Вычеты

Волченко Ю.М.

Содержание лекции

Понятие вычета в обыкновенной точке. Вычисление вычетов функции. Вычет в бесконечно удаленной точке. Вычисление комплексных и определенных интегралов с помощью вычетов.

Использование системы *Mathematica* для вычисления вычетов.

18 марта 2016 г.

Завершение изучения комплексного анализа будет посвящено вычетам, математической конструкции, важной не только с теоретической точки зрения, но и практической. Вычеты позволяют найти значения некоторых интегралов, комплексных и обыкновенных определенных, в тех случаях, когда применение других методов требует громоздких вычислений. Ну, а в том, что указанные интегралы необходимы при вычислении различных физических и технических величин убеждать вас уже не приходится.

1 Вычет и его вычисление

Пусть z_0 — изолированная особая точка функции $f(z)$. ***Вычетом*** функции $f(z)$ в точке z_0 называется интеграл

$$\boxed{\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z) \triangleq \frac{1}{2\pi j}\int\limits_{\Gamma^+} f(z)\,dz,}$$

где Γ — контур, лежащий в области аналитичности функции $f(z)$, охватывающий точку z_0 и не содержащий внутри себя других особых точек.

Вспомним, что коэффициенты ряда Лорана функции $f(z)$ имеют вид

$$c_n = \frac{1}{2\pi j}\int\limits_{\Gamma^+} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz.$$

Значит,

$$\boxed{\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z) = c_{-1}.} \tag{1}$$

Теорема 1. *Если z_0 — правильная или устранимая особая точка функции $f(z)$, то*

$$\boxed{\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z) = 0.}$$

Доказательство. В разложении функции $f(z)$в ряд Лорана в окрестности z_0 отсутствует главная часть и, следовательно, $c_{-1} = 0$. Вывод теоремы следует из равенства (1).

Теорема 2. *Если z_0 — полюс m-го порядка, то*

$$\boxed{\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z\to z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left[f(z)(z-z_0)^m\right].} \tag{2}$$

Доказательство. В этом случае разложение функции $f(z)$в ряд Лорана в окрестности z_0 имеет вид

$$f(z) = c_{-m}(z-z_0)^{-m} + \ldots + c_{-1}(z-z_0)^{-1} + c_0 + \ldots .$$

Умножим обе части этого равенства на $(z-z_0)^m$:

$$f(z)(z-z_0)^m = c_{-m} + \ldots + c_{-1}(z-z_0)^{m-1} + \ldots + c_0(z-z_0)^m + \ldots ,$$

а затем продифференцируем полученное равенство $m-1$ раз:

$$\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[f(z)(z-z_0)^m\right] = (m-1)!\,c_{-1} + m!\,c_0(z-z_0) + \ldots .$$

Переходя к пределу при $z \to z_0$ и слегка преобразуя формулу, получим равенство (2).

Замечание 1. *Если z_0 — существенно особая точка функции $f(z)$, то имеется лишь один способ вычисления вычета — разложение $f(z)$ в ряд Лорана.*

Пример 1. *Найти вычет функции*

$$f(z) = \frac{\sin z^2}{z^2}$$

в точке $z_0 = 0$.

Решение. Найдем предел заданной функции

$$\lim_{z\to 0}\frac{\sin z^2}{z^2}=1.$$

Значит, $z_0=0$ — устранимая особая точка функции, и, следовательно,

$$\operatorname*{res}_{z=0} f\left(z\right)=0.$$

Пример 2. *Найти вычеты функции*

$$f(z)=\frac{e^z}{\left(z+1\right)^3\left(z-2\right)}$$

в ее особых точках.

Решение. Функция имеет две особые точки: $z_1=-1$ и $z_2=2$. Рассмотрим поочередно обе точки.

