Абсолютная и условная сходимости

Волченко Ю.М.

Содержание лекции

Знакочередующийся ряд. Признак сходимости Лейбница. Знакопеременный ряд. Абсолютная и условная сходимости. Общий комплексный ряд. Теорема об абсолютной сходимости. Свойства абсолютно и условно сходящихся рядов.

11 ноября 2015 г.

1 Знакочередующийся ряд

Таким рядом называется ряд

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots, \tag{1}$$

$u_i \in \mathbb{R}$, и ряд, получающийся из него формальным умножением на -1.

Теорема 1 (Признак сходимости Лейбница). *Если члены ряда* (1) *таковы, что* $u_1 > u_2 > u_3 > u_4 > \dots$ *(убывают по модулю) и* $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$, *то знакочередующийся ряд* (1) *сходится.*

Доказательство. Рассмотрим частичную сумму ряда (1):

$$S_{2m} = \underbrace{(u_1 - u_2)}_{>0} + \underbrace{(u_3 - u_4)}_{>0} + \dots + \underbrace{(u_{2m-1} - u_{2m})}_{>0} > 0.$$

Как видим, с увеличением m она возрастает. Расставим скобки по-другому:

$$S_{2m} = u_1 - \underbrace{(u_2 - u_3)}_{>0} - \underbrace{(u_4 - u_5)}_{>0} - \dots - \underbrace{(u_{2m-2} - u_{2m-1})}_{>0} - \underbrace{u_{2m}}_{>0} < u_1.$$

Значит, S_{2m} с увеличением m не только возрастает, но и ограничена числом u_1, следовательно, имеет предел: $\lim_{m\to\infty} S_{2m} = S$. Но $S_{2m+1} = S_{2m} + u_{2m+1}$ имеет тот же предел:

$$\lim_{m\to\infty} S_{2m+1} = \lim_{m\to\infty} S_{2m} + \lim_{m\to\infty} u_{2m+1} = S + 0 = S.$$

Поэтому и вообще
$$\lim_{m\to\infty} S_n = S.$$

Замечание 1. *Оценим ошибку, которая возникает при замене суммы знакочередующегося ряда его n-й частичной суммой. При такой замене отбрасывается знакочередующийся ряд $u_{n+1} - u_{n+2} + \ldots$, сумма которого не превосходит u_n (см. доказательство теоремы). Таким образом, рассматриваемая ошибка не превосходит модуля первого отбрасываемого члена ряда.*

Пример 1. *Исследовать на сходимость ряд:*
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}.$$

Решение. Члены ряда убывают по модулю: $1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \ldots$, и предел общего члена ряда равен нулю: $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, значит, данный ряд сходится.

2 Знакопеременный ряд

Теперь перейдем к вопросу о сходимости рядов, более общих, чем знакочередующиеся. Среди рядов с действительными членами выделяют так называемые знакопеременные ряды. От знакочередующихся они отличаются тем, что минусы и плюсы в этих рядах расположены нерегулярно, то есть не обязательно после плюса идет минус или наоборот. Понятно, что отрицательных и положительных членов ряда должно быть бесчисленное множество. Действительно, если ряд имеет, например, лишь конечное число положительных членов, то отбрасывая эти члены (что не влияет на сходимость ряда), получаем ряд только с отрицательными членами. Ясно, что он исследуется на сходимость так же, как и ряд с положительными членами: вынося за скобки минус, в скобках получим ряд с положительными членами.

Поэтому ***знакопеременным*** называется действительный ряд, имеющий бесконечное число как положительных, так и отрицательных членов. Знакочередующийся ряд является частным случаем знакопеременного ряда.

Сходимость знакопеременного ряда может вытекать из сходимости ряда, составленного из модулей членов знакопеременного ряда.

