$

Учитывая это и формулу (П11), из формулы (П41) получим, что

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) = -k\nabla \cdot \iiint\limits_V \mathbf{I}(\mathbf{r}')\,\nabla'\left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right)\,dV' + 4\pi k\mathbf{I}(\mathbf{r}). \tag{П42}$$

### *Интегрирование по частям в тройном интеграле*

Чтобы двигаться дальше, докажем следующее утверждение.

**Лемма 1.** *Справедлива формула интегрирования по частям в тройном интеграле:*

$$\iiint\limits_V \mathbf{u}\cdot\nabla v\,dV = -\iiint\limits_V v\,(\nabla\cdot\mathbf{u})\,dV + \iint\limits_\sigma v\mathbf{u}\mathbf{n}\,d\sigma, \tag{П43}$$

*где* $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}$ *— векторное,* $v$ *— скалярное поля,* $\sigma$ *— поверхность, ограничивающая объем* $V$.

*Доказательство.* Пусть поверхность $\sigma$ ограничена сверху поверхностью $\psi(x,y)$, а снизу — поверхностью $\varphi(x,y)$. Применим формулу интегрирования по частям в определенном интеграле по переменной $z$ к такому интегралу:

$$\iiint\limits_V u_3\frac{\partial v}{\partial z}\,dV = -\iiint\limits_V v\frac{\partial u_3}{\partial z}\,dV + \iint\limits_{D_{xy}}\left(u_3v|_{z=\psi(x,y)} - u_3v|_{z=\varphi(x,y)}\right)\,dS, \tag{П44}$$

где $D_{xy}$ — проекция поверхности $\sigma$ на плоскость $xOy$. В силу формулы, связывающей двойной интеграл с потоком[†], можно записать, что

$$dS = n_3\,d\sigma,$$

[†]Лекция «Поток векторного поля», формула (3).

где $n_3$ — компонента вектора внешней нормали $\mathbf{n} = n_1\mathbf{i}+n_2\,\mathbf{j}+n_3\,\mathbf{k}$ к поверхности $\sigma$, и поэтому

$$\iint\limits_{D_{xy}} \left( u_3 v|_{z=\psi(x,y)} - u_3 v|_{z=\varphi(x,y)} \right) dS = \iint\limits_{D_{xy}} u_3 v|_{z=\psi(x,y)}\; dS - \iint\limits_{D_{xy}} u_3 v|_{z=\varphi(x,y)}\; dS =$$
$$= \iint\limits_{z=\psi(x,y)} u_3 v n_3\, d\sigma + \iint\limits_{z=\varphi(x,y)} u_3 v n_3\, d\sigma = \iint\limits_{\sigma} u_3 v n_3\, d\sigma,$$

так как на нижней стороне поверхности $\sigma$ нормаль образует тупой угол с осью $Oz$. Таким образом, формулу (П44) можно переписать в виде

$$\iiint\limits_V u_3 \frac{\partial v}{\partial z}\, dV = - \iiint\limits_V v\, \frac{\partial u_3}{\partial z}\, dV + \iint\limits_{\sigma} u_3 v n_3\, d\sigma.$$

Аналогичным способом можно получить еще две формулы:

$$\iiint\limits_V u_2 \frac{\partial v}{\partial y}\, dV = - \iiint\limits_V v\, \frac{\partial u_2}{\partial y}\, dV + \iint\limits_{\sigma} u_2 v n_2\, d\sigma,$$
$$\iiint\limits_V u_1 \frac{\partial v}{\partial x}\, dV = - \iiint\limits_V v\, \frac{\partial u_1}{\partial x}\, dV + \iint\limits_{\sigma} u_1 v n_1\, d\sigma.$$

Складывая все три, придем к (П43). □

**Следствие 1.** *Если на поверхности $\sigma$ поле $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ или функция $v = 0$, то формула* (П43) *принимает вид*

$$\iiint\limits_V \mathbf{u} \cdot \nabla v\, dV = - \iiint\limits_V v\, (\nabla \cdot \mathbf{u})\; dV. \tag{П45}$$

*Продолжение вычисления ротора магнитной индукции*

Поскольку мы изучаем магнитное поле, возникающее вокруг движения токов, то естественно считать, что эти токи находятся в ограниченной замкнутой области пространства, вне которой токов нет: $\mathbf{I}\,(\mathbf{r}) = 0$. Поэтому можно считать, что в формуле (П42) плотность тока равна нулю вне области $V$, в том числе и на ее границе $\sigma$. В этом случае применима формула (П45) и выражение для ротора магнитной индукции (П42) становится таким:

$$\nabla \times \mathbf{B}\,(\mathbf{r}) = k\nabla \cdot \iiint\limits_{V'} \frac{\nabla' \cdot \mathbf{I}\,(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}\, dV' + 4\pi k \mathbf{I}\,(\mathbf{r})\,.$$

Поскольку мы рассматриваем постоянные токи, то в силу (П37) полученное уравнение упрощается до

$$\nabla \times \mathbf{B} = 4\pi k \mathbf{I} = \frac{4\pi}{c}\, \mathbf{I}. \tag{П46}$$

Мы заменили $k$ на $1/c$ (эксперименты доказали правомерность такой замены) и получили уравнение уже довольно похожее на третье уравнение Максвелла — не хватает одного слагаемого. Дело в том, что уравнение (П46) справедливо только для постоянного тока и замкнутых контуров.

Чтобы убедиться в этом, считая ток переменным, возьмем дивергенцию от обеих частей (П46), учитывая, что по свойству 16° дивергенция ротора всегда равна нулю:

$$\nabla \cdot \mathbf{I} = 0. \tag{П47}$$

Тогда из уравнения непрерывности (П36) последует, что

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \tag{П48}$$

Но в общем случае переменных полей плотность зарядов вовсе не обязана быть постоянной, в чем и кроется ограниченность применения уравнения (П46).

*Ток смещения*

Для устранения возникшего противоречия, добавим к правой части (П46) еще одно слагаемое:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{I} + \frac{1}{c}\mathbf{K}. \tag{П49}$$

Возьмем дивергенцию от обеих частей нового уравнения:

$$0 = \frac{4\pi}{c}\nabla \cdot \mathbf{I} + \frac{1}{c}\nabla \cdot \mathbf{K}. \tag{П50}$$

Используя уравнения (П17) и (П36), видоизменим первое слагаемое в правой части:

$$\frac{4\pi}{c}\nabla \cdot \mathbf{I} = -\frac{4\pi}{c} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial}{\partial t}\nabla \cdot \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}.$$

Тогда из (П50) получим, что

$$\frac{1}{c}\nabla \cdot \left(-\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{K}\right) = 0.$$

Самым простым решением этого уравнения будет

$$\mathbf{K} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \tag{П51}$$

хотя, если к правой части прибавить ротор какого-нибудь поля, то и это будет решением. Максвелл ограничился добавкой (П51) и оказался прав: ни один из экспериментов не выявил дефектов в третьем уравнении его имени. Подставив выражение (П51) для тока в равенство (П49), мы и придем к уравнению (П18). Да, еще надо заменить магнитную индукцию $\mathbf{B}$ на напряженность магнитного поля $\mathbf{H}$, в системе СГС это взаимозаменяемо для тех задач, которые мы рассматриваем.

Того же самого можно добиться, заменив в равенстве (П46) плотность тока следующей суммой:

$$\mathbf{I} \to \mathbf{I} + \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}.$$

Добавочный член в этой формуле называют *плотностью тока смещения*. *Током смещения* сквозь некоторую поверхность называется поток плотности тока смещения через эту поверхность. Это название — чисто условное. Ток смещения не связан с перемещением каких-либо частиц и по сути током не является, фактически он представляет собой изменяющееся электромагнитное поле. В частности, он не подчиняется закону Джоуля-Ленца, гласящему, что прохождение тока сопровождается выделением теплоты.

Учет токов смещения приводит к тому, что цепи переменных токов становятся замкнутыми. Ток смещения «течет», например, между обкладками заряжающегося или разряжающегося конденсатора.