1) $z_1=-1$. Это — полюс 3-го порядка. Для получения вычета используем формулу (2). Сначала найдем производную

$$\frac{d^2}{dz^2}\left[\frac{e^z}{\cancel{\left(z+1\right)^3}\left(z-2\right)}\cancel{\left(z+1\right)^3}\right]=\frac{d^2}{dz^2}\left(\frac{e^z}{z-2}\right)=\frac{d}{dz}\left(\frac{e^z\left(z-2\right)-e^z}{\left(z-2\right)^2}\right)=$$

$$=\frac{d}{dz}\left[\frac{e^z\left(z-3\right)}{\left(z-2\right)^2}\right]=\frac{\left[e^z\left(z-3\right)+e^z\right]\left(z-2\right)^2-2\left(z-2\right)e^z\left(z-3\right)}{\left(z-2\right)^4}=$$

$$=\frac{\left[e^z\left(z-3\right)+e^z\right]\left(z-2\right)-2e^z\left(z-3\right)}{\left(z-2\right)^3}=\frac{\left[\left(z-2\right)^2-2\left(z-3\right)\right]e^z}{\left(z-2\right)^3}=$$

$$=\frac{\left(z^2-6z+10\right)e^z}{\left(z-2\right)^3}.$$

Теперь найдем вычет:

$$\operatorname*{res}_{z=-1} f\left(z\right)=\frac{1}{2!}\lim_{z\to -1}\frac{\left(z^2-6z+10\right)e^z}{\left(z-2\right)^3}=-\frac{17}{54e}.$$

2) $z_2=2$. Это — полюс первого порядка, поэтому вычисление вычета по той же формуле (2) упрощается:

$$\operatorname*{res}_{z=2} f\left(z\right)=\lim_{z\to 2}\left[f\left(z\right)\left(z-2\right)\right]=\lim_{z\to 2}\frac{e^z}{\left(z+1\right)^3}=\frac{e^2}{27}.$$

Пример 3. *Найти вычет функции*

$$f\left(z\right)=e^{1/z}$$

в точке $z_0=0$.

Решение. Выполним разложение заданной функции в ряд Лорана:

$$e^{1/z}=1+\frac{1}{1!\,z}+\frac{1}{2!\,z^2}+\frac{1}{3!\,z^3}+\dots.$$

Таким образом, $z_0=0$ — существенно особая точка, и, следовательно, вычет равен

$$\operatorname*{res}_{z=0} e^{1/z}=c_{-1}=1.$$

□

Пусть $z_0 = \infty$ — изолированная особая точка функции $f(z)$. ***Вычетом функции*** $f(z)$ ***в точке*** $z_0 = \infty$ называется

$$\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) \triangleq \frac{1}{2\pi j} \int\limits_{\Gamma^-} f(z)\, dz = -\frac{1}{2\pi j} \int\limits_{\Gamma^+} f(z)\, dz,$$

где Γ — контур, вне которого $f(z)$ аналитична и не имеет особых точек, отличных от $z = \infty$.

Очевидно,

$$\boxed{\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = -c_{-1}.}$$

Пример 4. *Найти вычет функции*

$$f(z) = \frac{z}{z^2+1}$$

в точке $z = \infty$.

Решение. Здесь не подойдет напрашивающееся разложение функции в ряд Лорана с использованием геометрической прогрессии, знаменатель которой $|z| < 1$. Это будет разложение в окрестности нуля, а нам надо разложить функцию в окрестности бесконечности! Поэтому разложение надо выполнить не по степеням z, а по степеням $1/z$:

$$\frac{z}{z^2+1} = \frac{1}{z\left(1+\frac{1}{z^2}\right)} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{-2n} = \frac{1}{z} - \frac{1}{z^3} + \ldots,\ |z| > 1.$$

Следовательно,

$$\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = -c_{-1} = -1.$$

2 Вычисление комплексных интегралов

Теорема 3. *Пусть* $f(z)$ *аналитична в области* $\overline{G}$, *за исключением изолированных особых точек* $z_1, z_2, \ldots, z_n \in G$. *Тогда*

$$\int\limits_{\partial G^+} f(z)\, dz = 2\pi j \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z=z_k} f(z). \qquad (3)$$