Теорема 2. *Если сходится ряд*
$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|, \tag{2}$$

$u_i \in \mathbb{R}$, то сходится и знакопеременный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n. \tag{3}$$

Доказательство. Пусть ряд (2) сходится и σ_n — его n-я частичная сумма. Обозначим через S_n частичную сумму ряда (3), через S_n^+ — сумму его положительных членов, а через S_n^- — сумму модулей его отрицательных членов, входящих в S_n. Так что $S_n = S_n^+ - S_n^-$. Так как $\sigma_n = S_n^+ + S_n^-$ и суммы S_n^+ и S_n^- состоят из положительных слагаемых, то эти суммы с увеличением n возрастают и ограничены сверху числом σ — суммой ряда (2):

$$S_n^+,\ S_n^- \leq \sigma_n \leq \sigma.$$

Следовательно, по известной теореме теории пределов они имеют конечные пределы: $\lim_{n\to\infty} S_n^+ = S^+$, $\lim_{n\to\infty} S_n^- = S^-$. Поэтому существует конечный предел

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} (S_n^+ - S_n^-) = S^+ - S^-,$$

и, таким образом, ряд (3) сходится. □

Если условия теоремы выполнены, то говорят, что знакопеременный ряд сходится ***абсолютно***. Может, однако, случиться, что знакопеременный ряд сходится, а ряд из модулей его членов — расходится. В этом случае говорят, что знакопеременный ряд сходится ***условно***.

Пример 2. *Исследовать на сходимость знакопеременный ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}.$$

Решение. Составим ряд из модулей членов заданного ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Как было показано на предыдущей лекции, этот ряд сходится. Значит, заданный ряд сходится абсолютно.

Пример 3. *Исследовать на сходимость знакопеременный ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}.$$

Решение. Снова составим ряд из модулей членов заданного ряда. Получим гармонический ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

который, как известно, расходится. В то же время заданный ряд сходится по признаку Лейбница. Значит, он сходится условно.

3 Общий комплексный ряд

Для ряда с комплексными членами

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n, \tag{4}$$

$z_n \in \mathbb{C}$, понятия абсолютной и условной сходимостей определяются совершенно так же, как для рядов с действительными членами. Справедлива и соответствующая

Теорема 3. *Если ряд* (4) *сходится абсолютно, то он сходится.*

Доказательство. Представим общий член ряда (4) в алгебраической форме: $z_n = a_n + jb_n$. По условию ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ сходится. Но тогда из неравенств $|a_n| \leq |z_n|$, $|b_n| \leq |z_n|$ и признака сравнения рядов следует, что сходятся ряды $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ и $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$. Это в силу теоремы 2 влечет сходимость рядов $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, а, значит, и ряда (4).

Пример 4. *Исследовать на сходимость ряды*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}+j}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{e^{j/n}}{n}.$$

Решение. Составим ряд из модулей членов первого ряда: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3+1}}$ и сравним его с рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ с помощью предельного признака сравнения:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^3+1}} : \frac{1}{n^{3/2}} \right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{3/2}}{\sqrt{n^3+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^3}}} = 1.$$

Так как получилось не равное нулю число, то ряд из модулей сходится, а, значит, первый из двух заданных рядов сходится абсолютно.

Для второго заданного ряда составленный из модулей его членов ряд является гармоническим рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ и, следовательно, расходится. Преобразуем исходный ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n e^{j/n}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos\frac{1}{n}}{n} + j \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin\frac{1}{n}}{n}.$$

Ряд с синусами сходится по признаку Лейбница, так как предел общего члена равен нулю, а $\sin\frac{1}{n}$, будучи положительным, убывает, начиная с достаточно большого n. Общий член ряда с косинусами тоже стремится к нулю. Найдем производную функции $y = \cos\frac{1}{x}/x$:

$$y' = \frac{-x\sin\frac{1}{x}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right) - \cos\frac{1}{x}}{x^2} = \frac{\sin\frac{1}{x} - x\cos\frac{1}{x}}{x^3} \sim -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4} = \frac{1-x^2}{x^4}$$

при $x \to \infty$, так как $\sin\frac{1}{x} \sim \frac{1}{x}$, $\cos\frac{1}{x} \sim 1$. Следовательно, при достаточно больших x производная становится отрицательной, поэтому, начиная с некоторого n, модуль общего члена ряда с косинусами тоже убывает.

Таким образом, ряды с синусами и косинусами сходятся, из чего делаем вывод о сходимости заданного ряда. Поскольку ряд из модулей его членов расходится, то сходимость его условная.

4 Свойства абсолютной и условной сходимостей

Поведение абсолютно и условно сходящихся рядов различно. Абсолютно сходящийся ряд продолжает сходиться при любой перестановке его членов (при этом, конечно, существенными перестановками являются только перестановки бесконечного числа его членов, так как в противном случае можно отбросить конечную часть ряда, содержащую переставленные члены, чтобы убедиться в том, что сходимость ряда не будет нарушена — ведь отбрасывание конечного числа членов ряда не влияет на его сходимость).

