Скалярное поле

Волченко Ю.М.

Содержание лекции

Скалярное поле. Линии и поверхности уровня. Производная по направлению и градиент, свойства градиента. Производная скалярного поля по направлению некоторой кривой. Ортогональность поверхностей (линий) уровня.

Применение системы *Mathematica* для изображения скалярных полей, вычисления их градиентов и производных по направлению, для изображения полей градиента на плоскости и в пространстве.

28 апреля 2015 г.

Этой лекцией начинается новый раздел курса, который традиционно называют *векторным анализом*. Предметом последнего являются так называемые поля, обобщающие понятия многих физических полей, используемых в том числе и в технических науках. Достаточно назвать поле гравитации, электромагнитное поле, поля скоростей движущихся частиц газа или жидкости, чтобы стало понятно, что изучение полей является составной частью инженерного образования. Фактически всего два поля, скалярное и векторное, которые мы и станем рассматривать, вобрали в себя все свойства известных науке физических полей. В этом и состоит задача математики: обобщить, изучить и дать рецепт на все частные случаи.

1 Общие понятия

Скалярным полем называется функция точки $M\,(x,y,z)$ в трехмерном пространстве

$$u = u\,(M) = u\,(x,y,z)\,,$$

где (x,y,z) — координаты точки M в какой-нибудь системе координат.

В приложениях рассматривают скалярные поля влажности, давления, температуры, электростатического потенциала и др. Вообще говоря, все перечисленные поля трехмерны, но в ряде случаев, когда можно пренебречь, например, толщиной объекта, или, когда поле оказывается одинаковым во всех плоскостях, параллельных данной, его идеализируют, считая с достаточной степенью точности двумерным. Тогда его представляют функцией двух переменных:

$$u = u\,(M) = u\,(x, y)\,,$$

и называют ***плоским***.

Как видим, новый объект изучения, скалярное поле, представляет собой старую знакомую — функцию нескольких переменных. Просто здесь эта функция выступает под новым именем. Интересно, может ли смена имени привести к новому содержанию? Оказывается, может — новое имя дает новый смысл старым понятиям, а они приводят к возникновению новых понятий.

2 Изображение скалярных полей

Поскольку скалярное поле является обычной функцией, то нам уже известно геометрическое представление плоского поля — с помощью линий уровня[†]. Повторим здесь, что это такое.

Линией уровня плоского скалярного поля называется линия, в каждой точке которой поле имеет одно и то же значение. Уравнение линии уровня:

$$\boxed{u\,(x, y) = C = \mathrm{const}\,.} \tag{1}$$

Но для трехмерного скалярного поля этого недостаточно. Так что введем еще одно, аналогичное, понятие. ***Поверхностью уровня*** скалярного поля называется поверхность, в каждой точке которой поле имеет одно и то же значение. Поэтому уравнение поверхности уровня имеет вид

$$\boxed{u\,(x, y, z) = C = \mathrm{const}\,.} \tag{2}$$

Пример 1. *Потенциал φ поля диполя[‡] (рис. 1) в точке $A\,(x, y)$ выражается формулой*

$$\varphi = \frac{kx}{(x^2 + y^2)^{3/2}}. \tag{3}$$

где k — константа. Изобразить линии равного потенциала.

Решение. Линии равного потенциала, или эквипотенциали, и есть линии уровня скалярного поля φ. Уровень потенциала будем задавать числом C, так что уравнение линии уровня в соответствии с формулой (1) будет таким:

$$\frac{x}{(x^2 + y^2)^{3/2}} = \frac{C}{k},$$

[†]Лекция «Экстремумы функции нескольких переменных».
[‡]Лекция «Формула Тейлора».

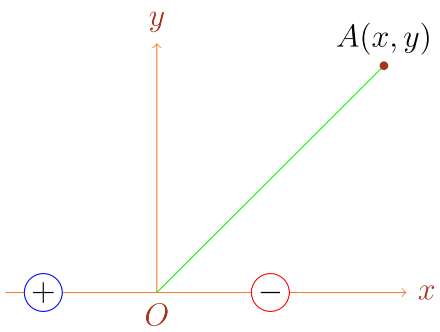


Рис. 1. Диполь.

