Теоремы о среднем

Волченко Ю.М.

Содержание лекции

Теоремы Ролля, Лагранжа, Коши, их геометрическая интерпретация. Правило Лопиталя. Разрешение неопределенностей различных типов.

Анимация геометрической интерпретации теорем Лагранжа и Коши. Анимация работает только в программе Acrobat Reader!

15 декабря 2012 г.

Представьте себе, что ваш автомобиль, проехавший к моменту времени τ расстояние в $s(\tau)$ километров, после этого проехал $s(t)$ километров к моменту времени t. Конечно, по дороге вы обедали в придорожной харчевне, стояли перед переездом, мчались, если дорога для обгона была свободна, тормозили перед узкими мостами, так что скорость вашего авто на отрезке времени $[\tau, t]$ не была постоянной.

Спрашивается, а можно ли было проехать по этой же дороге такое же расстояние за то же время, двигаясь с постоянной скоростью, если убрать с дороги мосты, машины (кроме вашей) и прочие помехи? Очевидно, такой скоростью должна быть средняя скорость движения вашего автомобиля! То есть должно выполняться равенство $s(t) - s(\tau) = v_{\text{ср}}(t - \tau)$. Ясно также, что средняя скорость не может быть меньше минимальной и больше максимальной скоростей автомобиля, показанных им во время поездки. А тогда, видимо, должен существовать момент времени c, лежащий между τ и t, такой, что $v(c) = s'(c) = v_{\text{ср}}$, после чего можно записать, что $s(t) - s(\tau) = s'(c)(t - \tau)$.

Если отрешиться от того, что s — это расстояние, а t — время, то мы получили интуитивную формулировку теоремы Лагранжа. Приведенный пример показывает, почему ее и другие, похожие на нее теоремы, называют теоремами о среднем. Перейдем к их рассмотрению.

1 Теоремы Ролля, Лагранжа, Коши

Теорема 1 (Ролля). *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, дифференцируема в интервале (a,b) и на концах отрезка имеет одинаковые значения: $f(a) = f(b)$, то в интервале (a,b) найдется точка c, в которой производная функции равна нулю:*

$$\boxed{f'(c) = 0.}$$

Доказательство. Так как функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то она принимает на нем свое наибольшее M и свое наименьшее m значения. Если $m = M$, то функция постоянна на $[a,b]$ и ее производная на этом отрезке равна нулю. Взяв в интервале (a,b) любую точку c, получим, $f'(c) = 0$. Теорема доказана.

Пусть теперь $m \neq M$. Тогда точки, в которых функция получает значения m и M, обе не могут быть концевыми, иначе мы получим, что $f(a) \neq f(b)$, что противоречит условию теоремы. Например, пусть значение M функция принимает в точке c, находящейся строго внутри отрезка: $f(c) = M$, $c \in (a,b)$. Так как в точке c функция имеет наибольшее значение, то для любого приращения Δx, такого, что $c + \Delta x \in (a,b)$ выполнится

$$f(c + \Delta x) \leq f(c),$$

или

$$f(c + \Delta x) - f(c) \leq 0.$$

Следовательно,

$$\frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x} \leq 0, \text{ если } \Delta x > 0,$$
$$\frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x} \geq 0, \text{ если } \Delta x < 0.$$

Переходя к пределу при $\Delta x \to 0$, получаем, что одновременно должны выполняться два неравенства: $f'(c) \leq 0$, $f'(c) \geq 0$. Это возможно только, если $f'(c) = 0$. □

Геометрическое истолкование. Если выполнены условия теоремы, в интервале (a,b) найдется точка c, в которой касательная к графику функции будет параллельна оси Ox. См. рис. 1, а).

