

Ряды Фурье

Волченко Ю.М.

Содержание лекции

Гармоники и их характеристики, конечные суммы гармоник. Гармонический анализ. Скалярное произведение функций, их ортогональность. Норма функции. Ортогональные системы функций. Тригонометрическая система функций. Общий ряд Фурье и его коэффициенты. Тригонометрический ряд Фурье. Тригонометрический ряд Фурье для четных и нечетных функций.

Анимация сходимости ряда Фурье.

Анимация работает только в программе Acrobat Reader!

Гармонический анализ в системе *Mathematica*.

24 января 2016 г.

Приобретенные вами знания в теории рядов позволяют перейти к наиболее важной для вашей специальности разновидности функциональных рядов, рядам Фурье. Почему они так важны? Потому что позволяют провести анализ различных периодических (и не только) процессов. А периодическими процессами буквально напичкана как вся Вселенная, так и жизнь на Земле. Смена фаз Луны, приливы и отливы, чередование дня и ночи, смена времен года, обороты Солнечной системы вокруг ядра Галактики (с периодом 180–200 млн. лет) — все это примеры периодических процессов.

Очевидно, космические явления не могут не оказывать влияния на земную жизнь, в силу чего, например, земледелие — почти всегда ряд периодических, сезонных процессов. А к этому можно добавить суточные ритмы сна и бодрствования, сердечные ритмы, чередование активности и спячки у некоторых млекопитающих и т. д., и т. п.

Создавая искусственную среду, человек внес в нее новые виды периодических процессов. Самыми известными являются колебания всевозможных маятников (например, в часах); работа двигателей, повторяющих один и тот же

цикл (двухтактный, четырехтактный или иной); световые и электромагнитные излучения, в том числе радиоволны.

Чем же отличаются периодические процессы друг от друга? Ну, раз периодические, значит, периодом, или частотой колебаний. Но дело в том, что помимо колебаний на основной частоте, обычно из периодического процесса можно выделить колебания и других частот (как в музыке — тон и обертоны), которые имеют уже меньшую амплитуду. Ряд Фурье как раз и дает информацию об амплитудах и частотах периодического процесса, представляя периодическую функцию в виде суммы колебаний различных частот. Для электронной инженерии эта информация имеет первостепенное значение, позволяя оценить характеристики сигналов при их передаче, прохождении через различные устройства, зашумлении посторонними источниками и т. п.

1 Конечные суммы гармоник

Прежде чем переходить к рядам Фурье, познакомимся с похожими на них конечными суммами синусоид и косинусоид.

Простейшей такой суммой является *гармоника*, функция переменной t вида

$$a \cos \omega t + b \sin \omega t, \quad (1)$$

которую, как мы уже не раз делали, можно преобразовать, оставив только косинус:

$$\begin{aligned} a \cos \omega t + b \sin \omega t &= \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos \omega t + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin \omega t \right) = \\ &= A (\cos \omega t \cos \varphi - \sin \omega t \sin \varphi) = A \cos (\omega t + \varphi), \end{aligned} \quad (2)$$

где $A = \sqrt{a^2 + b^2} > 0$ — *амплитуда*, ω — *частота*, φ — *начальная фаза*. Последняя определяется условиями $\cos \varphi = a/\sqrt{a^2 + b^2}$, $\sin \varphi = -b/\sqrt{a^2 + b^2}$, $-\pi < \varphi \leq \pi$.

На одной из лекций по дифференциальным уравнениям[†] было отмечено, что сложение гармоник дает периодическую функцию только в случае соизмеримости их частот. Иначе возникнут непериодические колебания, а, точнее, почти периодические. Поскольку наша цель — изучение периодических сигналов, то мы ограничимся суммами гармоник с соизмеримыми частотами. Их сумму будем записывать в виде функции $f(t)$

$$f(t) = A_0 \cos(0t + \varphi_0) + \sum_{n=1}^N A_n \cos(\omega_n t + \varphi_n), \quad (3)$$

[†]Лекция «Неоднородные ЛДУ с постоянными коэффициентами».

которую также называют *сигналом*. Появление постоянной $A_0 \cos \varphi_0 > 0$ не должно вызывать удивления, так как колебания не обязательно должны совершаться вокруг нуля; в общем случае они могут концентрироваться вблизи любого числа, например, $A_0 \cos \varphi_0$.

Процесс разложения сигнала в сумму простых гармоник называется **гармоническим анализом**.