*Обобщение законов Ампера и Био-Савара*

Поскольку третье уравнение Максвелла мы вывели из закона Био-Савара, то это уравнение Максвелла является обобщением этого закона. Но оно обобщает и закон Ампера, который записывается в виде

$$\int\limits_{\mathcal{L}} \mathbf{B}\, d\mathbf{r} = \frac{4\pi}{c}\, J,$$

где $\mathcal{L}$ — контур, охватывающий полный ток (алгебраическую сумму токов) $J$. Обращаясь к определению полного тока (П34) и применяя формулу Стокса, придем к равенству

$$\iint\limits_{\sigma} (\nabla \times \mathbf{B})\, \mathbf{n}\, d\sigma = \frac{4\pi}{c} \iint\limits_{\sigma} \mathbf{I}\mathbf{n}\, d\sigma,$$

где $\sigma$ — поверхность, натянутая на контур $\mathcal{L}$. В силу произвольности как этой поверхности, так и контура, получим уравнение

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c}\, \mathbf{I},$$

т. е. уравнение (П46), из которого и было затем выведено третье уравнение Максвелла.

Это уравнение показывает, что любое изменяющееся во времени электрическое поле (то ли ток проводимости изменяется, то ли ток смещения, то ли оба вместе), создает магнитное поле.

### *Четвертое уравнение Максвелла.*

Это уравнение всего лишь отражает тот экспериментальный факт, что магнитное поле соленоидально: линии магнитной напряженности нигде не начинаются и нигде не заканчиваются, они образуют замкнутые кривые. В отличие от второго уравнения Максвелла, которое свидетельствует о существовании электрических зарядов, на которых начинаются и заканчиваются линии электрической напряженности, четвертое уравнение в области магнетизма утверждает прямо противоположное: никаких магнитных зарядов в природе не существует. Если считать таковыми северный и южный полюса магнита, то последние невозможно разделить, так же, как, например, разделяются положительные и отрицательные заряды, существующие сами по себе. Противоположные полюса отдельно друг от друга не наблюдались.

Впрочем, этим рассуждениям можно придать и математический вид. Для этого возьмем дивергенцию от обеих частей первого уравнения Максвелла (П16), при этом дивергенция ротора в левой части даст 0, и тогда, приравнивая нулю правую часть, получим

$$\nabla \cdot \left( -\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \right) = -\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{H}) = 0,$$

или

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = \mathrm{const}\,.$$

Так как, когда магнитного поля не было, выполнялось $\nabla \cdot \mathbf{H} = 0$, то и вообще

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0.$$

# ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ НА ОСНОВЕ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА

С этого момента будем считать, что уравнения Максвелла нам даны свыше, и нам предстоит вывести из них всю теорию электромагнитного поля.

Шучу! Это невозможно хотя бы потому, что развитие электромагнитной науки не останавливается, и максвелловская теория находит и будет находить еще множество применений. Поэтому обойдемся выводом некоторых общеизвестных электромагнитных истин. Просто, чтобы убедиться, что теория Максвелла «работает», «работает» эффективно и находит применение в самых разных приложениях.

## *Электростатика*

В этом случае поля напряженностей не изменяются во времени, производные от них по $t$ равны нулю и для простых расчетов достаточно взять первые два уравнения:

$$\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0}, \tag{П52}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho. \tag{П53}$$

Из уравнения (П52) следует, что электростатическое поле потенциально, так что существует потенциальная функция $u\,(x, y, z)$, удовлетворяющая соотношению

$$\mathbf{E} = -\nabla u. \tag{П54}$$

Знак минус означает, что напряженность поля направлена в сторону быстрейшего убывания поля $\mathbf{E}$ (так условились физики). Взяв дивергенцию от обеих частей равенства, получим

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = -\nabla \cdot \nabla u.$$

В силу (П53) из этого следует уравнение Пуассона (П12) вида

$$\Delta u = -4\pi\rho. \tag{П55}$$

Используя это уравнение, получим потенциальную функцию, электрическую напряженность системы точечных зарядов и закон Кулона.

*Потенциальная функция системы точечных электрических зарядов*

Пусть имеется система электрических зарядов с плотностью зарядов (П32). Подставим последнюю в уравнение (П55), а затем правую часть полученного равенства – в решение уравнения Пуассона (П13):

$$u\,(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_V \frac{-4\pi\sum_{i=1}^n e_i\delta\,(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_i)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|}\,dV_0 = \sum_{i=1}^n e_i \iiint\limits_V \frac{\delta\,(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_i)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|}\,dV_0 =$$

$$= \sum_{i=1}^n e_i\,\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|}.$$

*Электрическая напряженность системы точечных электрических зарядов.*

Подставим полученный потенциал в формулу (П54) и учтем свойство (П10):

$$\mathbf{E} = -\nabla\sum_{i=1}^n e_i\,\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|} = -\sum_{i=1}^n e_i\nabla\,\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|} = \sum_{i=1}^n e_i\,\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3}.$$

Конечно, это выражение для напряженности совпадает с формулой (П28).

*Закон Кулона*

Напряженность поля для одиночного заряда $e$, как это видно из последней формулы, имеет вид

$$\mathbf{E} = e\,\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_1|^3}.$$

Поскольку сила, действующая на заряд, определяется равенством (П25), то справедлив закон Кулона

$$\mathbf{F} = qe\,\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_1|^3},$$

ср. с (П26).

*Поле диполя*

Пару раз на лекциях мы решали задачи, в которых фигурировал электрический диполь. Это очень важный физический объект, который используется как в теоретических изысканиях при изучении, например, распространения электромагнитных волн, так и в практических приложениях.

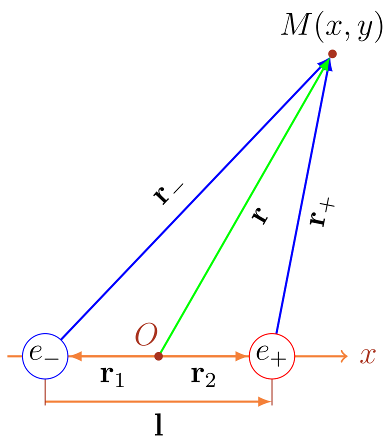


Рис. 5. Диполь.

Диполь представляет собой систему из двух зарядов, $e_- = -e$ и $e_+ = e > 0$, которую мы поместим на ось абсцисс так, чтобы начало координат совпало с серединой отрезка, концами которого являются заряды, рис. 5. Пусть $\mathbf{l}$ — вектор, идущий от заряда $e_-$ к заряду $e_+$; $\mathbf{r}_-$ — вектор, ведущий от $e_-$ к текущей точке $M$, для которой и будет вычисляться потенциал и напряженность поля диполя; $\mathbf{r}_+$ — такой же вектор для заряда $e_+$.

Потенциал диполя тогда может быть рассчитан по формуле потенциала для системы из двух точечных зарядов:

$$u(\mathbf{r}) = -\frac{e}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_1|} + \frac{e}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_2|} = -\frac{e}{|\mathbf{r}_-|} + \frac{e}{|\mathbf{r}_+|} = \\ = e\,\frac{|\mathbf{r}_-|-|\mathbf{r}_+|}{|\mathbf{r}_-|\,|\mathbf{r}_+|}.$$

Однако точное значение потенциала не так интересно, как приближенное, когда точка $M$ удалена достаточно далеко от диполя, так что можно считать величину $|\mathbf{l}|$ намного меньшей длины вектора $\mathbf{r}$. В этом случае можно пользоваться приближенными равенствами $|\mathbf{r}_-| \approx |\mathbf{r}| \approx |\mathbf{r}_+|$. Кроме того, приближенно

$$|\mathbf{r}_-| - |\mathbf{r}_+| = \frac{\mathbf{r}_-^2}{|\mathbf{r}_-|} - \frac{\mathbf{r}_+^2}{|\mathbf{r}_+|} = \frac{\mathbf{r}_-\mathbf{r} - \mathbf{r}_+\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} = \frac{\mathbf{r}\,(\mathbf{r}_- - \mathbf{r}_+)}{|\mathbf{r}|} = \frac{\mathbf{l}\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|},$$

так как $\mathbf{l} = \mathbf{r}_- - \mathbf{r}_+$, ибо $\mathbf{r}_- = \mathbf{l} + \mathbf{r}_+$.

Тогда из предыдущей формулы для потенциала получим

$$u(\mathbf{r}) = e\,\frac{|\mathbf{r}_-|-|\mathbf{r}_+|}{|\mathbf{r}_-|\,|\mathbf{r}_+|} \approx e\,\frac{\mathbf{l}\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}.$$

Величина $\mathbf{p} = e\mathbf{l}$ называется *моментом диполя* и, следовательно, потенциал диполя выражается приближенным равенством

$$u(\mathbf{r}) \approx \frac{\mathbf{p}\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}.$$

Таким образом, определяющим в поведении диполя является его момент и радиус-вектор точки $M$.