Замечание 1. *Если производная функции не существует хотя бы в одной точке отрезка $[a,b]$, теорема может оказаться неверной. На*

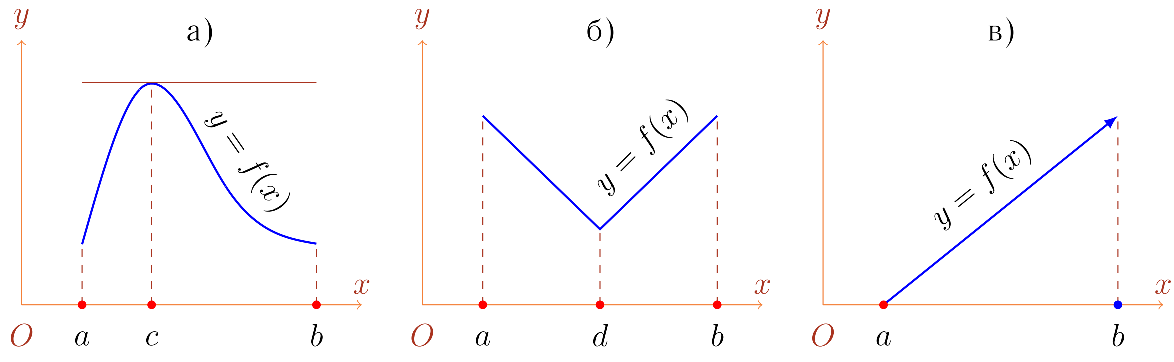

Рис. 1. К теореме Ролля.

рис. 1, б) производная функции в точке d не существует[†] *и, хотя остальные условия теоремы Ролля выполнены, производная на отрезке $[a, b]$ нигде в ноль не обращается.*

Замечание 2. *Непрерывность функции на отрезке $[a, b]$ нельзя заменить ее непрерывностью в интервале (a, b). На рис. 1, в) изображена функция, которая на концах интервала имеет одинаковые значения, равные нулю. Разрыв в точке $x = b$ делает ее разрывной на отрезке $[a, b]$, но в интервале (a, b) она непрерывна и дифференцируема. В результате ее производная в интервале (a, b) не равна нулю.*

Теорема 2 (Коши). *Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$, дифференцируемы в интервале (a, b) и в этом интервале $g'(x) \neq 0$, то в интервале (a, b) существует точка c, в которой выполняется равенство:*

$$\boxed{\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.} \tag{1}$$

Доказательство. Прежде всего отметим, что $g(b) - g(a) \neq 0$, так как в противном случае по теореме Ролля найдется точка $c \in (a, b)$, в которой $g'(c) = 0$, что противоречит условию теоремы. Составим функцию

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \left[g(x) - g(a)\right].$$

Исходя из условий теоремы она непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема в интервале (a, b). Кроме того, $F(a) = F(b) = 0$. Следовательно, по

[†] По той же причине, что у функции $y = |x|$ в нуле, см. лекцию «Производная».

теореме Ролля существует точка $c \in (a,b)$, в которой $F'(c) = 0$. Но производная этой функции равна

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}\, g'(x)\,.$$

Так как

$$F'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(c) = 0,$$

то

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(c)\,,$$

а это равносильно выводу теоремы. □

Геометрическую интерпретацию теоремы Коши см. в Приложении[1)].

Теорема 3 (Лагранжа). *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и дифференцируема в интервале (a,b), то в интервале (a,b) найдется точка c, в которой справедливо равенство*

$$\boxed{f(b) - f(a) = f'(c)\,(b-a)\,.} \tag{2}$$

Доказательство. Следует из теоремы Коши при $g(x) \equiv x$. Действительно, в этом случае $g'(x) = 1$ и из формулы (1) получаем, что

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f'(c)}{1}.$$

□

Геометрическое истолкование. Если выполнены условия теоремы, то на дуге AB найдется точка C, в которой касательная к графику функции параллельна хорде AB (рис. 2). Щелкнув мышкой на этом анимационном рис., можно увидеть, как, несмотря на изменение формы графика функции, каждый раз на нем отыскивается точка C с таким свойством.

Формулу (2) называют ***формулой Лагранжа***, или ***формулой конечных приращений***.