Все величины, входящие в формулу (3), объединяют в группы и дают им следующие названия: $\{\omega_n\}$ – **частотный спектр**, $\{A_n\}$ – **амплитудный спектр**, $\{-\varphi_n\}$ – **фазовый спектр**. Эти спектры изображают так же, как графики последовательностей[†] (см. рис. 1 и 3). Отметим, что, если по каким-то причинам $A_n = 0$, то ω_n в частотный спектр не входит. Аналогичное правило действует и для фаз φ_n .

Учитывая два представления гармоник, (1) и (2), формулу (3) можно переписать следующим образом:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n \cos \omega_n t + b_n \sin \omega_n t). \quad (4)$$

Как станет ясно из дальнейшего, $a_0/2$ введено вместо a_0 исключительно для единообразия некоторых вычислений.

Пример 1. По амплитудному и фазовому спектрам на рис. 1 найти сигнал $f(t)$.

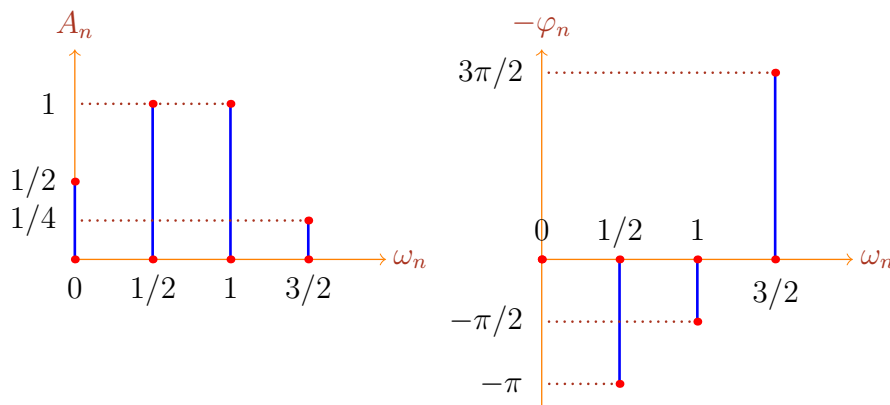


Рис. 1.

Решение. Снимая числовые данные с рисунков, используя формулу (3) и выполняя простые преобразования, получим

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2} \cos 0 + \cos \left(\frac{t}{2} + \pi \right) + \cos \left(t + \frac{\pi}{2} \right) + \frac{1}{4} \cos \left(\frac{3t}{2} - \frac{3\pi}{2} \right) = \\ &= \frac{1}{2} - \cos \frac{t}{2} - \sin t - \frac{1}{4} \sin \frac{3t}{2}. \end{aligned}$$

[†]Лекция «Функция I».

Два периода функции показаны на рис. 2.

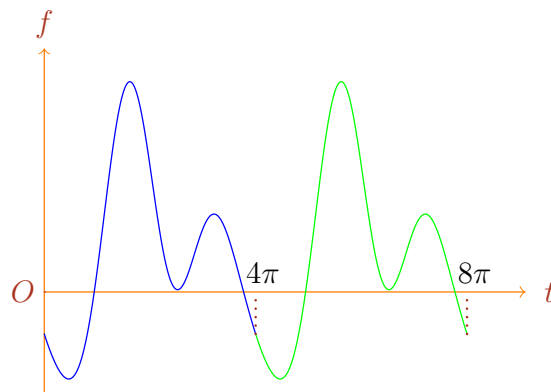


Рис. 2.

Пример 2. Найти амплитудный и фазовый спектры функции

$$f(t) = \cos t + \sin^2 t.$$

Решение. Представим заданную функцию в виде (3), для чего преобразуем ее:

$$f(t) = \cos t + \frac{1 - \cos 2t}{2} = \frac{1}{2} + \cos t + \frac{1}{2} \cos(2t + \pi).$$

Таким образом, амплитудный спектр $\{A_n\} = \{1/2; 1; 1/2\}$, частотный спектр $\{\omega_n\} = \{0; 1; 2\}$, фазовый спектр $\{\varphi_n\} = \{0, 0, -\pi\}$. Графическое изображение спектров приведено на рис. 3, а сама функция $f(t)$ — на рис. 4.

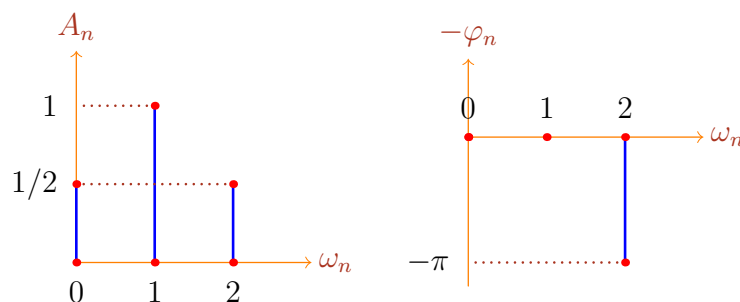


Рис. 3.