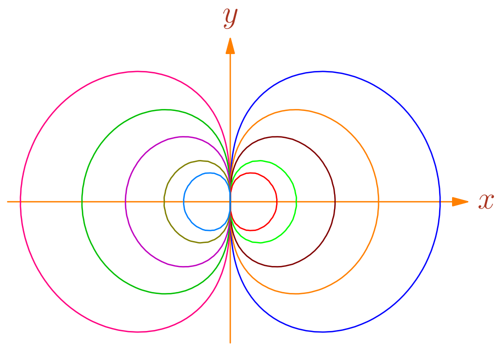


Рис. 2. Эквипотенциали диполя.

или

$$\left(x^2+y^2\right)^{3/2}-\frac{k}{C}\,x=0. \tag{4}$$

Поскольку уравнение не изменяется при замене y на $-y$, то кривая симметрична относительно оси Ox. При $y=0$ получаем уравнение $x^3-kx/C=0$, определяющее абсциссы точек пересечения линии уровня с осью абсцисс: $x_1=0$, $x_2=\pm\sqrt{k/C}$. При $x=0$ уравнение (4) превращается в $y=0$, но такая точка у нас уже есть. Продифференцируем (4) и найдем производную y':

$$\frac{3}{2}\sqrt{x^2+y^2}\,(2x+2yy')=\frac{k}{C},\quad x\sqrt{x^2+y^2}+yy'\sqrt{x^2+y^2}=\frac{k}{3C},$$

$$y'=\frac{\frac{k}{3C}-x\sqrt{x^2+y^2}}{y\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Из уравнения (4) видно, что $\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt[3]{kx/C}$, поэтому

$$y'=\frac{\frac{k}{3C}-x\sqrt[3]{kx/C}}{y\sqrt{x^2+y^2}},$$

следовательно, производная равна нулю при $x=\pm\frac{1}{3^{3/4}}\sqrt{k/C}$. Для $x>0$, $y>0$ производная при переходе через точку $x_3=\frac{1}{3^{3/4}}\sqrt{k/C}$ слева направо меняет знак с плюса на минус и точно так же ведет себя в окрестности точки $x_4=-\frac{1}{3^{3/4}}\sqrt{k/C}$ (при $C<0$). Поэтому при $y>0$ точки x_3, x_4 — точки максимума верхней части линии и одновременно — точки минимума ее нижней части (в силу симметрии кривой относительно Ox). Найдем еще точки пересечения прямых $y=mx$ с линиями уровня, используя уравнение (4):

$$\left(x^2+m^2x^2\right)^{3/2}=\frac{k}{C}\,x,\quad x^3\left(1+m^2\right)^{3/2}=\frac{k}{C}\,x,$$

$$x=0,\ x=\pm\sqrt{\frac{k}{C}}\cdot\frac{1}{\left(1+m^2\right)^{3/4}}.$$

Собранная о линиях уровня информация приводит к графику, показанному на рис. 2 для некоторых значений k/C.

Пример 2. *Потенциал поля диполя в пространстве задается формулой*

$$\varphi = \frac{kx}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}.$$

Найти поверхности уровня этого поля.

Решение. Применим формулу (2), т. е. представим линии уровня уравнением

$$\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} = \frac{C}{k},$$

а затем — уравнением

$$\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2} - \frac{k}{C}x = 0. \tag{5}$$

Анализируя левую часть полученного уравнения, можно придти к выводу, что поверхности уровня симметричны относительно плоскостей xOz и xOy, а сечения поверхностей уровня плоскостями, параллельными xOy, будут подобны рис. 2. В результате получатся поверхности, изображенные на рис. 3 при $z > 0$.

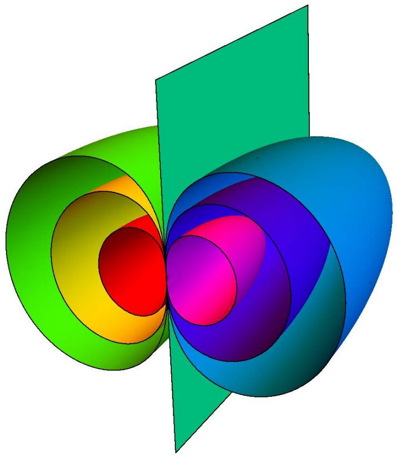


Рис. 3. Эквипотенциальные поверхности диполя.