Чтобы найти электрическую напряженность поля диполя, снова обратимся к соответствующей формуле для системы из двух точечных зарядов:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -e\,\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_1|^3} + e\,\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_2|^3} = -e\,\frac{\mathbf{r}_-}{|\mathbf{r}_-|^3} + e\,\frac{\mathbf{r}_+}{|\mathbf{r}_+|^3}.$$

Вновь постараемся найти приближенное значение величины, исходя из того, что $|\mathbf{l}| \ll |\mathbf{r}|$:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) \approx e\,\frac{\mathbf{r}_+|\mathbf{r}_-|^3 - \mathbf{r}_-|\mathbf{r}_+|^3}{|\mathbf{r}|^6} \approx e\,\frac{|\mathbf{r}|^3(\mathbf{r}_+ - \mathbf{r}_-)}{|\mathbf{r}|^6} = e\,\frac{-\mathbf{l}}{|\mathbf{r}|^3} = -\frac{e\mathbf{l}}{|\mathbf{r}|^3},$$

или

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) \approx -\frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{r}|^3}.$$

### *Постоянное магнитное поле*

Предположим, что напряженность электрического поля не меняется со временем: $\partial\mathbf{E}/\partial t = 0$, тогда третье и четвертое уравнение Максвелла дают систему из двух уравнений вида

$$\nabla\times\mathbf{H} = \frac{4\pi\mathbf{I}}{c}, \tag{П56}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{H} = 0. \tag{П57}$$

Применив к обеим частям первого уравнения операцию дивергенции:

$$\nabla\cdot\mathbf{I} = 0,$$

что свидетельствует о стационарности токов. Из уравнения непрерывности (П36) тогда следует, что $\partial\rho/\partial t = 0$, то есть плотность зарядов неизменна.

*Закон Ампера для полного тока*

Взяв поток от обеих частей уравнения (П56), применив формулы Стокса и (П34) и вспомнив, что у нас $\mathbf{H} = \mathbf{B}$, получим закон Ампера для полного тока:

$$\iint\limits_{\sigma} (\nabla\times\mathbf{B})\,\mathbf{n}\,d\sigma = \frac{4\pi}{c}\iint\limits_{\sigma} \mathbf{In}\,d\sigma,$$

$$\int\limits_{\mathcal{L}} \mathbf{B}\,d\mathbf{r} = \frac{4\pi}{c}\,J.$$

*Закон Био-Савара*

Из уравнения (П57) следует, что для поля $\mathbf{B}$ существует векторный потенциал $\mathbf{A}$, для которого $\mathbf{B} = \nabla\times\mathbf{A}$. Чтобы найти поле $\mathbf{A}$, подставим это выражение в уравнение (П56) и применим свойство 17° операции второго порядка:

$$\nabla\times(\nabla\times\mathbf{A}) = \nabla\cdot(\nabla\cdot\mathbf{A}) - \triangle\mathbf{A} = \frac{4\pi\mathbf{I}}{c},$$

где $\triangle \mathbf{A} = (\nabla \cdot \nabla)\, \mathbf{A}$. Так как поле $\mathbf{A}$ определяется неоднозначно[†], положим $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$, тогда

$$\triangle \mathbf{A} = -\frac{4\pi \mathbf{I}}{c}.$$

Фактически получили систему из трех скалярных уравнений Пуассона для определения компонент поля $\mathbf{A}$. Используя решение (П13) для скалярного уравнения, получим

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \iiint\limits_V \frac{\mathbf{I}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}\, dV'. \tag{П58}$$

Тогда в силу (П40)

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{c} \iiint\limits_V \nabla \times \frac{\mathbf{I}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}\, dV' = \frac{1}{c} \iiint\limits_V \mathbf{I}(\mathbf{r}') \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}\, dV',$$

откуда следует закон-Био-Савара с элементом объема:

$$d\mathbf{B} = \frac{1}{c} \cdot \mathbf{I}(\mathbf{r}') \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}\, dV'.$$

Если перейти к проводнику с током и выполнить обратное к (П38) преобразование, получим закон Био-Савара в более привычной форме (П33):

$$d\mathbf{B} = \frac{i}{c} \cdot \frac{d\mathbf{l} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}.$$

### *Силы Лоренца и Ампера*

Имея возможность рассчитать магнитную индукцию по закону Био-Савара, можно найти силы, действующие как на отдельно движущийся заряд, так и на проводник с током.

В конце 19 в. было экспериментально обнаружено, что сила $\mathbf{F}$, с какой электромагнитное поле действует на заряд $e$, движущийся со скоростью $\mathbf{v}$, выражается равенством

$$\mathbf{F} = e\left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{B}}{c}\right). \tag{П59}$$

Эту силу называют *силой Лоренца*.

Пусть имеется проводник, помещенный в магнитное поле $\mathbf{B}$, а стороннее электрическое поле $\mathbf{E}$ отсутствует. Носители зарядов испытывают действие силы Лоренца, поэтому для отдельного носителя можно записать действующую на него силу в виде

$$\mathbf{F}_e = \frac{e}{c}\left[(\mathbf{v} + \mathbf{u}) \times \mathbf{B}\right],$$

где $\mathbf{v}$ — скорость хаотического движения носителей, $\mathbf{u}$ — скорость их дрейфа. Усредняя силы и скорости по всем носителям и учитывая, что средняя скорость хаотического движения равна нулевому вектору, получим, что

$$\langle \mathbf{F}_e \rangle = \frac{e}{c}\left[(\langle \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{u} \rangle) \times \mathbf{B}\right] = \frac{e}{c}\left(\langle \mathbf{u} \rangle \times \mathbf{B}\right),$$

[†]Если $\mathbf{A}$ удовлетворяет равенству $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, то и поле $\mathbf{A} + \nabla\alpha$, где $\alpha$ — любое скалярное поле, тоже будет удовлетворять этому равенству, поскольку ротор градиента равен нулевому вектору (свойство 14°).

где $\langle\cdot\rangle$ — оператор усреднения. Обозначив $S$ сечение проводника, $n$ концентрацию носителей в единице объема и $d\mathbf{l}$ элемент длины проводника, получим, что на элемент объема $dV = S\ |d\mathbf{l}|$ действует сила

$$d\mathbf{F} = \frac{e}{c}\, n\, (\mathbf{u}\times\mathbf{B})\, S\ |d\mathbf{l}| = \frac{1}{c}\, (\mathbf{I}\times\mathbf{B})\ dV, \tag{П60}$$

так как

$$\mathbf{I} = en\mathbf{u}, \tag{П61}$$

потому что плотность тока по определению равна количеству зарядов, которые проходят в единицу времени через площадку, имеющую единичную площадь и перпендикулярную потоку.

Равенство (П60) носит название закона Ампера. Однако чаще используется закон Ампера для тонкого проводника с током. Чтобы получить его, используем равенство (П38), в котором $\mathbf{r}$ заменим на $\mathbf{B}$:

$$d\mathbf{F} = \frac{i}{c}\, (d\mathbf{l}\times\mathbf{B})\, .$$

*Закон Фарадея*

Этот закон выводится из первого уравнения Максвелла «обратным ходом», идя от уравнения (П23) к уравнению (П20).

### ***Законы постоянного тока***

*Закон Ома*

Пусть ток $i$ в проводнике вызывает электрическое поле $\mathbf{E}$. Существует эмпирическая формула, связывающая поле $\mathbf{E}$ и плотность тока $\mathbf{I}$ в проводнике:

$$\mathbf{I} = \gamma\mathbf{E}, \tag{П62}$$

где $\gamma$ — удельная электрическая проводимость вещества проводника. Формулу (П62) называют *законом Ома в дифференциальной форме*.

Так как мы рассматриваем постоянный ток, который неизменен во времени, то в силу выписанного закона Ома электрическое поле тоже не должно зависеть от времени. Тогда третье уравнение Максвелла (П18) становится уравнением (П46), из которого, как мы видели, следует свойство неизменности зарядов (П48). В результате второе уравнение Максвелла (П17) становится первым уравнением системы

$$\begin{aligned} \nabla\cdot\mathbf{E} &= 0, \\ \nabla\times\mathbf{E} &= \mathbf{0}, \end{aligned}$$

а ее второе уравнение вытекает из уравнения Максвелла (П16), поскольку при постоянном токе изменяющиеся во времени магнитные поля отсутствуют.