Доказательство. Окружим (рис. 1) каждую точку z_k контуром γ_k, лежащим в G. В полученной многосвязной области, ограниченной кривыми ∂G и γ_1, γ_2, $\ldots$, γ_n, функция $f(z)$ аналитична. Следовательно, по теореме Коши

$$\int\limits_{\partial G^+ + \gamma_1^+ + \ldots + \gamma_n^+} f(z)\, dz = 0.$$

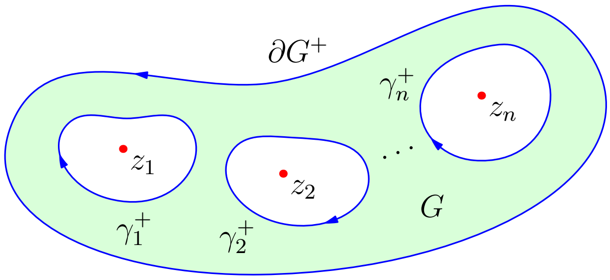


Рис. 1.

Но вычет функции в точке z_k в данном случае (с учетом обхода контура относительно области G) есть

$$\operatorname*{res}_{z=z_k} f(z) = -\frac{1}{2\pi j} \int\limits_{\gamma_k^+} f(z)\, dz,$$

и поэтому

$$\int\limits_{\partial G^+} f(z)\, dz = -\sum_{k=1}^{n} \int\limits_{\gamma_k^+} f(z)\, dz = 2\pi j \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z=z_k} f(z)\,.$$

Пример 5. *Вычислить интеграл*

$$\int\limits_{\Gamma^+} \frac{e^z}{z^2+4}\, dz,\ \ \Gamma = \{z : |z| = 3\}\,.$$

Решение. Окружность Γ охватывает два полюса первого порядка подынтегральной функции : $z_1 = -2j$, $z_2 = 2j$. Поэтому

$$\frac{1}{2\pi j} \int\limits_{\Gamma^+} \frac{e^z}{z^2+4}\, dz = \operatorname*{res}_{z=-2j} \frac{e^z}{z^2+4} + \operatorname*{res}_{z=2j} \frac{e^z}{z^2+4} =$$

$$= \lim_{z\to-2j} \frac{e^z}{z-2j} + \lim_{z\to 2j} \frac{e^z}{z+2j} = -\frac{e^{-2j}}{4j} + \frac{e^{2j}}{4j}.$$

Следовательно,

$$\int\limits_{\Gamma^+} \frac{e^z}{z^2+4}\, dz = \pi\, \frac{e^{2j} - e^{-2j}}{2} = \pi \operatorname{sh} 2j = \pi j \sin 2.$$

Теорема 4. *Пусть функция $f(z)$ аналитична на всей комплексной плоскости за исключением изолированных особых точек $z_1, \dots, z_n$, причем, $z_n = \infty$. Тогда*

$$\sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z=z_k} f(z) = 0.$$

Доказательство. Пусть Γ —контур, содержащий внутри себя все особые точки z_k, находящиеся на конечном расстоянии от начала координат $z = 0$. По теореме 3

$$\frac{1}{2\pi j}\int\limits_{\Gamma^+} f(z)\ dz = \sum_{k=1}^{n-1} \operatorname*{res}_{z=z_k} f(z)\,,$$

а по определению вычета в точке $z=\infty$ этот же интеграл равен $-\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z)$, из чего и следует требуемое.

Замечание 2. *Теорему 4 иногда выгоднее применять, чем теорему 3, в случае, если слишком много особых точек расположено внутри контура* Γ. *Удобнее воспользоваться следствием из этих теорем:*

$$\int\limits_{\Gamma^+} f(z)\ dz = -2\pi j \sum_{k=1}^{m} \operatorname*{res}_{z=z_k} f(z) - 2\pi j \operatorname*{res}_{z=\infty} f(z)\,. \tag{4}$$

Здесь $z_1, \ldots, z_m$ *— особые точки, находящиеся вне контура* Γ.