3 Производная по направлению и градиент

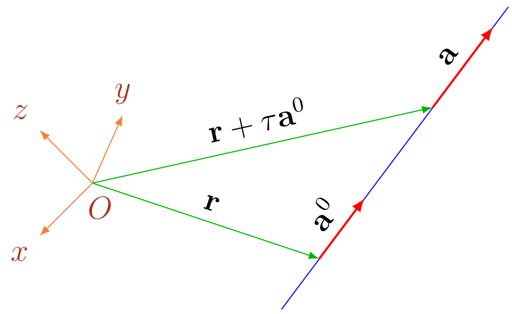
Итак, мы выяснили, что скалярное поле — это обыкновенная функция двух или трех переменных. Для исследования таких функций мы использовали частные производные. Но что такое частные производные? Это — скорости изменения функции вдоль координатных осей. А если мы изучаем температурное или еще какое-нибудь скалярное поле, нам может понадобиться скорость его изменения вдоль любого направления в пространстве или на плоскости. Поэтому естественно возникает потребность в новом виде производной, производной в заданном направлении.

Производной $\partial u/\partial \mathbf{a}$ скалярного поля $u(M) = u(\mathbf{r})$ ***по направлению*** вектора $\mathbf{a}$, $\mathbf{a} \neq \mathbf{o}$, называется предел (если он существует)

$$\frac{\partial u(M)}{\partial \mathbf{a}} = \lim_{\tau\to 0} \frac{u\left(\mathbf{r}+\tau\mathbf{a}^0\right) - u(\mathbf{r})}{\tau},$$

где $\mathbf{r}$ – радиус-вектор точки M, $\mathbf{o}$ – нулевой вектор, $\mathbf{a}^0 = \mathbf{a}/\left|\mathbf{a}\right|$ – единичный вектор направления $\mathbf{a}$.

Важную роль при вычислении производной по направлению и вообще в исследовании векторных полей играет уже знакомый вам градиент. Тем не менее повторим здесь его определение. ***Градиентом*** скалярного поля u называется вектор



$$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right)^T.$$

Такая запись со значком транспонирования означает, что мы пользуемся матричными обозначениями векторов и градиент в такой записи – вектор-столбец. В лекциях по векторному анализу удобнее пользоваться записью векторов, используемой в векторной алгебре, так что в пределах названных лекций значок транспонирования будет опускаться.

Кроме того, если ввести вектор-оператор дифференцирования («жаждущий продифференцировать что угодно»[†])

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right),$$

то появится возможность записывать градиент векторного поля как результат «произведения»[‡] вектора ∇ на скаляр u (именно в таком порядке):

$$\nabla \cdot u = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right).$$

Мы будем использовать и вектор ∇u и «произведение» $\nabla \cdot u$.

Теорема 1. *Если скалярное поле u дифференцируемо, то производная по направлению существует и вычисляется по формуле*

$$\boxed{\frac{\partial u\left(M\right)}{\partial \mathbf{a}} = \mathbf{a}^0 \cdot \nabla u\left(M\right) = \mathbf{a}^0 \cdot \left(\nabla \cdot u\left(M\right)\right),} \tag{6}$$

где вне скобок $\cdot$ означает знак скалярного произведения, а в скобках – знак произведения вектора на скаляр.

Доказательство. Обозначим $\mathbf{a}^0 = \left(a_x^0, a_y^0, a_z^0\right)$. Используя формулу Тейлора для функции u и учитывая, что

$$\left|\mathbf{a}^0\right| = \sqrt{\left(a_x^0\right)^2 + \left(a_y^0\right)^2 + \left(a_z^0\right)^2} = 1,$$

[†] Фейнмановские лекции по физике. Электричество и магнетизм.– вып. 5, М.: Мир, 1966.

[‡] На самом деле приписывания символа u к символам частных производных дифференциального оператора ∇.

получим

$$\frac{u\left(\mathbf{r}+\tau\mathbf{a}^0\right)-u\left(\mathbf{r}\right)}{\tau}=\frac{u\left(x+\tau a_x^0,y+\tau a_y^0,z+\tau a_z^0\right)-u\left(x,y,z\right)}{\tau}=$$
$$=\frac{1}{\tau}\left[\frac{\partial u\left(M\right)}{\partial x}\tau a_x^0+\frac{\partial u\left(M\right)}{\partial y}\tau a_y^0+\frac{\partial u\left(M\right)}{\partial z}\tau a_z^0+\right.$$
$$\left.+o\left(\tau\sqrt{\left(a_x^0\right)^2+\left(a_y^0\right)^2+\left(a_z^0\right)^2}\right)\right]=$$
$$=\frac{\partial u\left(M\right)}{\partial x}a_x^0+\frac{\partial u\left(M\right)}{\partial y}a_y^0+\frac{\partial u\left(M\right)}{\partial z}a_z^0+\frac{o\left(\tau\right)}{\tau}.$$

Последнее выражение при $\tau\to 0$ стремится к правой части (6). □

Можно дать определение градиента, не зависящее от системы координат, в которой рассматривается скалярное поле. Подобные определения называются ***инвариантными*** по отношению к системе координат.