Вначале убедимся в сказанном на примере ряда с положительными членами и знакопеременного ряда.

Теорема 4. *Пусть ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \tag{5}$$

имеет положительные члены и сходится. Тогда ряд, полученный из него любой перестановкой членов, тоже сходится, и его сумма равна сумме ряда (5).

Доказательство. Обозначим сумму ряда (5) через S, его частичную сумму через S_n, переставим члены ряда произвольным образом, и полученный ряд обозначим

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n. \tag{6}$$

Рассмотрим частичную сумму σ_n ряда (6). Так как $v_1 = u_{m_1}$, $v_2 = u_{m_2}$,..., $v_n = u_{m_n}$, то, взяв $k > \max(m_1, m_2,\ldots,m_n)$, получим, что $\sigma_n \le S_k \le S$. Поскольку сумма σ_n возрастает с номером n и ограничена числом S, то ряд (6) сходится, причем, его сумма σ не превосходит S:

$$\sigma \leq S.$$

Но ряд (5) тоже получается перестановкой членов ряда (6), поэтому

$$S \leq \sigma.$$

Сравнивая последние два неравенства, приходим к выводу, что $S = \sigma$.

Теорема 5. *Если знакопеременный ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \tag{7}$$

абсолютно сходится, то при любой перестановке его членов сходимость не нарушается и сумма остается прежней.

Доказательство. Пусть ряд (7) абсолютно сходится. Обозначим

$$u_n^+ = \begin{cases} u_n, & u_n \geq 0, \\ 0, & u_n < 0; \end{cases} \qquad u_n^- = \begin{cases} -u_n, & u_n \leq 0, \\ 0, & u_n > 0. \end{cases} \tag{8}$$

Очевидно, что $u_n^+, u_n^- \geq 0$ и $u_n = u_n^+ - u_n^-$. Наряду с рядом (7) рассмотрим ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n^+ \qquad \text{и} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} u_n^- \tag{9}$$

(с неотрицательными членами). Эти ряды сходятся по признаку сравнения рядов, так как $u_n^+ \leq |u_n|$, $u_n^- \leq |u_n|$. Пусть ряд, полученный после перестановки членов ряда (7) имеет вид $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$. Для его членов введем, как выше, числа v_n^+, v_n^-. Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty}(u_n^+ - u_n^-) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} u_n^- = \sum_{n=1}^{\infty} v_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} v_n^- =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty}(v_n^+ - v_n^-) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n.$$

Второе и четвертое равенства следуют из того, что сходящиеся ряды можно вычитать, а третье — из теоремы 4. □

Теперь докажем, что аналогичная теорема справедлива и для произвольных рядов с комплексными членами.

Теорема 6. *Если ряд* (4) *сходится абсолютно и его сумма равна S, то при любой перестановке его членов вновь полученный ряд будет сходиться к той же сумме S.*

Доказательство. Ряд с переставленными членами вновь обозначим $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ и пусть $z_n = a_n + jb_n$, $v_n = c_n + jd_n$. Так как $|a_n| \le |z_n|$, $|b_n| \le |z_n|$, то ряды (с действительными членами) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ абсолютно сходятся, а тогда по теореме 5 от перестановки их членов сходимость этих рядов не нарушается, а сумма сохраняется. Поэтому

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + jb_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + j\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \\ = \sum_{n=1}^{\infty} c_n + j\sum_{n=1}^{\infty} d_n = \sum_{n=1}^{\infty} (c_n + jd_n) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n.$$

□

Произведением рядов $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$, $u_n \in \mathbb{C}$, и $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$, $v_n \in \mathbb{C}$, называется ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n,\ c_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}.$$

Теорема 7. *Если хотя бы один из двух сходящихся рядов $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$ сходится абсолютно, то произведение этих рядов сходится к произведению их сумм.*

Доказательство. Пусть ряд $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ абсолютно сходится, а ряд $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$ сходится. Обозначим сумму первого ряда и его частичную сумму соответственно S и S_n, а второго — σ и σ_n. Частичную сумму произведения рядов обозначим:

$$\delta_n = \sum_{m=0}^{n} c_m = \sum_{m=0}^{n}\sum_{k=0}^{m} u_k v_{m-k}. \tag{10}$$