Замечание 3. *Иногда формулу Лагранжа записывают так:*

$$f(b) - f(a) = f'\left[a + \theta\,(b-a)\right](b-a)\,,\ 0 < \theta < 1.$$

Для любых трех точек числовой оси c, x_1, x_2 введем отношение ***лежать между***, а именно будем писать $c \prec x_1, x_2$, если $x_1 < c < x_2 \vee x_2 < c < x_1$. Это означает, что точка c находится между точками x_1 и x_2 независимо от того, какое из этих двух чисел больше.

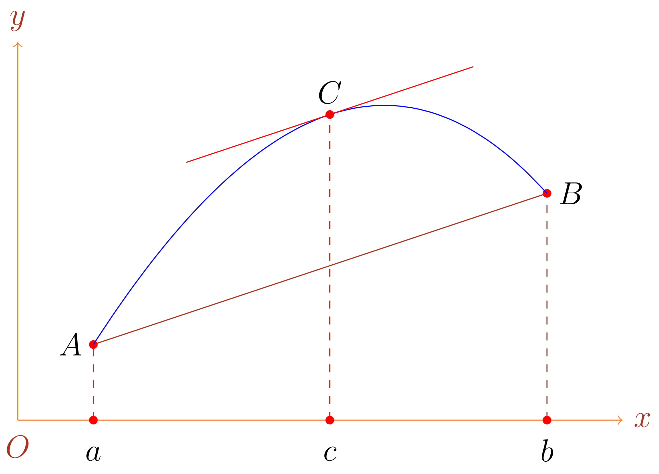

Рис. 2. К теореме Лагранжа.

Следствие 1. *Если производная функции $f(x)$ равна нулю в интервале (a, b), то функция постоянна в этом интервале.*

Доказательство. Поскольку производная функции равна нулю в интервале (a, b), то она в нем дифференцируема, а, значит, и непрерывна[†]. Выберем произвольным образом две точки $x, x_1 \in (a, b)$. По теореме Лагранжа справедливо равенство $f(x_1) - f(x) = f'(c)(x_1 - x)$, $c \prec x, x_1$. Так как $f'(c) = 0$, то $f(x) = f(x_1)$. В силу произвольности точки $x \in (a, b)$ функция имеет в (a, b) одно и то же значение $f(x_1)$.

2 Правило Лопиталя

Рассмотренные теоремы являются примером так называемых неконструктивных утверждений в математике. Действительно, все, что в них утверждается — это существование некой точки, в которой для функции выполняется то или иное равенство. А как найти такую точку — неизвестно! Вот и неконструктивны! Но сейчас мы увидим, как с помощью таких, на первый взгляд «беспомощных» теорем можно получить вполне конструктивные результаты, имеющие практическое применение при вычислении пределов функций. Кроме того, и для понимания поведения дифференцируемых функций без теорем о среднем не обойтись.

Теорема 4. *Пусть функции $f\,(x)$ и $g\,(x)$ определены и дифференцируемы в некоторой окрестности $\overset{\circ}{U}(a)$ точки $x = a \in \mathbb{R}$, $g'\,(x) \neq 0$ в этой*

[†]Лекция «Производная».

окрестности и $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = 0$. *Тогда, если существует предел* $\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, *то существует и предел* $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$, *и эти пределы равны:*

$$\boxed{\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.} \tag{3}$$

Доказательство. Так как функции f и g дифференцируемы в $\overset{\circ}{U}(a)$, то они непрерывны в окрестности $U(a)$, за исключением, быть может, точки a. Введем новые функции:

$$\overline{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq a; \\ 0, & x = a; \end{cases} \quad \overline{g}(x) = \begin{cases} g(x), & x \neq a; \\ 0, & x = a \end{cases}$$

которые уже будут непрерывны в $U(a)$. Рассмотрим отрезок $[a, x]$, $x > a$. На этом отрезке f и g удовлетворяют условиям теоремы Коши, и поэтому существует точка $c \in (a, x)$ такая, что

$$\frac{\overline{f}(x) - \overline{f}(a)}{\overline{g}(x) - \overline{g}(a)} = \frac{\overline{f}'(c)}{\overline{g}'(c)},$$

или

$$\frac{\overline{f}(x)}{\overline{g}(x)} = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

При $x \to a$ и $c \to a$, следовательно,

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{c \to a} \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Аналогично проводится доказательство для $x < a$. □

Формула (3) называется ***правилом Лопиталя*** вычисления пределов.