Градиентом скалярного поля называется вектор, скалярное произведение которого на единичный вектор некоторого направления равно производной скалярного поля по этому направлению. Понятно, что это определение опирается на формулу (6).

Рассмотрим особенности взаимоотношений градиента и производной по направлению.

СВОЙСТВА ГРАДИЕНТА

1° *Градиент направлен по нормали к поверхности уровня (или линии уровня, если поле плоское, рис. 4).*

Поверхность уровня имеет уравнение $u\left(x,y,z\right)=\mathrm{const}$ и ее нормаль равна $\mathbf{N}=\left(\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z}\right)$. Такое же выражение имеет и градиент.

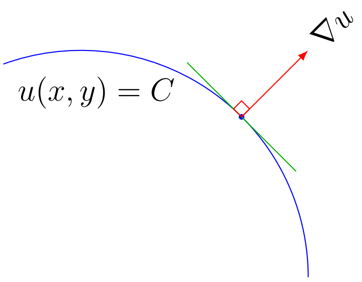


Рис. 4.

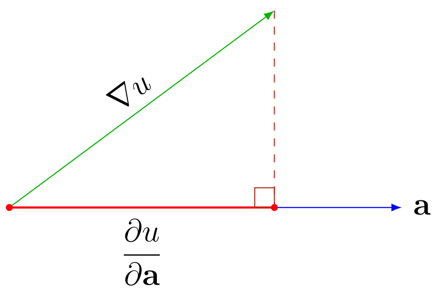


Рис. 5.

2° *Градиент показывает направление возрастания скалярного поля.*

Пусть $\mathbf{a} = \nabla u$. Тогда

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{a}} = \mathbf{a}^0 \cdot \nabla u = |\nabla u| \cos \widehat{\mathbf{a}, \nabla u} = |\nabla u| > 0. \tag{7}$$

3° *Производная по направлению градиента максимальна в данной точке и равна модулю градиента.*

Это видно из (7), так как $\cos \widehat{\mathbf{a}, \nabla u}$ максимален, когда вектор $\mathbf{a}$ сонаправлен вектору ∇u.

4° *Градиент в данной точке скалярного поля единственен.*

Пусть $\mathbf{a} \neq \mathbf{o}$ – произвольный вектор, а $\mathbf{g}_1$ и $\mathbf{g}_2$ – два различных градиента. Тогда

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{a}} = \mathbf{a}^0 \cdot \mathbf{g}_1, \ \frac{\partial u}{\partial \mathbf{a}} = \mathbf{a}^0 \cdot \mathbf{g}_2.$$

Вычитая эти равенства, получим

$$\mathbf{a}^0 \cdot (\mathbf{g}_1 - \mathbf{g}_2) = 0, \ \mathbf{g}_1 - \mathbf{g}_2 \perp \mathbf{a}^0.$$

Но только нулевой вектор может быть перпендикулярен любому ненулевому вектору, поэтому $\mathbf{g}_1 - \mathbf{g}_2 = \mathbf{o}$ и, значит, $\mathbf{g}_1 = \mathbf{g}_2$.

5° *Производная по направлению равна проекции градиента на это направление (рис. 5):*

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{a}} = \mathrm{Pr}_{\mathbf{a}} \nabla u.$$

Это вытекает из определения проекции вектора на направление, заданное другим вектором:

$$\mathrm{Pr}_{\mathbf{a}} \nabla u = \mathrm{Pr}_{\mathbf{a}^0} \nabla u = \mathbf{a}^0 \cdot \nabla u = \frac{\partial u}{\partial \mathbf{a}}.$$

Производной скалярного поля ***по направлению*** некоторой ***кривой*** называется производная этого поля по направлению вектора, касательного к этой кривой.

Свойство 5° градиента дает возможность простого геометрического построения производной по направлению в заданной точке M.