Выписанные уравнения показывают, что поле $\mathbf{E}$ является и потенциальным, и соленоидальным, то есть гармоническим полем. Значит, существует потенциальная функция $u$, являющаяся решением уравнения Лапласа (10). Но решением этого уравнения является и постоянная функция. Поэтому выписанные уравнения не различают цепи с током и обесточенные, так как при постоянном потенциале переток зарядов от точек с большим потенциалом к точкам с меньшим потенциалом не происходит. И даже при наличии таких точек после перетока зарядов потенциал выравнивается до постоянного значения и ток исчезает. Поэтому для поддержания тока в цепи требуется наличие специального устройства, способного создавать и поддерживать разность потенциалов. Такие устройства называют *источниками тока* (например, ими могут быть обычные батарейки). Математически это обеспечивается введением в рассмотрение *стороннего* электрического поля и добавлением его напряженности $\mathbf{E}_{\text{ст}}$ в закон Ома (П62):

$$\mathbf{I} = \gamma\left(\mathbf{E} + \mathbf{E}_{\text{ст}}\right). \tag{П63}$$

Проинтегрируем обе части равенства по всему контуру произвольной цепи $\mathcal{L}$:

$$\int\limits_{\mathcal{L}} \mathbf{I}\, d\mathbf{l} = \int\limits_{\mathcal{L}} \gamma \mathbf{E}\, d\mathbf{l} + \int\limits_{\mathcal{L}} \gamma \mathbf{E}_{\text{ст}}\, d\mathbf{l}. \tag{П64}$$

Величина

$$\varepsilon = \int\limits_{\mathcal{L}} \mathbf{E}_{\text{ст}}\, d\mathbf{l} \tag{П65}$$

называется электродвижущей силой (ЭДС) источника тока. Как видим, она является циркуляцией напряженности стороннего поля по замкнутому контуру цепи.

Так как поле $\mathbf{E}$ потенциально, то его циркуляция по любому замкнутому контуру равна нулю и уравнение (П64) упрощается:

$$\varepsilon = \int\limits_{\mathcal{L}} \frac{1}{\gamma}\, \mathbf{I}\, d\mathbf{l}.$$

Перейдем к криволинейному интегралу I рода, учитывая сонаправленность векторов $\mathbf{I}$ и $d\mathbf{l}$ и вводя в формулу площадь поперечного сечения проводника $S$:

$$\varepsilon = \int\limits_{\mathcal{L}} \frac{1}{\gamma S}\, |\mathbf{I}|\, S\, |d\mathbf{l}|\,.$$

Тогда, обозначив

$$dR = \frac{|d\mathbf{l}|}{\gamma S} \tag{П66}$$

*сопротивление* проводника длины $|d\mathbf{l}|$, получим

$$\varepsilon = \int\limits_{\mathcal{L}} |\mathbf{I}|\, S\, dR. \tag{П67}$$

Используем формулу (П34), в которой для проводника вектор $\mathbf{n}$ или перпендикулярен $\mathbf{I}$, или сонаправлен ему. В первом случае поток равен нулю, а во втором $\mathbf{In} = |\mathbf{I}|\,|\mathbf{n}| = |\mathbf{I}|$. Поэтому

$$J = \iint\limits_{\sigma} \mathbf{In}\, d\sigma = |\mathbf{I}| \iint\limits_{\sigma} d\sigma = |\mathbf{I}|\, S, \tag{П68}$$

а формула (П67) становится такой:

$$\varepsilon = J \int\limits_{\mathcal{L}} dR.$$

Интеграл выражает собой полное сопротивление $R_{\text{п}}$ контура с током. В результате получаем закон Ома:

$$\varepsilon = JR_{\text{п}} = J\left(R + r\right), \tag{П69}$$

где $R_{\text{п}}$ — полное, $R$ — внешнее, а $r$ — внутреннее сопротивления цепи.

*Работа и мощность электромагнитного поля*

Работа, как известно, равна произведению силы, действующей на объект, на его перемещение. В случае сложных перемещений и переменных сил это произведение надо интегрировать.

Рассмотрим работу по перемещению заряда $e$ на крошечное расстояние $d\mathbf{r}$. Какая сила может действовать на заряд? Конечно, сила Лоренца (П59), поэтому искомая работа равна

$$W_e = \mathbf{F}\, d\mathbf{r} = e\, d\mathbf{r} \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}\times\mathbf{B}}{c}\right).$$

Переходя к мощности (работе в единицу времени), получим

$$P_e = \mathbf{F}\,\frac{d\mathbf{r}}{dt} = e\,\frac{d\mathbf{r}}{dt}\left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}\times\mathbf{B}}{c}\right),$$

или

$$P_e = \mathbf{F}\mathbf{v} = e\left[\mathbf{v}\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}\,(\mathbf{v}\times\mathbf{B})}{c}\right] = e\mathbf{v}\mathbf{E},$$

так как мощность магнитного поля равна нулю, поскольку сила $\mathbf{v}\times\mathbf{B}$ перпендикулярна направлению движения (а математически – смешанное произведение равно нулю из-за коллинеарности сомножителей).

Если в единице объема содержится $n$ носителей заряда $e$, то мощности складываются и полученная формула становится такой:

$$P = ne\mathbf{v}\mathbf{E}.$$

В силу (П61) приходим к заключительному выражению для мощности

$$P = \mathbf{I}\mathbf{E}. \tag{П70}$$

*Закон Джоуля-Ленца*

Умножим обе части закона Ома в дифференциальной форме (П62) на $\mathbf{I}$:

$$\mathbf{I}^2 = \gamma\mathbf{I}\mathbf{E}.$$

Отсюда и из формулы (П70) получаем еще одно выражение для мощности:

$$P = \mathbf{I}\mathbf{E} = \frac{\mathbf{I}^2}{\gamma}.$$

Эта работа в единицу времени идет на повышение внутренней энергии проводника, то есть на повышение его температуры. Таким образом, приходим к закону Джоуля-Ленца в дифференциальной форме: теплота $\overline{Q}$, выделяемая при движении зарядов в проводнике за единицу времени, определяется формулой

$$\overline{Q} = \frac{\mathbf{I}^2}{\gamma} = \mathbf{I}\mathbf{E}.$$

Пусть участок проводника имеет длину $l$ и площадь поперечного сечения $S$. Тогда мощность тока на этом участке проводника в силу предыдущей формулы и формул (П66) и (П68) равна

$$PSl = Sl\,\frac{\mathbf{I}^2}{\gamma} = \frac{l}{\gamma S}\,\left(|\mathbf{I}|\,S\right)^2 = RJ^2,$$

а теплота, выделяемая данным участком проводника за время $t$, равна работе электрического тока:

$$W = PSlt = RJ^2t.$$

Это — закон Джоуля-Ленца в интегральной форме.

*Правила Кирхгофа*

Окружим узел электрической цепи, к которому сходятся $m$ ветвей цепи, замкнутой поверхностью $\sigma$, ограничивающей собой объем $V$. Используя условие (П37) и формулу Остроградского, получим, что

$$\iiint\limits_V \nabla \cdot \mathbf{I}\,dV = \iint\limits_\sigma \mathbf{I}\,d\sigma = \sum_{k=1}^{m} J_k = 0,$$

так как поток вектора $\mathbf{I}$ как раз и состоит из токов $J_k$, входящих в узел или выходящих из него. Полученное равенство известно как *первое правило Кирхгофа:*

$$\sum_{k=1}^{m} J_k = 0, \tag{П71}$$

т. е. *алгебраическая сумма токов, сходящихся к одному и тому же узлу, равна нулю.* При этом токи, *входящие* в узел, берутся с одним знаком (например, плюсом), а *выходящие* из него — с противоположным знаком (соответственно, минусом).

Если электрическая цепь, состоящая из проводников и источников тока, образует замкнутые контуры, то, пренебрегая внутренними сопротивлениями ЭДС, для каждого контура можно согласно закону Ома (П69) написать

$$\sum_{j=1}^{m} \varepsilon_j = \sum_{k=1}^{n} J_k R_k, \tag{П72}$$

где $\varepsilon_j$ — $j$-я ЭДС, входящая в контур, $R_k$ — $k$-е сопротивление контура, $J_k$ — ток через это сопротивление. ЭДС контура можно заменить суммой ЭДС потому, что напряженность электрического поля подчиняется принципу суперпозиции, см. формулу (П65). Равенство (П72) носит название *второго правила Кирхгофа: алгебраическая сумма ЭДС контура равна алгебраической сумме падений напряжения на омических сопротивлениях.*

При этом ЭДС $\varepsilon_j$ записывается со знаком плюс, если направление соответствующего вектора $\mathbf{E}_{\text{ст}}$ (переход от отрицательного полюса источника тока к положительному) совпадает с направлением обхода контура. В противном случае ставится знак минус.