Область изменения переменных суммирования определяется двумя двойными неравенствами $0 \le m \le n$, $0 \le k \le m$, которые можно представить в виде одного неравенства $0 \le k \le m \le n$. Последнее неравенство можно в свою очередь представить в виде двух двойных неравенств $0 \le k \le n$, $k \le m \le n$. Это позволяет переписать и преобразовать равенство (10):

$$\delta_n = \sum_{k=0}^{n}\sum_{m=k}^{n} u_k v_{m-k} = \sum_{k=0}^{n} u_k \sum_{m=k}^{n} v_{m-k} = \sum_{k=0}^{n} u_k \sum_{r=0}^{n-k} v_r =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} u_k \sigma_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} u_k \left(\sigma + \sigma_{n-k} - \sigma\right) = S_n \sigma + \sum_{k=0}^{n} u_k \left(\sigma_{n-k} - \sigma\right).$$

Обозначим $\gamma_n = \sum_{k=0}^{n} u_k \left(\sigma_{n-k} - \sigma\right)$, тогда

$$\delta_n = S_n \sigma + \gamma_n, \tag{11}$$

и докажем, что $\lim_{n\to\infty} \gamma_n = 0$.

Из сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$ следует, что последовательность его частичных сумм ограничена и поэтому

$$|\sigma_n - \sigma| \le M, \; n = 1, 2, \ldots;$$

кроме того, для любого заданного $\varepsilon > 0$ при достаточно больших n

$$|\sigma_n - \sigma| < \varepsilon.$$

В силу же абсолютной сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ его сумма L конечна и для достаточно больших $n \ge N$ выполняется

$$\sum_{k=N}^{n} |u_k| = \left| \sum_{k=0}^{n} |u_k| - \sum_{k=0}^{N} |u_k| \right| \le \left| \sum_{k=0}^{\infty} |u_k| - \sum_{k=0}^{N} |u_k| \right| < \varepsilon.$$

Тогда

$$|\gamma_n| \le \sum_{k=0}^{n} |u_k| \left|\sigma_{n-k} - \sigma\right| = \varepsilon \sum_{k=0}^{n-N} |u_k| + M \sum_{k=n-N+1}^{n} |u_k|.$$

Если взять n настолько большим, чтобы было $n \ge 2N - 1$, то есть, чтобы $n - N + 1 \ge N$, то окажется справедливым неравенство

$$|\gamma_n| \le \varepsilon L + M\varepsilon = \varepsilon \left(L + M\right).$$

Из этого и следует, что $\lim_{n\to\infty} \gamma_n = 0$. Переходя в (11) к пределу, получим требуемое:

$$\lim_{n\to\infty} \delta_n = \lim_{n\to\infty} \left(S_n \sigma + \gamma_n\right) = S\sigma.$$

□

Если оба рассмотренных ряда сходятся абсолютно, то справедливо более сильное утверждение.

Теорема 8. *Если ряды $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$ абсолютно сходятся, то ряд, составленный из всевозможных попарных произведений $u_m v_k$ членов этих рядов, расположенных в произвольном порядке, также абсолютно сходится, причем сумма такого ряда равна произведению сумм исходных рядов.*

Доказательство. Обозначим суммы рядов $\sum_{n=0}^{\infty}|u_n|$ и $\sum_{n=0}^{\infty}|v_n|$ как $\overline{S}$ и $\overline{\sigma}$, соответственно. Оба эти ряда удовлетворяют условиям предыдущей теоремы и поэтому

$$\lim_{n\to\infty}\overline{\delta}_n=\sum_{m=0}^{n}\sum_{k=0}^{m}|u_k|\,|v_{m-k}|=\overline{S}\overline{\sigma}. \tag{12}$$

Пусть ряды $\sum_{n=0}^{\infty}u_n$ и $\sum_{n=0}^{\infty}v_n$ имеют суммы S и σ, соответственно. Так как они тоже удовлетворяют условиям предыдущей теоремы, то

$$\lim_{n\to\infty}\delta_n=\sum_{m=0}^{n}\sum_{k=0}^{m}u_kv_{m-k}=S\sigma.$$

Отсюда и из (12) следует, что ряд $\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{m}u_kv_{m-k}$ сходится абсолютно к сумме $S\sigma$. Абсолютная сходимость этого ряда позволяет переставлять его члены произвольным образом, образуя всевозможные произведения u_kv_m, расположенные в произвольном порядке, не нарушая абсолютной сходимости ряда и не изменяя его суммы. □

В противоположность абсолютной условная сходимость не обеспечивает «стабильности» поведения ряда. Всегда можно так переставить члены условно сходящегося ряда с действительными членами, что он станет сходиться к любому наперед заданному числу. Более того, можно так переставить его члены, что он станет расходиться[1)]. Этот факт означает, что условная сходимость в случае рядов с действительными членами осуществляется лишь благодаря *взаимному погашению положительных и отрицательных членов*, и потому существенно зависит от порядка, в котором они следуют один за другим, между тем, как абсолютная сходимость основана на *скорости убывания этих членов* — и от порядка их не зависит.