На градиенте как на диаметре строим сферу, рис. 6. Через точку M проводим луч в направлении вектора $\mathbf{a}$ до пересечения со сферой в точке P. Длина отрезка MP и будет производной $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{a}}$. Действительно, $\angle MPK$ – прямой, и MP является проекцией градиента на вектор $\mathbf{a}$. Если сферу пересечет не луч, а его продолжение, то производная по данному направлению будет отрицательной и будет отличаться от длины MP только знаком.

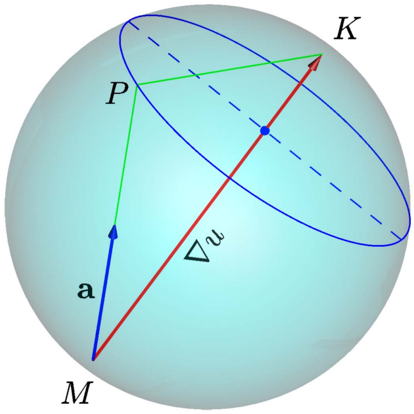


Рис. 6. $\dfrac{\partial u}{\partial \mathbf{a}} = MP$.

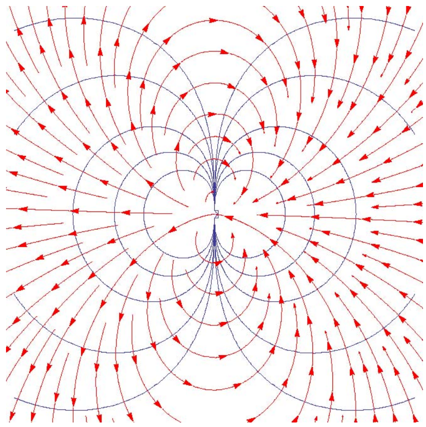


Рис. 7. Градиенты и эквипотенциали.

Пример 3. *Найти производную по направлению вектора* $\mathbf{a} = (-1; 1; 1)$ *скалярного поля из примера 2 в точке* $M\,(1; 1; 1)$.

Решение. Найдем частные производные скалярного поля:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = k\,\frac{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2} - 3x^2\left(x^2+y^2+z^2\right)^{1/2}}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^3} =$$
$$= k\,\frac{x^2+y^2+z^2-3x^2}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{5/2}} = k\,\frac{y^2+z^2-2x^2}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{5/2}},$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{3kxy\left(x^2+y^2+z^2\right)^{1/2}}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^3} = -\frac{3kxy}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{5/2}},$$
$$\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{3kxz}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{5/2}},$$

а затем его градиент:

$$\nabla u = \frac{k}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{5/2}}\left(y^2+z^2-2x^2, -3xy, -3xz\right). \tag{8}$$

Единичным вектором направления $\mathbf{a}$ будет вектор

$$\mathbf{a}^0 = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \frac{1}{\sqrt{3}}\,(-1; 1; 1)\,.$$

Вычислим производную скалярного поля в заданной точке по заданному направлению:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \mathbf{a}}\right|_M = \mathbf{a}^0 \cdot \nabla u\,(M) = \frac{1}{3^{1/2}}\,(-1; 1; 1)\,\frac{k}{3^{5/2}}\,(0; -3; -3) = -\frac{6k}{3^3} = -\frac{2k}{9}.$$

Для плоского поля, показанного на рис. 2, $z \equiv 0$ и градиент (8) принимает вид

$$\nabla u = \frac{k}{\left(x^2+y^2\right)^{5/2}}\,\left(y^2-2x^2, -3xy\right).$$

Изображая градиент стрелками в различных точках поля, можно получить наглядное представление о линиях, для которых он является касательным вектором (силовые линии напряженности диполя), особенно, если наложить рисунок этих линий на изображения эквипотенциалей, рис. 7. $\square$

Поверхности (***линии***) уровней двух скалярных полей ***ортогональны***, если ортогональны градиенты этих полей.

Пример 4. *Убедиться в ортогональности поверхностей уровней скалярных полей*

$$u = x^2 - 2y^2 + z^2,\ v = xyz.$$

Решение. Найдем градиенты заданных полей:

$$\nabla u = (2x, -4y, 2z)\,,\ \nabla v = (yz, xz, xy)\,.$$

Вычислим их скалярное произведение:

$$\nabla u \cdot \nabla v = 2xyz - 4xyz + 2xyz \equiv 0.$$

Таким образом, градиенты ортогональны, а вместе с ними ортогональны и поверхности уровней. □

В Приложении[1)] приведены некоторые применения системы *Mathematica* для расчета и изображения скалярных полей.