Пример 6. *Вычислить интеграл*

$$\int\limits_{\Gamma^+} \frac{dz}{(z+3)(z^{15}-1)}, \quad \Gamma = \{z : |z| = 2\}.$$

Решение. Подынтегральная функция $f(z)$ имеет простые полюсы $z_0 = -3$ и $z_k = \sqrt[15]{1} = e^{2k\pi j/15}$, $k = \overline{1,15}$. Точка z_0 лежит вне Γ, а точки $z_1, \ldots, z_{15}$ находятся на окружности $|z| = 1$, т. е. лежат внутри Γ. Если применять формулу (3), то придется вычислять вычеты в 15 точках. Поэтому выгоднее использовать формулу (4):

$$\int\limits_{\Gamma^+} \frac{dz}{(z+3)(z^{15}-1)} = -2\pi j\Big(\operatorname*{res}_{z=-3} f(z) + \operatorname*{res}_{z=\infty} f(z)\Big).$$

Вычет в точке $z = -3$ найдем как вычет в полюсе первого порядка:

$$\operatorname*{res}_{z=-3} f(z) = \lim_{z\to-3} \frac{1}{\cancel{(z+3)}(z^{15}-1)}\cancel{(z+3)} = \lim_{z\to-3} \frac{1}{z^{15}-1} = -\frac{1}{3^{15}+1}.$$

Так как $\lim_{z\to\infty} f(z) = 0$, то $z = \infty$ — устранимая особая точка функции и поэтому разложение последней в ряд Лорана имеет вид

$$f(z) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^{-n}, \quad R < z < \infty,$$

причем $c_0 = \lim_{z\to\infty} f(z) = 0$. Тогда $zf(z) = c_{-1} + \sum_{n=2}^{\infty} c_{-n} z^{-n+1}$ и $c_{-1} = \lim_{z\to\infty}[zf(z)]$. Значит,

$$\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = -c_{-1} = -\lim_{z\to\infty}[zf(z)] = -\lim_{z\to\infty} \frac{z}{(z+3)(z^{15}-1)} = 0.$$

Получаем

$$\int\limits_{\Gamma^+} \frac{dz}{(z+3)(z^{15}-1)} = \frac{2\pi j}{3^{15}+1}.$$

3 Вычисление определенных интегралов

Пусть функция $f(z)$ аналитична в верхней полуплоскости комплексной плоскости, включая действительную ось, за исключением конечного числа особых точек $z_1, \ldots, z_n$, лежащих в верхней полуплоскости.

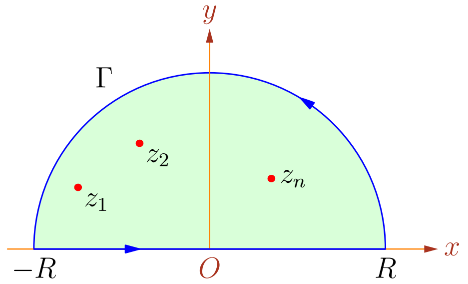
Теорема 5. *Если*

$$|f(z)| \leq \frac{M}{|z|^m}$$

при $|z| \geq R$*, где* $m > 1$ *и* R *– достаточно большое число, то*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 2\pi j \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z=z_k} f(z).$$

Доказательство.



Опишем полуокружность Γ радиуса R с центром в точке $z = 0$ так, чтобы все особые точки попали вовнутрь фигуры, образованной этой полуокружностью и действительной осью. По теореме 3 имеем

$$\int_{-R}^{R} f(x)\, dx + \int_{\Gamma^+} f(z)\, dz = 2\pi j \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z=z_k} f(z). \tag{5}$$

Поскольку

$$\left|\int_{\Gamma^+} f(z)\, dz\right| \leq \left|\int_{\Gamma^+} \frac{M}{|z|^m}\, dz\right| \leq \frac{M}{R^m} \cdot \pi R = \frac{\pi M}{R^{m-1}} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0,$$

то переходя в равенстве (5) к пределу при $R \to \infty$, получим то, что требовалось доказать. □

Говорят, что $\lim_{z\to\infty} f(z) = 0$ равномерно относительно $\arg z = \varphi$, если $|f(z)| < \mu_R$ для $|z| = R$, где $\lim_{R\to\infty} \mu_R = 0$.