Пример 1. *Вычислить предел*

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{\operatorname{arctg} x}.$$

Решение. Для $x = 0$ числитель и знаменатель функции удовлетворяют условиям теоремы 4, поэтому используем правило Лопиталя. Чтобы показать, в каком месте выкладок будет оно применяться, поставим в этом месте над знаком равенства аббревиатуру «Л.». Получим

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{\operatorname{arctg} x} \overset{\text{Л.}}{=} \lim_{x \to 0} \frac{(\sin 3x)'}{(\operatorname{arctg} x)'} = \lim_{x \to 0} \frac{3 \cos 3x}{1/(1 + x^2)} = \lim_{x \to 0} 3\left(1 + x^2\right) \cos 3x = 3.$$

Теорема 5. *Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены и дифференцируемы в некоторой окрестности $\overset{\circ}{U}(a)$ точки $x = a \in \mathbb{R}$, $g'(x) \neq 0$ в этой окрестности и $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \infty$. Тогда, если существует предел $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, то существует и предел $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$, и эти пределы равны:*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Доказательство приведено в Приложении[2)].

Пример 2. *Найти значение предела*

$$\lim_{x\to 0+0} \frac{\ln x}{e^{1/x}}.$$

Решение. Условия теоремы выполнены, поэтому можно применить правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to 0+0} \frac{\ln x}{e^{1/x}} \overset{\text{Л.}}{=} -\lim_{x\to 0+0} \frac{1/x}{e^{1/x}/x^2} = -\lim_{x\to 0+0} \frac{x}{e^{1/x}} = 0.$$

Теорема 6. *Теоремы 4 и 5 остаются справедливыми и при $x \to \infty$.*

Доказательство. Действительно, достаточно превратить ∞ в 0:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{t\to 0} \frac{f(1/t)}{g(1/t)} = \lim_{t\to 0} \frac{[f(1/t)]'}{[g(1/t)]'} = \lim_{t\to 0} \frac{-f'(1/t)/t^2}{-g'(1/t)/t^2} =$$
$$= \lim_{t\to 0} \frac{f'(1/t)}{g'(1/t)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Пример 3. *Показать, что функция x^α, $\alpha > 0$, при $x \to \infty$ растет быстрее, чем функция $\ln x$.*

Решение. Найдем предел отношения этих функций:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^\alpha}{\ln x} \overset{\text{Л.}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\alpha x^{\alpha-1}}{1/x} = \alpha \lim_{x\to\infty} x^\alpha = \infty.$$

Замечание 4. *Если предел $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ не существует, но функции $f'(x)$ и $g'(x)$ удовлетворяют в качестве функций $f(x)$ и $g(x)$ условиям одной из теорем 4-6, то, очевидно, справедливо равенство*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f''(x)}{g''(x)}, \tag{4}$$

то есть правило Лопиталя здесь применяется как бы дважды. Если и последний предел в цепочке (4) не существует, можно повторить рассуждения о производных $f''(x)$ и $g''(x)$ и т.д., пока не получится, что *предел* $\lim_{x\to a}\frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}$ *существует. Его значение и будет значением искомого предела* $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$.

Пример 4. *Найти предел*

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}.$$

Решение. Чтобы получить определенное значение предела, правило Лопиталя придется применить три раза:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}\overset{\text{Л.}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos x}\overset{\text{Л.}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x}\overset{\text{Л.}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}}{\cos x}=2.$$

□

Возникает вопрос: если цепочку (4) все продолжать и продолжать в надежде, что в конце концов получится определенное значение предела, обязательно ли это произойдет? Как показывает следующий пример, вовсе не обязательно.