Приложение

[1)] Вначале познакомимся с возможностями, которые предоставляет *Mathematica* для построения линий и поверхностей уровня. В справочном руководстве к этой системе можно найти пример изображения взаимодействия нескольких электрических зарядов. Вначале задается электростатический потенциал

```
ElectroStaticPotential[q_,p_,r_] := Sum[q[[i]]/Norm[r - p[[i]]],{i,Length[q]}]
```

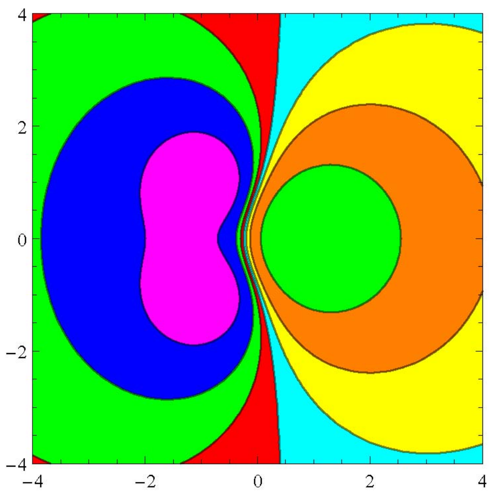
где q — список величин зарядов; p — список их координат на плоскости или в пространстве, r — координаты точки (радиус-вектор), для которой рассчитывается электрический потенциал; Norm — оператор расстояния между двумя точками; Sum[f,{i,i_{max}}] — оператор, вычисляющий сумму $\sum_{i=1}^{i_{max}} f$. Для, скажем, трех зарядов *Mathematica* может представить эту функцию в стандартной математической форме:

```
ElectroStaticPotential[{q1,q2,q3},{{x1,y1},{x2,y2},{x3,y3}},{x,y}]
    //TraditionalForm
```

$$\frac{q_1}{\sqrt{|x-x_1|^2+|y-y_1|^2}}+\frac{q_2}{\sqrt{|x-x_2|^2+|y-y_2|^2}}+\frac{q_3}{\sqrt{|x-x_3|^2+|y-y_3|^2}}$$

Построим эквипотенциали поля из трех зарядов $q_1 = q_2 = -1$, $q_3 = 2$, расположенных, соответственно, в точках $(-1;-1)$, $(1;1)$, $(1;0)$:

```
ContourPlot[Evaluate[ElectroStaticPotential[{-1,-1,2},{{-1,-1},{-1,1},
    {1,0}},{x,y}]],{x,-4,4},{y,-4,4},Contours → {-0.75,-0.25,-0.1,
    0,0.1,0.25,0.75},PlotRange → 1,ClippingStyle → Automatic,
    ContourShading → {Magenta,Blue,Green,Red,Cyan,Yellow,Orange,Green}]
```



Опция ContourShading задает цвет закраски областей между линиями уровня поля, опция ClippingStyle определяет режим рисования для областей, в которых поверхность (или линия) выходит за пределы расчетной области рисования. У нас такими областями являются области, прилегающие к точкам, в которых сосредоточены заряды. При приближении к этим точкам электростатический потенциал устремляется в бесконечность и, конечно, уходит за все мыслимые пределы.

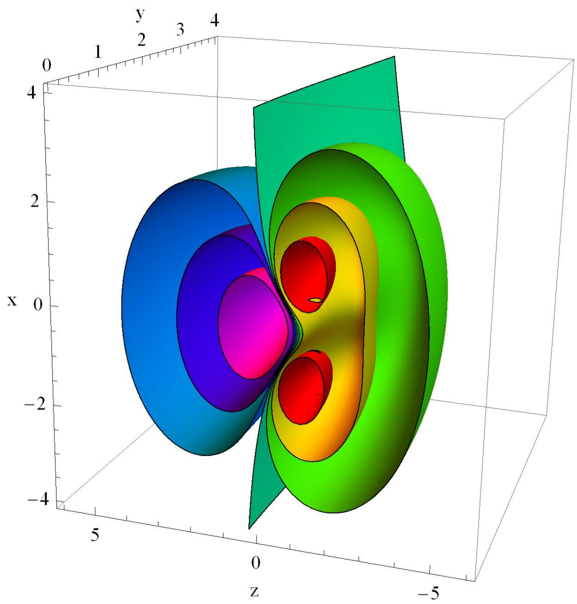
Эту же функцию электростатического потенциала можно использовать и для представления скалярного поля в трехмерном пространстве. Для двух зарядов, например, она будет выглядеть так:

```
ElectroStaticPotential[{q1,q2},{{x1,y1,z1},{x2,y2,z2}},{x,y,z}]
    // TraditionalForm
```

$$\frac{q_1}{\sqrt{|x-x_1|^2+|y-y_1|^2+|z-z_1|^2}}+\frac{q_2}{\sqrt{|x-x_2|^2+|y-y_2|^2+|z-z_2|^2}}$$