Пример 5. *Показать, что члены ряда из примера 1 можно так переставить, что его сумма уменьшится вдвое.*

Решение. В упомянутом примере было показано, что ряд сходится условно. Пусть его сумма равна S. Переставим его члены так, чтобы после одного положительного члена шло два отрицательных. Получим ряд

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots=\underbrace{1-\frac{1}{2}}-\frac{1}{4}+\underbrace{\frac{1}{3}-\frac{1}{6}}-\frac{1}{8}+\underbrace{\frac{1}{5}-\frac{1}{10}}-\frac{1}{12}+\cdots=$$
$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{10}-\frac{1}{12}+\cdots=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots\right)=\frac{1}{2}S.$$

□

Приложение

[1)] Рассмотрим особенности условной сходимости рядов.

Лемма П1. *Пусть в произвольном числовом ряде с действительными членами*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \tag{П1}$$

произвольным образом расставлены скобки (без изменения порядка расположения членов):

$$\sum_{m=1}^{\infty} (u_{n_{m-1}+1} + \ldots + u_{n_m}), \tag{П2}$$

$u_{n_0+1} = u_1$*, где* $\{n_m\}$ *— произвольная возрастающая последовательность натуральных чисел. Если слагаемые в каждой паре скобок имеют одинаковые знаки и ряд* (П2) *сходится, то после опускания скобок получившийся ряд* (П1) *будет сходиться к сумме ряда* (П2).

Доказательство. Обозначим σ и σ_n соответственно сумму и частичную сумму ряда (П2), а через S_n — частичную сумму ряда (П1). При изменении n от n_{m-1} до n_m частичная сумма S_n будет изменяться монотонно (внутри скобок все слагаемые имеют один и тот же знак), следовательно, будет содержаться между $S_{n_{m-1}} = \sigma_{m-1}$ и $S_{n_m} = \sigma_m$. При достаточно большом m эти последние суммы произвольно мало разнятся от суммы σ, следовательно, то же справедливо и относительно суммы S_n при достаточно большом n, так что $S_n \to \sigma$.

Теорема П1 (Римана). *Если действительный ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \tag{П3}$$

сходится условно, то его члены можно переставить так, что он станет сходиться к любому наперед заданному числу A (конечному или равному $\pm\infty$).

Доказательство. 1) Предположим, что A — конечное число. Тогда прежде всего отметим, что равенства, рассмотренные в теореме 2,

$$S_n = S_n^+ - S_n^-, \; \sigma_n = S_n^+ + S_n^-, \tag{П4}$$

позволяют утверждать, что ряды $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^+$ и $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^-$, см. (8), расходятся. Действительно, если предположить, что один из этих рядов сходится, то тогда в силу сходимости ряда (П3) и первого из равенств (П4) будет сходиться и второй ряд. А тогда в силу второго из равенств (П4) будет сходиться ряд (2), что противоречит условной сходимости ряда (П3). Так как отбрасывание конечного числа членов не влияет на сходимость ряда, то ряды $\sum_{n=m}^{\infty} u_n^+$ и $\sum_{n=m}^{\infty} u_n^-$, где m — любое число, тоже будут расходящимися. Поэтому, в каждом из рядов $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^+$ и $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^-$, начиная с любого места, можно будет набрать столько членов, что их сумма превзойдет любое число.