Теорема 6. *Пусть* $\lim_{z\to\infty} f(z) = 0$ *равномерно относительно* $\arg z = \varphi$*. Тогда*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{jx}\, dx = 2\pi j \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z=z_k} f(z)\, e^{jz}.$$

Пример 7. *Вычислить интеграл*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\left(x^2+9\right)^2}.$$

Решение. В верхней полуплоскости функция

$$f(z) = \frac{1}{\left(z^2+9\right)^2}$$

имеет один полюс 2-го порядка в точке $z_0 = 3j$ и, кроме того, $|f(z)| \leq M/|z|^4$ для достаточно больших z. Поэтому

$$\operatorname*{res}_{z=3j} f(z) = \lim_{z\to 3j} \frac{d}{dz}\left[\frac{1}{\left(z^2+9\right)^2}(z-3j)^2\right] = \lim_{z\to 3j} \frac{d}{dz}\left[\frac{1}{(z+3j)^2}\right] =$$
$$= \lim_{z\to 3j} \frac{-2}{(z+3j)^3} = \frac{2}{36\cdot 6j} = \frac{1}{108j}.$$

Значит,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\left(x^2+9\right)^2} = 2\pi j \cdot \frac{1}{108j} = \frac{\pi}{54}.$$

Пример 8. *Вычислить интеграл*

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\cos x\, dx}{1+x^2}.$$

Решение. Данный интеграл является половиной действительной части интеграла

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{jx}\, dx}{1+x^2}.$$

Поэтому вычислим последний, для начала заметив, что функция $1/\left(1+z^2\right)$ удовлетворяет условию теоремы 6, так как

$$\frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{1+R^2} \underset{R\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

для $|z| = R$. Следовательно, в силу указанной теоремы

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{jx}\, dx}{1+x^2} = 2\pi j \operatorname*{res}_{z=j} \frac{e^{jz}}{1+z^2} = 2\pi j \lim_{z\to j} \frac{e^{jz}}{1+z^2}(z-j) =$$
$$= 2\pi j \lim_{z\to j} \frac{e^{jz}}{z+j} = 2\pi j\, \frac{e^{-1}}{2j} = \frac{\pi}{e},$$

а искомый интеграл вполовину меньше:

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\cos x\, dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2e}.$$

□

Возможности системы *Mathematica* в области вычисления вычетов см. в Приложении[1)].

Приложение

[1] Для вычисления вычетов *Mathematica* имеет оператор `Residue[expr,{z,z0}]`, в котором `expr` — выражение, вычет которого требуется найти; `z` — аргумент выражения; z_0 — точка, в которой отыскивается вычет.

Ничего сложного в применении этого оператора нет. Решим, например, несколько лекционных примеров:

$$\mathtt{Residue}\left[\frac{\mathtt{Sin}[z^2]}{z^2}, \{z, 0\}\right]$$

$$0$$

$$\mathtt{Residue}\left[\frac{e^z}{(z+1)^3(z-2)}, \{z, -1\}\right]$$

$$-\frac{17}{54\,e}$$

$$\mathtt{Residue}\left[\frac{z}{z^2+1}, \{z, \infty\}\right]$$

$$-1$$

Однако в существенно особой точке *Mathematica* вычет не находит:

$$\mathtt{Residue}\left[e^{1/z}, \{z, 0\}\right]$$

$$\mathtt{Residue}\left[e^{1/z}, \{z, 0\}\right]$$

о чем честно предупреждает в своей собственной Справке.

Литература

[1] Бугров Я.С., Никольский С.М. *Высшая математика. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного* . — М.: Наука, 1985, — с. 412-415, 417-425.

[2] Письменный Д.Т. *Конспект лекций по высшей математике.* — М.: Рольф, 2000. Ч. 2. — с. 223—226.