Пример 5. *Найти предел*

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x+e^{2x}}{e^{2x}+e^{4x}}.$$

Решение. Применим правило Лопиталя n раз:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x+e^{2x}}{e^{2x}+e^{4x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x+2^ne^{2x}}{2^ne^{2x}+4^ne^{4x}}.$$

Как видим, при любом n числитель и знаменатель стремятся к бесконечности. Значит, цепочка (4) будет бесконечной и не приведет к решению задачи. В то же время, искомый предел легко находится делением числителя и знаменателя на e^{4x}:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x+e^{2x}}{e^{2x}+e^{4x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^{-3x}+e^{-2x}}{e^{-2x}+1}=0.$$

□

Возникает и другой интересный вопрос: если с помощью правила Лопиталя предел вычислить нельзя, означает ли это, что он не существует? Рассмотрим еще один пример.

Пример 6. *Найти предел*

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}.$$

Решение. Попробуем применить правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}\overset{\text{Л.}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}}{\cos x}.$$

Предел в правой части равенства не существует, так как не существует предел $\cos\frac{1}{x}$ при $x \to 0^\dagger$. В силу этого далее применять правило Лопиталя тоже нельзя, потому что не существует предел числителя.

Но вычислить заданный предел можно, используя эквивалентность б. м. $\sin x \sim x$ при $x \to 0$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x} = \lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0.$$

3 Разрешение неопределенностей

Предел отношения двух функций, когда обе стремятся к нулю или бесконечности, называется неопределенностью. Упомянутые неопределенности записывают, соответственно, как $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$. Если требуется найти такой предел, говорят, что требуется разрешить неопределенность. Ясно, что для разрешения неопределенности надо применить какую-нибудь хитрость, например, геометрический подход для вычисления первого замечательного предела. Хитрости называются методами вычисления пределов. Правило Лопиталя как раз и является таким методом, призванным разрешать неопределенности указанных выше двух типов. В этом мы убедились на примерах. Но существуют и другие виды неопределенностей: $0\cdot\infty$, 0^0, 0^∞, ∞^0, 1^∞, $\infty-\infty$, которые тоже можно разрешить, используя правило Лопиталя, но сначала их надо преобразовать к неопределенностям $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$.

3.1 Неопределенность вида $0\cdot\infty$.

Пусть $\lim_{x\to a}\varphi(x) = 0$, $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$. Тогда предел $\lim_{x\to a}\varphi(x) f(x)$ можно вычислить двумя способами:

$$\lim_{x\to a}\varphi(x) f(x) = \begin{cases} \lim_{x\to a}\frac{\varphi(x)}{1/f(x)} = \frac{0}{0}, \\ \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{1/\varphi(x)} = \frac{\infty}{\infty}. \end{cases}$$

Выбор способа определяет простоту получения результата и вообще возможность его получения.

Пример 7. *Вычислить предел*

$$\lim_{x\to 0+0} x^5\ln x.$$

Решение. Преобразуем неопределенность $0\cdot\infty$ в неопределенность $\frac{\infty}{\infty}$:

$$\lim_{x\to 0+0} x^5\ln x = \lim_{x\to 0+0}\frac{\ln x}{x^{-5}} \overset{\text{Л.}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{1/x}{-5x^{-6}} = -\frac{1}{5}\lim_{x\to 0} x^5 = 0.$$

[†] В лекции «Предел функции» показано, что предел $\cos x$ при $x\to\infty$ не существует.

3.2 Неопределенности вида 0^0, 0^∞, ∞^0, 1^∞

В данном случае можно воспользоваться формулой $f^\varphi = e^{\varphi \ln f}$, $f > 0$. Сначала находят предел $A = \lim_{x\to a} \varphi \ln f$, а затем полагают $\lim_{x\to a} f^\varphi = e^A$.