Перед $J_k R_k$ ставится знак плюс, если положительное направление тока в цепи совпадает с выбранным направлением обхода контура. В противном случае ставится знак минус.

*Последовательное соединение проводников*

Из только что сказанного вытекает, что при последовательном соединении источников тока их ЭДС складываются (алгебраически):

$$\varepsilon = \sum_{j=1}^{m} \varepsilon_j.$$

Поскольку рссматривается постоянный ток, то во всем соединении он одинаков:

$$J = J_1 = \ldots = J_n,$$

поэтому
$$\sum_{k=1}^{n} J_k R_k = \sum_{k=1}^{n} J R_k = J \sum_{k=1}^{n} R_k = JR,$$
откуда
$$R = R_1 + R_2 + \ldots + R_n,$$
где $R$ — общее сопротивление соединения. Таким образом, при последовательном соединении проводников их сопротивления складываются.

*Параллельное соединение проводников*

В этом случае ко всем $n$ ветвям соединения приложена одинаковая ЭДС $\varepsilon$. Применим к каждой такой ветви второе правило Кирхгофа (П72):
$$\varepsilon = J_k R_k.$$
Применим его и для всего параллельного соединения:
$$\varepsilon = JR,$$
где $R$ — общее сопротивление параллельного соединения. Согласно первому правилу Кирхгофа (П71)
$$J = J_1 + J_2 + \ldots + J_n.$$
Из этих равенств получаем, что
$$J = J_1 + J_2 + \ldots + J_n = \frac{\varepsilon}{R_1} + \frac{\varepsilon}{R_2} + \ldots + \frac{\varepsilon}{R_n} = \frac{\varepsilon}{R},$$
откуда
$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \ldots + \frac{1}{R_n}.$$

### ***Переменный электрический ток***

Здесь придется пожертвовать строгостью изложения, дабы не утонуть в различных физических подробностях вроде прохождения электромагнитных волн в веществе, включая их поведение на границе двух сред, квазистационарных электромагнитных полях и тому подобных чрезвычайно, конечно, интересных вещах, но все же достаточно далеко лежащих от целей данного повествования.

Электрическое поле в случае переменных токов уже не может быть, вообще говоря, потенциальным, поэтому в силу уравнения Максвелла (П16)
$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}.$$
Так как магнитное поле соленоидально, вектор $\mathbf{B}$ можно представить в виде ротора другого векторного поля $\mathbf{A}$
$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \tag{П73}$$
так что предыдущее уравнение станет таким:
$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{A} = -\frac{1}{c} \cdot \nabla \times \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t},$$

откуда
$$\nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right) = 0.$$
Следовательно, поле $\mathbf{E} + \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$ потенциально и, значит, является градиентом некоторого потенциала $u$:
$$\mathbf{E} + \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla u,$$
а тогда
$$\mathbf{E} = -\nabla u - \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}. \tag{П74}$$

При рассмотрении поведения элементов цепей будем использовать равенство (П64), в котором теперь первое слагаемое в правой части не обязательно будет равно нулю. Остальные части равенства можно преобразовать так, как это уже было сделано при изучении законов постоянного тока, и получить, что
$$JR = \int\limits_{\mathcal{L}} \mathbf{E}\, d\mathbf{l} + \varepsilon. \tag{П75}$$

Интеграл с помощью (П74) представим в виде
$$\int\limits_{\mathcal{L}} \mathbf{E}\, d\mathbf{l} = -\int\limits_{\mathcal{L}} \nabla u\, d\mathbf{l} - \frac{1}{c} \int\limits_{\mathcal{L}} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\, d\mathbf{l}.$$
По свойству 14° ротор градиента равен нулю, поэтому по теореме Стокса циркуляция градиента тоже равна нулю, и уравнение упрощается:
$$\int\limits_{\mathcal{L}} \mathbf{E}\, d\mathbf{l} = -\frac{1}{c} \int\limits_{\mathcal{L}} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\, d\mathbf{l}. \tag{П76}$$

Преобразуем интеграл в правой части, снова используя формулу Стокса и формулу магнитного потока (П21):
$$\begin{aligned} \int\limits_{\mathcal{L}} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\, d\mathbf{l} &= \frac{\partial}{\partial t} \int\limits_{\mathcal{L}} \mathbf{A}\, d\mathbf{l} = \frac{\partial}{\partial t} \iint\limits_{\sigma} (\nabla \times \mathbf{A})\, \mathbf{n}\, d\sigma = \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \iint\limits_{\sigma} \mathbf{B}\mathbf{n}\, d\sigma = \frac{\partial \Phi}{\partial t}, \end{aligned} \tag{П77}$$
где $\Phi$ — поток магнитной индукции через поверхность $\sigma$, натянутую на контур $\mathcal{L}$. Теперь уравнения (П76) и (П75) можно переписать в виде
$$\int\limits_{\mathcal{L}} \mathbf{E}\, d\mathbf{l} = -\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial t}, \tag{П78}$$
$$JR = \varepsilon - \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial t}.$$

*Конденсатор*

Рассмотрим однородно заряженную плоскость $p$, показанную на рис. 6, с поверхностной плотностью заряда (заряд на единицу площади) $\zeta$. Однородность означает, что напряженность поля $\mathbf{E}$ одинакова по всей плоскости и постоянна. Вследствие неподвижности зарядов напряженность может быть лишь перпендикулярной к плоскости, и поля $\mathbf{E}_1$ и $\mathbf{E}_2$ по разные стороны плоскости должны совпадать по модулю, но быть противоположны по направлению. Рассмотрим поверхность $\sigma$ в виде прямоугольного параллелепипеда, который плоскость рассекает по прямоугольнику $S$, причем, грани $S_1$ и $S_2$ параллельны плоскости.

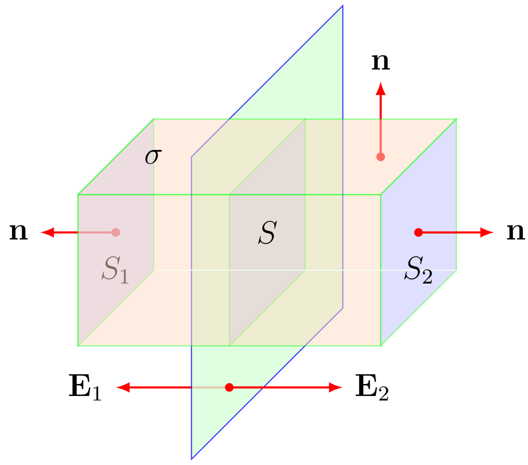


Рис. 6. Заряженная плоскость.

Найдем поток поля $\mathbf{E}$ через $\sigma$. Очевидно, на гранях параллелепипеда, не параллельных плоскости, поле перпендикулярно нормали, и поток поля через них равен нулю. Поэтому поток через $\sigma$ равен потоку через две оставшиеся грани $S_1$ и $S_2$:

$$\Pi = \iint\limits_{\sigma} \mathbf{E}\mathbf{n}\, d\sigma = \iint\limits_{S_1} \mathbf{E}_1\mathbf{n}\, d\sigma + \iint\limits_{S_2} \mathbf{E}_2\mathbf{n}\, d\sigma = \iint\limits_{S_1} |\mathbf{E}_1|\ d\sigma + \iint\limits_{S_2} |\mathbf{E}_2|\ d\sigma =$$
$$= |\mathbf{E}_1|\, S_1 + |\mathbf{E}_2|\, S_2 = 2\,|\mathbf{E}|\, S.$$

С другой стороны, этот же поток можно вычислить с помощью формулы (П31):

$$\Pi = 4\pi \iiint\limits_{V} \rho(\mathbf{r})\, dV = 4\pi \iiint\limits_{V} \zeta\ \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\Big|_{\mathbf{r}'\in S}\ dV = 4\pi \iint\limits_{S} \zeta\, d\sigma = 4\pi\zeta S,$$

где $V$ — объем параллелепипеда. Сравнение полученных соотношений приводит к равенству

$$|\mathbf{E}| = 2\pi\zeta. \qquad (\Pi 79)$$

Для положительно заряженной плоскости векторные линии напряженности выходят из нее и уходят в бесконечность по перпендикулярным к плоскости лучам. Для отрицательно заряженной плоскости картина аналогична, но векторные линии входят в плоскость.

Если взять две параллельные заряженные плоскости с равными и противоположными поверхностными плотностями $\zeta$ и $-\zeta$, то получим картину для напряженностей, показанную на рис. 7. Из него видно, что между плоскостями напряженности полей складываются, а во внешних областях вычитаются. В результате получаем, используя (П79), что для поля $\mathbf{E}$ двух плоскостей

$$|\mathbf{E}| = \begin{cases} 4\pi\zeta & \text{между плоскостями,} \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Предполагается, что плоскости находятся в вакууме или в воздушном пространстве.