Пользуясь этим замечанием, произведем перестановку членов ряда (П3). Сначала возьмем столько положительных членов ряда (П3) (в том порядке, в котором они расположены в этом ряде), чтобы их сумма превзошла число A:

$$u_1^+ + u_2^+ + \ldots + u_{k_1}^+ > A.$$

Затем добавим отрицательные члены (в том порядке, в котором они расположены в ряде (П3), взяв их столько, чтобы общая сумма стала меньше A:

$$u_1^+ + u_2^+ + \ldots + u_{k_1}^+ - u_1^- - u_2^- - \ldots - u_{m_1}^- < A.$$

Далее снова добавим положительные члены (из числа оставшихся) так, чтобы было

$$u_1^+ + u_2^+ + \ldots + u_{k_1}^+ - u_1^- - u_2^- - \ldots - u_{m_1}^- + u_{k_1+1}^+ + \ldots + u_{k_2}^+ > A.$$

И снова допишем отрицательные члены (из числа оставшихся), чтобы было

$$u_1^+ + u_2^+ + \ldots + u_{k_1}^+ - u_1^- - u_2 - - \ldots - u_{m_1}^- + u_{k_1+1}^+ + \ldots + u_{k_2}^+ - u_{m_1+1}^- - \ldots - u_{m_2}^- < A$$

и т.д. Продолжая этот процесс до бесконечности, мы видим, что каждый член ряда (П3), и притом со своим знаком, встретится на своем месте. Если каждый раз набирать членов u_n^+ и u_n^- не больше, чем нужно для осуществления требуемого неравенства, то отклонение от числа A в ту или другую сторону не превзойдет по модулю последнего добавленного члена. (Например, если $u_1^+ + u_2^+ + u_3^+ < A$, а $u_1^+ + u_2^+ + u_3^+ + u_4^+ > A$, то переписывая первое неравенство как $u_1^+ + u_2^+ + u_3^+ - A < 0$ и прибавляя к обеим его частям u_4^+, получим, что $u_1^+ + u_2^+ + u_3^+ + u_4^+ - A < u_4^+$.) Но, так как $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$, то $\lim_{n\to\infty} u_n^+ = 0$ и $\lim_{n\to\infty} u_n^- = 0$. Следовательно, ряд

$$(u_1^+ + u_2^+ + \ldots + u_{k_1}^+) - (u_1^- + u_2^- + \ldots + u_{m_1}^-) +$$
$$+ (u_{k_1+1}^+ + \ldots + u_{k_2}^+) - (u_{m_1+1}^- + \ldots + u_{m_2}^-) + \ldots$$

сходится к A. По лемме это останется верным и после раскрытия скобок.

2) Если $A = \infty$, то, взяв последовательность возрастающих до бесконечности чисел A_1, $A_2, \ldots$,, можно было бы набор положительных чисел подчинить требованию, чтобы суммы последовательно становились больше A_1, $A_2, \ldots$,, а из отрицательных членов помещать лишь по одному после каждой группы положительных. Таким образом, очевидно, составился бы ряд, имеющий сумму ∞. Аналогично можно получить и ряд с суммой $-\infty$. □

Для условно сходящегося ряда с комплексными членами в общем случае нельзя утверждать, что его члены всегда можно переставить так, чтобы новый ряд сходился к любому наперед заданному числу. Во-первых, действительную и мнимую части ряда нельзя переставлять независимо друг от друга (ведь переставляются члены комплексного ряда целиком), поэтому даже если обе эти части сходятся условно, может оказаться, что только выполняя перестановки в этих частях независимо друг от друга, удастся добиться сходимости комплексного ряда к требуемому комплексному числу. Во-вторых, возможен случай, когда одна часть ряда, например, действительная, сходится условно, а вторая, скажем, мнимая, сходится абсолютно. Тогда никакие перестановки членов комплексного ряда не заставят мнимую часть сходиться к числу, отличному от ее суммы.

То, что такие ряды существуют, показывает пример ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[(-1)^n \frac{1}{n} + j\frac{1}{n^2} \right],$$

который является условно сходящимся рядом, так как ряд из модулей

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^4}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^2+1}}{n^2}$$

расходится по признаку сравнения (с гармоническим рядом):

$$\frac{1}{n} = \frac{\sqrt{n^2}}{n^2} < \frac{\sqrt{n^2+1}}{n^2},$$

а действительная и мнимая части сходятся, причем первая условно, а вторая абсолютно.

Литература

[1] Бугров Я.С., Никольский С.М. *Дифференциальное и интегральное исчисление.* — М.: Наука, 1984, — с. 376-379, 391-393.

[2] Письменный Д.Т. *Конспект лекций по высшей математике.* — М.: Рольф, 2000. Ч. 2. — с. 121—124, 209, 210.