Пример 8. *Найти значение предела*

$$\lim_{x\to 0+0} x^x.$$

Решение. Представим функцию под знаком предела в виде $x^x = e^{x\ln x}$ и найдем предел показателя:

$$\lim_{x\to 0+0} x\ln x = \lim_{x\to 0+0} \frac{\ln x}{1/x} \overset{\text{Л.}}{=} \lim_{x\to 0+0} \frac{1/x}{-1/x^2} = -\lim_{x\to 0+0} x = 0.$$

Следовательно, искомый предел равен

$$\lim_{x\to 0+0} x^x = e^0 = 1.$$

3.3 Неопределенность вида $\infty - \infty$

Пусть $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} \varphi(x) = \infty$. Предел разности таких функций представляют следующим образом:

$$\lim_{x\to a} [f(x) - \varphi(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \left[1 - \frac{\varphi(x)}{f(x)}\right].$$

Если предел дроби $\varphi(x)/f(x)$ не равен 1, то предел выражения в квадратных скобках либо равен другому числу, либо ∞, и в обоих случаях искомый предел равен $\pm\infty$. Если же $\lim_{x\to a} \varphi(x)/f(x) = 1$, то получаем неопределенность вида $0\cdot\infty$, разрешать которую мы уже умеем.

Пример 9. *Вычислить предел*

$$\lim_{x\to\infty} (x - e^x).$$

Решение. Запишем заданный предел в виде

$$\lim_{x\to\infty} (x - e^x) = \lim_{x\to\infty} x\left(1 - \frac{e^x}{x}\right).$$

Найдем предел отношения функций:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x} \overset{\text{Л.}}{=} \lim_{x\to\infty} e^x = \infty.$$

Следовательно, искомый предел равен $-\infty$. □

Можно убедиться в том, что *Mathematica* в состоянии правильно решить все рассмотренные на лекции примеры.

Приложение

[1)] Рассмотрим кривую на плоскости, заданную в параметрической форме: $x = x(t)$, $y = y(t)$. Если координатные функции на отрезке $[t_1, t_2]$ удовлетворяют условиям теоремы Коши, то справедливо равенство

$$\frac{y(t_2) - y(t_1)}{x(t_2) - x(t_1)} = \frac{y'(\tau)}{x'(\tau)},\ \tau \in [t_1, t_2],$$

или, если обозначить $\Delta x = x(t_2) - x(t_1)$, $\Delta y = y(t_2) - y(t_1)$,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = y'_x(\tau),\ \tau \in [t_1, t_2]. \tag{П1}$$

Проведем через точки на кривой $A(x(t_1), y(t_1))$ и $B(x(t_2), y(t_2))$ секущую. Ее угловой коэффициент равен $\Delta y/\Delta x$. Равенство (П1) означает, что на кривой имеется точка $C(x(\tau), y(\tau))$, в которой касательная к кривой (с угловым коэффициентом $y'_x(\tau)$) параллельна секущей AB. Это демонстрирует анимационный рис. 3. При изменении положения секущей AB каждый раз на кривой находится точка C, в которой касательная параллельна секущей.

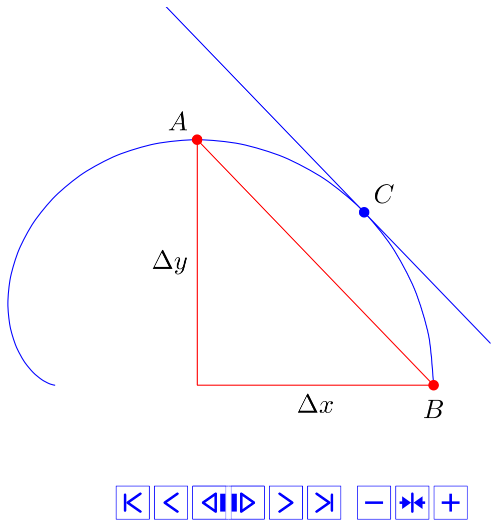

Рис. 3. К теореме Коши.

[2)] *Доказательство теоремы 5.*

Сначала рассмотрим следующее утверждение.

Лемма П1. *Если предел $\lim_{x\to a} f(x)$ положителен (отрицателен), то в некоторой окрестности $U(a)$ функция $f(x)$ положительна (отрицательна).*

Доказательство. Пусть $\lim_{x\to} f(x) = \infty$. По определению предела

$$\forall(\varepsilon > 0)\exists(\delta > 0)\forall(x : x \neq a)\ x \in U(a, \delta) \Longrightarrow f(x) \in U(\infty, \varepsilon).$$

Это значит, что в окрестности $U(a, \delta)$ выполняется $f(x) > \varepsilon > 0$, что и требовалось доказать.