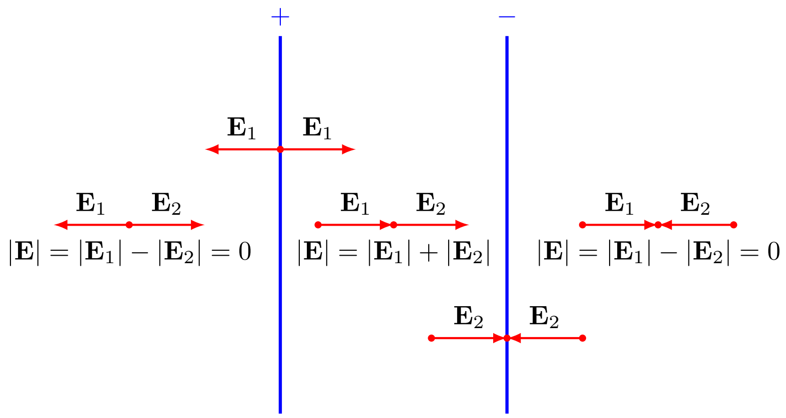


Рис. 7. Поле двух заряженных плоскостей.

Полученный результат примени́м и к конденсатору, если рассматривать его поле вдали от его концов, считая, что длина пластин достаточно велика по сравнению с зазором $d$ между ними.

Разность потенциалов пластин обозначим $U$ и вспомним, что потенциал это – работа. Что за работа? Это работа по перемещению зарядов с одной пластины конденсатора на другую:

$$U = |\mathbf{E}|\, d = 4\pi\zeta d = \frac{4\pi d}{S}\, Q,$$

так как $\zeta = Q/S$, где $Q$ – полный заряд пластины, $S$ – ее площадь. Мы видим, что напряжение пропорционально заряду пластин. Это – следствие принципа суперпозиции, то есть в конечном итоге – линейности уравнений Максвелла. Найденную пропорциональность записывают в виде

$$Q = CU, \tag{П80}$$

где

$$C = \frac{S}{4\pi d}$$

– емкость конденсатора.

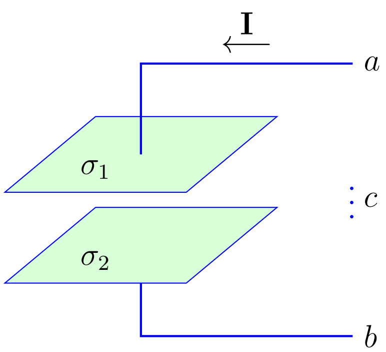


Рис. 8. Конденсатор.

Рассмотрим контур $\mathcal{L}$, который содержит конденсатор, см. рис. 8. В соответствии с формулой (П78), поскольку магнитные поля отсутствуют, имеем

$$\int\limits_{\mathcal{L}} \mathbf{E}\, d\mathbf{l} = 0,$$

или

$$\int\limits_{bca} \mathbf{E}\, d\mathbf{l} + \int\limits_{a\sigma_1} \mathbf{E}\, d\mathbf{l} + \int\limits_{\sigma_1\sigma_2} \mathbf{E}\, d\mathbf{l} + \int\limits_{\sigma_2 b} \mathbf{E}\, d\mathbf{l} = 0.$$

Интегралы по проводникам $a\sigma_1$ и $\sigma_2 b$ равны нулю, так как внутри проводника электрического поля нет[†]. Поэтому предыдущее равенство можно переписать в виде

$$\int\limits_{bca} \mathbf{E}\, d\mathbf{l} = -\int\limits_{\sigma_1\sigma_2} \mathbf{E}\, d\mathbf{l}. \tag{П81}$$

[†]Это связано с так называемым скин-эффектом, который заключается в том, что ток течет по поверхности идеального проводника, а внутри проводника тока нет.

Так как в силу свойства 14° векторное поле градиента потенциально, то применяя формулы (П74) и (5), получим

$$\begin{aligned}\int\limits_{bca} \mathbf{E}\, d\mathbf{l} &= -\int\limits_{bca} \nabla u\, d\mathbf{l} - \frac{1}{c}\int\limits_{bca} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\, d\mathbf{l} = \\ &= -\left[u(\sigma_1) - u(\sigma_2)\right] - \frac{1}{c}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{bca} \mathbf{A}\, d\mathbf{l}.\end{aligned} \tag{П82}$$

Последний интеграл в силу непрерывности $\mathbf{A}$ и малому расстоянию между пластинами конденсатора удовлетворяет приближенному равенству

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{bca} \mathbf{A}\, d\mathbf{l} \approx \frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{\mathcal{L}} \mathbf{A}\, d\mathbf{l} = \frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

в силу (П77). Но, как уже было отмечено, магнитное поле отсутствует и поэтому $\Phi = 0$. Из формул (П81), (П82) и (П80) теперь следует, что

$$\int\limits_{\sigma_1\sigma_2} \mathbf{E}\, d\mathbf{l} = u(\sigma_1) - u(\sigma_2) = U = \frac{Q}{C}. \tag{П83}$$

Если рассмотреть поток вектора $\mathbf{I}$ через сечение проводника в направлении от точки $a$ к поверхности $\sigma_1$, то в силу формулы (П34) он будет равен полному току $J$ и одновременно скорости накопления заряда $q$ на плоскости $\sigma_1$, то есть выполнится равенство

$$J = \frac{dQ}{dt}.$$

Поэтому из предыдущей формулы находим, что $dU/dt = J/C$, или

$$U = \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} J(t)\, dt. \tag{П84}$$

*Индуктивность*

Рассмотрим катушку соленоида, включенную в цепь, как показано на рис. 9. Предположим, что вдали от соленоида никаких магнитных полей нет (например, соленоид заключен в магнитонепроницаемую коробку, так что его собственное магнитное поле не выходит за ее пределы). Снова используем формулу (П78), которую в соответствии с обозначениями рис. представим в виде

$$\int\limits_{bca} \mathbf{E}\, d\mathbf{l} + \int\limits_{aLb} \mathbf{E}\, d\mathbf{l} = -\frac{1}{c}\cdot\frac{\partial \Phi}{\partial t}.$$

Второй интеграл равен нулю (внутри проводников нет электрического поля), поэтому

$$\int\limits_{bca} \mathbf{E}\, d\mathbf{l} = -\frac{1}{c}\cdot\frac{\partial \Phi}{\partial t}.$$

Так как вдали от соленоида магнитных полей нет, то электрическое поле здесь потенциально и оставшийся интеграл является разностью потенциалов между точками $a$ и $b$:

$$\int\limits_{bca} \mathbf{E}\, d\mathbf{l} = u(a) - u(b) = -\frac{1}{c}\cdot\frac{\partial \Phi}{\partial t}.$$

Обозначив напряжение на индуктивности $U = u(b) - u(a)$, получим

$$U = \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial t}.$$

Если катушка соленоида имеет более одного витка, то поток $\Phi$ заменяют потокосцеплением $\Psi$ (если магнитный поток через все $N$ витков катушки одинаков, $\Psi = N\Phi$):

$$U = \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial t}.$$

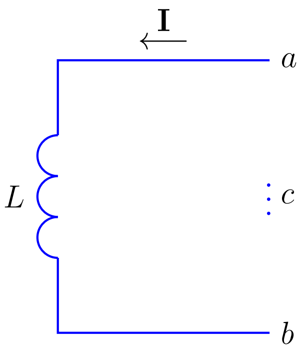


Рис. 9. Индуктивность.