Построим поверхности уровня для трех зарядов $q_1 = 2$, $q_2 = q_3 = -1$, расположенных, соответственно, в точках $(0; 0; 0)$, $(1; 0; -1)$, $(-1; 0; -1)$:

```
ContourPlot3D[ Evaluate[ElectroStaticPotential[{2,-1,-1},{{0,0,0},{1,0,-1},
    {-1,0,-1}},{x,y,z}]],{x,-4,4},{y,0,4},{z,-6,6},Contours → {-0.75,-0.25,
    -0.1,0,0.1,0.25,0.75},ContourStyle → Table[Hue[i/7],{i,0,6}],
    Mesh → None,AxesLabel → {"x","y","z"}]
```



Опция `ContourStyle` задает цвет поверхностей уровня, причем, `Hue[i/7]` означает i-й оттенок цвета из палитры цветов {`Red`, `Yellow`, `Green`, `Cyan`, `Blue`, `Magenta`}.

Градиент скалярного поля `u` вычисляет оператор `Grad[u,{x1,...,xn}]`, где `{x1,...,xn}` — аргументы скалярного поля. Например, для поля $u = 2x^2yz^3$ получаем

```
Grad[2 x^2 y z^3,{x,y,z}]
{4 x y z^3,2 x^2 z^3,6 x^2 y z^2}
```

Можно найти значение градиента в конкретной точке, например, в точке $(1; -2; -1)$:

```
Grad[2 x^2 y z^3,{x,y,z}/. {x → 1,y → -2,z → -1}}
{8,-2,-12}
```

Оператор градиента можно ввести и так: набрать `Esc` `grad` `Esc`, чтобы появился шаблон $\nabla_{\square}\square$, а затем в квадратики ввести формулу для скалярного поля и список его аргументов. Выглядит это так:

```
∇{x,y,z}(2 x^2 y z^3)
{4 x y z^3,2 x^2 z^3,6 x^2 y z^2}
```

Градиент можно использовать для нахождения экстремумов функции нескольких переменных. Пусть, например, требуется найти экстремумы функции

```
f[x_,y_] := y^2 + 4 y + x^2 - 2 x + 5
```

Найдем ее градиент, приравняем его нулевому вектору и найдем корни компонент градиента:

```
grad = ∇{x,y} f[x, y]
{-2+2x,4+2y}
sol = Solve[grad == {0,0},{x,y}]
{{x → 1,y → -2}}
```

Вычислим в найденной стационарной точке $(1;-2)$ матрицу вторых производных и получим ее определитель:

```
∇{x,y} grad /. sol;
%[[1]] // MatrixForm
Det[%%[[1]]]
```

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

4

Так как и определитель матрицы, и ее левый верхний элемент положительны, то в найденной точке функция имеет минимум. Вы заметили, что матрица вторых производных есть результат взятия градиента от градиента? Все дело в том, что оператор градиента можно применять не только к одной функции, но и к их списку, в результате чего и получается названная матрица.

Для вычисления производной по направлению введем собственный оператор:

```
derDir[u_,a_] := (grad = Grad[u,{x,y,z}]; Sum[grad[[i]] a[[i]]/Norm[a],
    {i,Length[a]}]);
```

где `u` — скалярное поле, `a` — вектор, задающий направление. Вычислим производную скалярного поля $u = x^2y + 2y^2z$ по направлению вектора $\mathbf{a} = (2; 1; -1)$:

```
derDir[x^2 y + 2 y^2 z,{2,1,-1}] // Factor
```

$$\frac{x^2 + 4xy - 2y^2 + 4yz}{\sqrt{6}}$$

Найдем значение полученной производной в точке $(-1; 2; 3)$:

```
% /. {x → -1, y → 2, z → 3}
```

$$3\sqrt{\frac{3}{2}}$$

С помощью операторов `VectorPlot` и `VectorPlot3D` градиенты скалярного поля можно нарисовать, соответственно, на плоскости и в пространстве. Изобразим, например, градиенты плоского скалярного поля $u = \sin xy - \cos y$ (рис. 8):

```
VectorPlot[Evaluate[Grad[Sin[x y] - Cos[y],{x,y}]],{x,-1,1},{y,-1,1}]
```