Пусть теперь $A \in \mathbb{R}$, $A > 0$. Снова по определению предела

$$\forall(\varepsilon > 0)\exists(\delta > 0)\forall(x : x \neq a)\ x \in U(a, \delta) \Longrightarrow |f(x) - A| < \varepsilon). \tag{П2}$$

Последнее неравенство можно переписать так:

$$A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon. \tag{П3}$$

Так как $A > 0$, то существует[†] число c такое, что $0 < c < A$. Возьмем $\varepsilon = A - c > 0$, тогда из неравенства (П3) следует, что $f(x) > A - \varepsilon = c > 0$. Для выбранного нами ε в соответствии с (П2) найдется число $\delta > 0$, которое и даст нам ту окрестность $U(a, \delta)$ точки a, в которой функция $f(x)$положительна.

Случай $A < 0$ доказывается аналогично.

Следствие П1. *Если* $\lim_{x\to a} f(x) \neq 0$ *, то* $f(x) \neq 0$ *в некоторой окрестности* $U(a)$.

Перейдем к доказательству теоремы 5.

Вначале предположим, что $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \neq 0$. Запишем предел отношения функций в виде

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{1/g(x)}{1/f(x)}.$$

Поскольку пределы функций f и g при $x \to a$ равны ∞, то по лемме П1 существует окрестность $U_1(a)$, в которой они положительны. Значит, функции $1/f$ и $1/g$ определены в окрестности $U(a) \cap U_1(a)$. Так как по предположению $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \neq 0$, то в соответствии со следствием П1 существует окрестность $U_2(a)$ точки a, в которой $\frac{f'(x)}{g'(x)} \neq 0$, значит, и $f'(x) \neq 0$. Тогда и функция $\left(\frac{1}{f(x)}\right)' = -\frac{f'(x)}{f^2(x)} \neq 0$ в этой окрестности. В окрестности $U(a) \cap U_1(a) \cap U_2(a)$ функции $1/f(x)$ и $1/g(x)$ удовлетворяют условиям теоремы 4 и можно записать следующее равенство:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{1/g(x)}{1/f(x)} = \lim_{x\to a} \frac{[1/g(x)]'}{[1/f(x)]'} = \lim_{x\to a} \frac{g'(x)/g^2(x)}{f'(x)/f^2(x)} =$$
$$= \lim_{x\to a} \frac{g'(x)}{f'(x)} \cdot \lim_{x\to a} \frac{f^2(x)}{g^2(x)} = \lim_{x\to a} \frac{g'(x)}{f'(x)} \cdot \left(\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}\right)^2.$$

Отсюда получаем

$$\lim_{x\to a} \frac{f\,(x)}{g\,(x)} = \left[\lim_{x\to a} \frac{g'\,(x)}{f'\,(x)}\right]^{-1} = \lim_{x\to a} \frac{f'\,(x)}{g'\,(x)}.$$

Пусть теперь $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = 0$. Тогда $\lim_{x\to a} \frac{[f(x)+g(x)]'}{g'(x)} = 1 \neq 0$, и функции $f + g$ и g удовлетворяют условиям доказываемой теоремы при условии $\lim_{x\to a} \frac{[f(x)+g(x)]'}{g'(x)} \neq 0$. Воспользовавшись установленным в первой части доказательства, получаем

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) + g(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x) + g'(x)}{g'(x)} = 1,$$

откуда

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Литература

[1] Бугров Я.С., Никольский С.М. *Высшая математика. Дифференциальное и интегральное исчисление.* – М.: Наука, 1984, – с. 149-154, 156-159.

[2] Письменный Д.Т. *Конспект лекций по высшей математике.* – М.: Рольф, 2000. Ч. 1. – с. 164–170.

[†] Лекция «Числа».