*Индуктивность* $L$ соленоида определяется как коэффициент в формуле, связывающей ток $J$ в этой катушке с потоком $\Psi$ вектора магнитной индукции, сцепленным с витками этой катушки:

$$\Psi = L\,\frac{J}{c}.$$

Дифференцируя эту формулу и подставляя результат в предыдущую, получим

$$U = \frac{L}{c^2} \cdot \frac{\partial J}{\partial t}. \tag{П85}$$

Магнитный поток, влияющий на данный соленоид, могут создавать и другие, индуктивно связанные с ним соленоиды. *Взаимная индуктивность* $M$, определяется как коэффициент в формуле, связывающей ток $J_{\text{ст}}$ в другой цепи, индуктивно связанной с катушкой в данной цепи, и потоком $\Psi$ вектора магнитной индукции, сцепленным с витками этой катушки:

$$\Psi = M\,\frac{J_{\text{ст}}}{c}.$$

Таким образом, формула (П85) может быть расширена:

$$U = \frac{L}{c^2} \cdot \frac{\partial J}{\partial t} + \frac{M}{c^2} \cdot \frac{\partial J_{\text{ст}}}{\partial t}. \tag{П86}$$

*Резистор*

Практически так же, как и для постоянного тока, можно показать, что падение напряжения на резисторе подчиняется закону Ома

$$U = RJ. \tag{П87}$$

*Второй закон Кирхгофа для цепи переменного тока*

Рассмотрим электрическую цепь переменного тока, в которую могут входить резисторы, емкости, индуктивности и сторонние источники тока. Возьмем какой-нибудь контур этой цепи и применим к нему формулу (П64). Тогда, выполняя над каждым элементом цепи те преобразования, которые мы выполнили над конденсаторами, соленоидами, резисторами и сторонними источниками тока, мы придем к формуле

$$\varepsilon = \sum_{i=1}^{n_1} R_i J_i + \frac{1}{c^2} \sum_{s=1}^{n_2} L_s \frac{dJ_s}{dt} + \frac{1}{c^2} \sum_{k=1}^{n_3} M_k \frac{dJ_k}{dt} + \sum_{m=1}^{n_4} \frac{1}{C_m} \int_{t_0}^{t} J_m\, dt, \tag{П88}$$

где $\varepsilon$ — сумма ЭДС всех источников тока в контуре, $J_r$ — ток в соответствующем элементе. При формировании этого соотношения были использованы формулы падений напряжения на элементах цепи (П84), (П86), (П87).

Если величина $\varepsilon$ синусоидальна, ее можно задать в комплексной форме $\varepsilon = \varepsilon_0 e^{j\omega t}$, тогда для случая установившегося режима линейных цепей все падения напряжений на всех элементах цепи и все токи будут иметь синусоидальный характер, причем, все колебания будут совершаться с одной и той же частотой $\omega$. В соответствии с указанными формулами будем иметь следующие зависимости между комплексными амплитудами напряжения $\overline{U}$ и тока $\overline{J}$:

$$\overline{U}_C = \frac{1}{j\omega C}\,\overline{J},\ \overline{U}_L = j\omega L\overline{J},\ \overline{U}_R = R\,\overline{J}.$$

В результате равенство (П88) приобретет вид

$$\varepsilon_0 = \sum_{i=1}^{n_1} R_i\overline{J}_i + \frac{1}{c^2}\sum_{s=1}^{n_2} j\omega L_s\overline{J}_s + \frac{1}{c^2}\sum_{k=1}^{n_3} j\omega M_k\overline{J}_k + \sum_{m=1}^{n_4}\frac{1}{j\omega C_m}\,\overline{J}_m.$$

Такое уравнение удобно для расчетов цепей переменного тока чисто алгебраическим способом. Его и уравнение (П88) называют *вторым правилом Кирхгофа для цепей переменного тока*.

*Параллельное соединение конденсаторов*

Если $n$ конденсаторов соединены параллельно, то на каждом из них напряжение $U$ одинаково. Поэтому, применяя формулу (П88) к каждому контуру, содержащему ветвь соединения и внешнюю часть цепи, с учетом (П83) будем иметь

$$U = \frac{Q_1}{C_1} = \cdots = \frac{Q_n}{C_n}.$$

Общий заряд всех пластин тогда равен

$$Q = Q_1 + \ldots + Q_n = UC_1 + \ldots + UC_n = U\left(C_1 + \ldots + C_n\right),$$

или

$$U = \frac{Q}{C_1 + \ldots + C_n}.$$

Это равенство означает, что все параллельное соединение конденсаторов представляет собой один совокупный конденсатор с зарядом $Q$ и емкостью

$$C = C_1 + \ldots + C_n.$$

Таким образом, при параллельном соединении конденсаторов их емкости складываются.

*Последовательное соединение конденсаторов*

В этом случае через все конденсаторы идет один и тот же ток, так что заряды всех конденсаторов одинаковы и равны, например, $Q$, и применение формулы (П88) приводит к равенству

$$U = \frac{Q}{C_1} + \cdots + \frac{Q}{C_n},$$

или

$$U = Q\left(\frac{1}{C_1} + \cdots + \frac{1}{C_n}\right) = \frac{Q}{\left(\frac{1}{C_1} + \cdots + \frac{1}{C_n}\right)^{-1}}.$$

Следовательно, снова имеем совокупный конденсатор, но уже с емкостью, удовлетворяющей равенству

$$C = \left(\frac{1}{C_1} + \dots + \frac{1}{C_n}\right)^{-1},$$

или

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \dots + \frac{1}{C_n}.$$

*Параллельное соединение индуктивностей*

Будем считать, что взаимоиндукция между индуктивностями отсутствует.

Снова напряжение для всех ветвей $n$ постоянно и применение формулы (П88) к каждому контуру, содержащему ветвь соединения и внешнюю часть цепи, дает

$$U = \frac{1}{c^2}\, L_1 \frac{dJ_1}{dt} = \dots = \frac{1}{c^2}\, L_n \frac{dJ_n}{dt}.$$

Общий ток $J$ цепи разветвляется на токи $J_1, \ldots, J_n$, так что $J = J_1 + \ldots + J_n$ и

$$\frac{dJ}{dt} = \frac{dJ_1}{dt} + \ldots + \frac{dJ_n}{dt} = c^2 U \left(\frac{1}{L_1} + \ldots + \frac{1}{L_n}\right),$$

откуда

$$U = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{1}{\frac{1}{L_1} + \ldots + \frac{1}{L_n}} \cdot \frac{dJ}{dt}.$$

Таким образом, параллельное соединение соленоидов ведет себя как совокупный соленоид с индуктивностью

$$L = \left(\frac{1}{L_1} + \ldots + \frac{1}{L_n}\right)^{-1},$$

или

$$\frac{1}{L} = \frac{1}{L_1} + \ldots + \frac{1}{L_n}.$$

*Последовательное соединение индуктивностей*

По-прежнему предполагается отсутствие взаимоиндукции.

Ток $J$ одинаков во всей цепи и с помощью формулы (П88) получаем, что

$$U = \frac{1}{c^2}\, L_1 \frac{dJ}{dt} + \ldots + \frac{1}{c^2}\, L_n \frac{dJ}{dt} = \frac{1}{c^2}\,(L_1 + \ldots + L_n)\,\frac{dJ}{dt}.$$

Следовательно все соединение в целом имеет индуктивность

$$L = L_1 + \ldots + L_n.$$

### *Электромагнитное поле в вакууме*

Будем рассматривать электромагнитное поле в чистом виде, то есть при отсутствии каких-либо зарядов и проводников тока, так что, упрощая в связи с этим второе и третье уравнение Максвелла, получим его систему уравнений в следующей форме:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \tag{П89}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \tag{П90}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \tag{П91}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0, \tag{П92}$$

Попытаемся увидеть то, что возникло в воображении Максвелла в период создания этой системы: как электрическое поле порождает магнитное, магнитное порождает электрическое и т. д. вплоть до бесконечности. Бегут и бегут эти волны, распространяясь на весь космос.

Как нетрудно видеть из выписанных уравнений, ни о каком разделении электромагнитного поля на электрическое и магнитное не может быть и речи: и то, и другое взаимосвязаны и взаимообусловлены. Изменение электрического поля влечет за собой изменение магнитного, которое вызывает изменение электрического поля и т. д. Кроме того, теперь оба поля, $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$, соленоидальны: их векторные линии замкнуты, нигде не начинаясь и нигде не заканчиваясь.

Чтобы найти решение системы уравнений (П89)-(П92) , исключим из нее, например, поле $\mathbf{H}$, для чего возьмем ротор от обеих частей первого уравнения:

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{H}) \,.$$

Используя свойство ротора от ротора (свойство 17°) и третье уравнение Максвелла (П91), получим

$$\nabla \cdot (\nabla \cdot \mathbf{E}) - \triangle \mathbf{E} = -\frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}.$$

Поскольку в силу второго уравнения Максвелла (П90) дивергенция $\mathbf{E}$ равна нулю, то

$$\triangle \mathbf{E} = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}.$$

Можно показать, что такому же уравнению удовлетворяет и поле $\mathbf{H}$:

$$\triangle \mathbf{H} = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2}.$$

Эти уравнения называются *волновыми*.