Если использовать оператор `StreamPlot`, то вместо градиентов можно начертить линии, к которым градиенты являются касательными векторами. Это дает плавно меняющееся и часто более понятное изображение (рис. 9):

```
StreamPlot[Evaluate[Grad[Sin[x y] - Cos[y],{x,y}]],{x,-1,1},{y,-1,1}]
```

Теперь изобразим трехмерное скалярное поле $u = \sin xyz$ (рис. 10):

```
VectorPlot3D[Evaluate[Grad[Sin[x y z],{x,y,z}]],{x,-1,1},{y,-1,1},{z,-1,1},
    VectorPoints → 8,VectorScale → Medium]
```

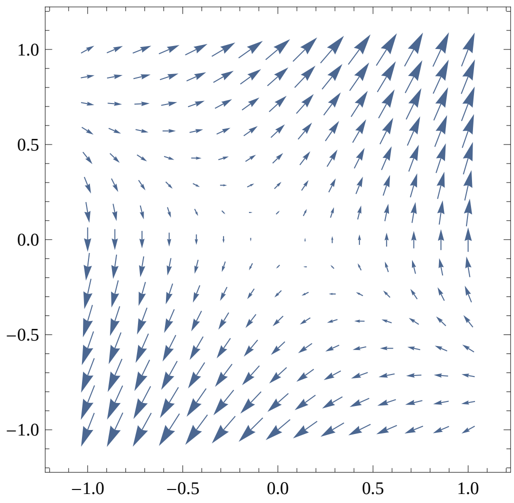


Рис. 8.

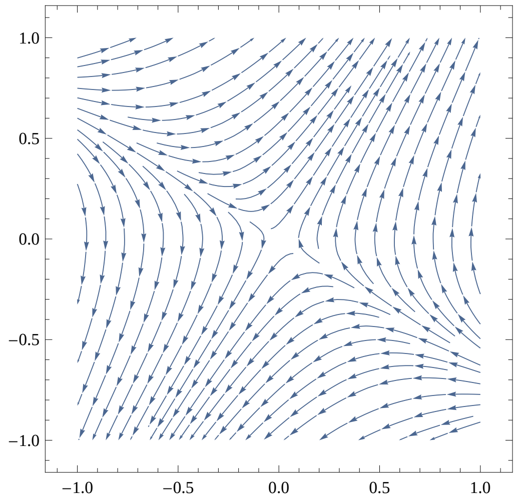


Рис. 9.

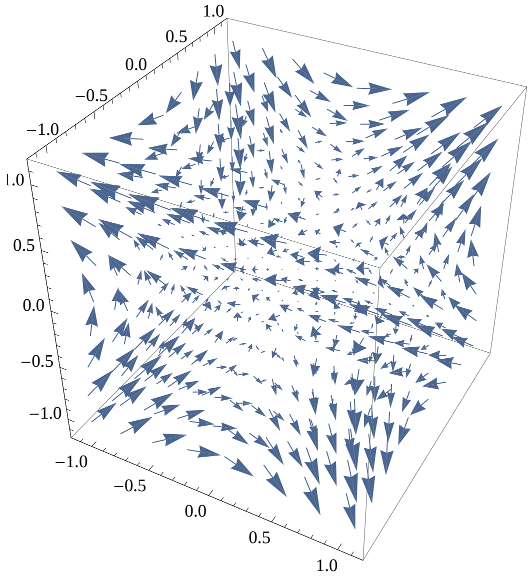


Рис. 10.

Опция `VectorPoints` определяет плотность векторов в единице объема, а `VectorScale` — относительный размер стрелки, изображающей градиент.

С помощью оператора `Grad` нетрудно решить пример 4, рассмотренный на лекции:

```
Grad[x^2 - 2 y^2 + z^2,{x,y,z}] . Grad[x y z,{x,y,z}]
0
```

Литература

[1] Письменный Д.Т. *Конспект лекций по высшей математике.* — М.: Рольф, 2000. Ч. 2. — с. 163–169.