Более удобно, однако, оперировать векторным потенциалом магнитного поля, поэтому мы и для него далее получим волновое уравнение (стоит еще раз напомнить, что $\mathbf{B}$ и $\mathbf{H}$ в нашем рассмотрении равносильны). Итак, пусть $\mathbf{A}$ — поле, для которого в силу соленоидальности $\mathbf{H}$ выполняется

$$\mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{A}, \tag{П93}$$

и (П74):

$$\mathbf{E} = -\nabla u - \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}. \tag{П94}$$

Применим оператор дивергенции к обеим частям формулы (П94), учитывая, что $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ в силу (П90):

$$-\nabla \cdot \nabla u - \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{A}) = 0,$$

или

$$\triangle u + \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{A}) = 0.$$

Подставим в (П91) вместо $\mathbf{H}$ его выражение из (П93) и вместо $\mathbf{E}$ — его выражение из (П94):

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = -\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \nabla u - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2}.$$

Далее, снова используя свойство ротора от ротора, получим

$$\nabla\cdot(\nabla\cdot\mathbf{A})-\triangle\mathbf{A}=-\frac{1}{c}\cdot\nabla\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{1}{c^2}\cdot\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2},$$

или

$$\nabla\cdot\left(\nabla\cdot\mathbf{A}+\frac{1}{c}\cdot\frac{\partial u}{\partial t}\right)=\triangle\mathbf{A}-\frac{1}{c^2}\cdot\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2}. \qquad (\text{П}95)$$

Как мы уже неоднократно видели, потенциалы определяются неоднозначно, поэтому можно считать, что $u=0$, а поле $\mathbf{A}$ удовлетворяет *условию Лоренца*:

$$\nabla\cdot\mathbf{A}+\frac{1}{c}\cdot\frac{\partial u}{\partial t}=0.$$

Теперь уравнение (П95) становится волновым:

$$\triangle\mathbf{A}=\frac{1}{c^2}\cdot\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2}, \qquad (\text{П}96)$$

а условие Лоренца сводится к

$$\nabla\cdot\mathbf{A}=0. \qquad (\text{П}97)$$

Таким образом, нами получены три идентичных волновых уравнения для полей $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ и $\mathbf{A}$.

Рассмотрим сначала что-нибудь попроще, скажем, не векторное, а скалярное волновое уравнение относительно функции $f\,(x,t)$ всего двух переменных:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-\frac{1}{c^2}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}=0.$$

Проверим, что его решением является функция

$$f\,(x,t)=g_1\,(x-ct)+g_2\,(x+ct)\,,$$

где $g_1$, $g_2$ — произвольные функции. Действительно, подставляя это выражение для $f$ в волновое уравнение, получим

$$\frac{d^2 g_1}{\partial x^2}+\frac{d^2 g_2}{\partial x^2}-\frac{1}{c^2}\left(c^2\,\frac{d^2 g_1}{\partial t^2}+c^2\,\frac{d^2 g_2}{\partial t^2}\right)\equiv 0.$$

Функция $g_1$ описывает волну, распространяющуюся со скоростью света $c$ вдоль положительной полуоси $Ox$, а функция $g_2$ — волну, бегущую в противоположном направлении с той же скоростью.

Как видим, в связи с произвольностью функций $g_1$ и $g_2$ волновое уравнение имеет бесчисленное множество решений.

Очевидно, если векторный потенциал имеет вид $\mathbf{A}\,(x,y,z)=\mathbf{A}\,(x)$ (случай так называемой *плоской волны*), то согласно (П96)

$$\triangle\mathbf{A}=(\nabla\cdot\nabla)\cdot\mathbf{A}=\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\mathbf{A}=$$

$$=\frac{\partial^2 A_1}{\partial x^2}\,\mathbf{i}+\frac{\partial^2 A_2}{\partial y^2}\,\mathbf{j}+\frac{\partial^2 A_3}{\partial z^2}\,\mathbf{j}=\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial^2 A_1}{\partial t^2}\,\mathbf{i}+\frac{\partial^2 A_2}{\partial t^2}\,\mathbf{j}+\frac{\partial^2 A_3}{\partial t^2}\,\mathbf{k}\right),$$

и уравнение (П96) сведется к трем однотипным скалярным волновым уравнениям

$$\frac{\partial^2 A_1}{\partial x^2}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A_1}{\partial t^2},\qquad \frac{\partial^2 A_2}{\partial y^2}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A_2}{\partial t^2},\qquad \frac{\partial^2 A_3}{\partial z^2}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A_3}{\partial t^2}.$$

Как было показано, решениями таких уравнений являются функции $A_i\,(x-ct)$, $i=\overline{1,3}$, убегающие вправо по оси $Ox$, а тогда решением уравнения (П96) будет вектор

$$\mathbf{A}\,(x-t)=A_1\,(x-ct)\;\mathbf{i}+A_2\,(x-ct)\;\mathbf{j}+A_3\,(x-ct)\;\mathbf{k}.$$

Обозначим $\xi=x-ct$, $\mathbf{A}'=d\mathbf{A}/d\xi$ и заметим, что в силу (П97) выполняется

$$\nabla\cdot\mathbf{A}=\frac{\partial A_1}{\partial x}=A_1'=0,$$

и, значит, $\mathrm{Pr}_{\mathbf{A}'}\,\mathbf{i}=0$, так что $\mathbf{A}'\perp\mathbf{i}$.

В соответствии с (П94) и равенством нулю потенциала $u$ имеем

$$\mathbf{E}=-\frac{1}{c}\cdot\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}=-\,(-c)\,\frac{1}{c}\,\mathbf{A}'=\mathbf{A}'.$$

Поэтому $\mathbf{E}\perp\mathbf{i}$.

В силу (П93)

$$\mathbf{H}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ A_1\,(x-ct) & A_2\,(x-ct) & A_3\,(x-ct)\end{vmatrix}=$$

$$=\left(A_3'\,\frac{\partial\xi}{\partial y}-A_2'\,\frac{\partial\xi}{\partial z}\right)\mathbf{i}-\left(A_3'\,\frac{\partial\xi}{\partial x}-A_1'\,\frac{\partial\xi}{\partial z}\right)\mathbf{j}+\left(A_2'\,\frac{\partial\xi}{\partial x}-A_1'\,\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)\mathbf{k}=$$

$$=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \dfrac{\partial\xi}{\partial x} & \dfrac{\partial\xi}{\partial y} & \dfrac{\partial\xi}{\partial z}\\ A_1' & A_2' & A_3'\end{vmatrix}=\nabla\xi\times\mathbf{A}'.$$

Но $\nabla\xi=\mathbf{i}$, $\mathbf{A}'=\mathbf{E}$, следовательно, $\mathbf{H}=\mathbf{i}\times\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}\perp\mathbf{i}$, $\mathbf{H}\perp\mathbf{E}$. Поскольку скорость $\mathbf{v}$ распространения волны сонаправлена с $\mathbf{i}$, то векторы $\mathbf{v}$, $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ образуют правую тройку векторов.

Плоские электромагнитные волны, у которых векторы $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ перпендикулярны распространению волны, называется *поперечными*. Из равенства $\mathbf{H}=\mathbf{i}\times\mathbf{E}$ получаем также, что $|\mathbf{E}|=|\mathbf{H}|$.

Наглядное изображение плоской волны, распространяющейся в пространстве, показано на рис. 10.

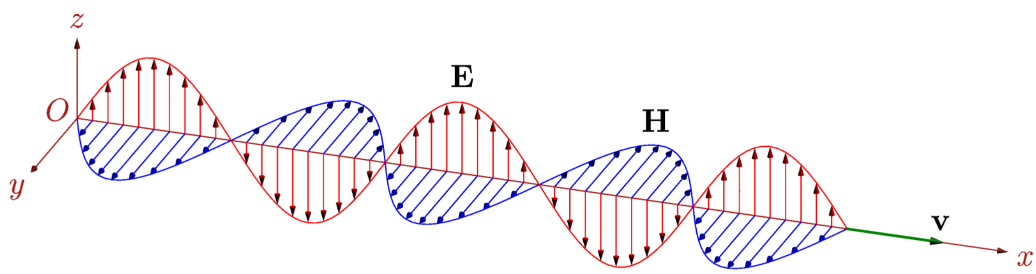


Рис. 10. Распространение поперечных волн.

## Литература

[1] Бугров Я.С., Никольский С.М. *Высшая математика. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного* . – М.: Наука, 1985, – с. 211-219, 252-254, 258-259.

[2] Письменный Д.Т. *Конспект лекций по высшей математике.* – М.: Рольф, 2000. Ч. 2. – с. 180–185.