2 Понятие ряда Фурье

Теперь, когда мы знаем, как в виде суммы гармоник представлять суммы синусов и косинусов и выделять из этих сумм различные спектры, поставим следующую задачу: произвольную периодическую функцию записать в виде суммы

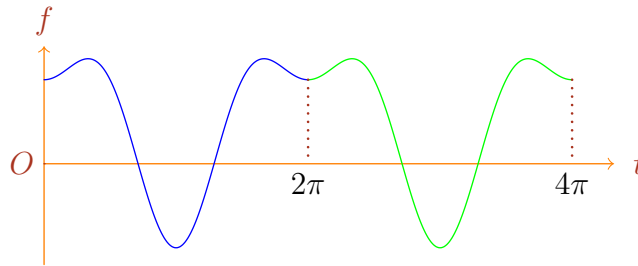


Рис. 4.

синусов и косинусов (4). Ясно, что конечной суммой здесь не обойтись, потому что даже такая простая функция как $f(t) = t$ никакого отношения к конечным суммам синусов-косинусов не имеет. Так что придется в упомянутой формуле заменить N на символ бесконечности.

Как же приступить к решению поставленной задачи? Если очень напрячь воображение, то может померещиться, что формула (4) представляет собой разложение вектора $f(t)$ по базисным векторам

$$1, \cos \omega_1 t, \sin \omega_1 t, \cos \omega_2 t, \sin \omega_2 t, \dots,$$

а числа a_n, b_n являются коэффициентами разложения. А почему нет? Ведь в курсе линейной алгебры рассматривалось линейное пространство всех многочленов вида $P_k(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \dots + \alpha_k t^k$, которое базисом имело бесконечную последовательность многочленов $\{1, t, t^2, \dots, t^k, \dots\}$, а числа $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_k$ считались коэффициентами разложения многочлена (вектора) по базису. После введения скалярного произведения это пространство становилось и евклидовым.

Такой путь разложения некоторой функции по системе других функций и был выбран в математике. Надо было только чтобы система функций обладала чертами базиса. Например, в каком-то смысле функции базиса должны быть «ортогональны», а их «длины» должны отличаться от нуля. Ну, раз речь зашла об ортогональности, то без скалярного произведения не обойтись.

Продуктивным оказывается следующее определение: **скалярным произведением** функций $f(t)$ и $g(t)$ на отрезке $[a, b]$ называется интеграл

$$(f, g) \triangleq \int_a^b f(t) g(t) dt.$$

Две функции $f(t)$ и $g(t)$ на отрезке $[a, b]$ называются **ортогональными**, если $(f, g) = 0$.

Как мы помним, скалярное произведение вектора на себя определяло квадрат его длины, или модуля. Но мы здесь векторами считаем функции, для которых модуль имеет другой смысл. Поэтому употребляется понятие **нормы**

функции:

$$\|f\| \triangleq \sqrt{(f, f)} = \left(\int_a^b f^2(t) dt \right)^{1/2}.$$

Нетрудно проверить, что операция (f, g) удовлетворяет почти всем аксиомам скалярного произведения:

- 1) $(f, f) \geq 0$,
- 2) $(f, g) = (g, f)$,
- 3) $(f + g, h) = (f, h) + (g, h)$,
- 4) $(\alpha f, g) = (f, \alpha g) = \alpha (f, g)$.

Но свойство $(f, f) = 0 \Leftrightarrow f \equiv 0$ не выполняется. То есть справа налево оно выполняется: если $f \equiv 0$, то $(f, f) = 0$; а вот слева направо — нет. Достаточно привести пример функции, которая равна нулю всюду, кроме точки $t = 0$.

Это препятствие можно преодолеть, ограничившись кусочно непрерывными функциями. Функция $f(t)$ называется **кусочно непрерывной** на отрезке $[a, b]$, если этот отрезок можно разбить на конечное число отрезков $[a, c_1]$, $[c_1, c_2]$, \dots , $[c_{m-1}, c_m]$, \dots , $[c_m, b]$, на каждом из которых $f(t)$ непрерывна, а предельные значения $f(a+0)$, $f(b-0)$, $f(c_i \pm 0)$, $i = \overline{1, m}$, существуют и конечны. Обозначим $F_{[a,b]}$ множество кусочно непрерывных функций $f(t)$, которые в каждой точке разрыва $t = c$ удовлетворяют условию

$$f(c) = \frac{f(c-0) + f(c+0)}{2}. \quad (5)$$

Лемма 1. Если $f \in F_{[a,b]}$, то $(f, f) = 0 \implies f \equiv 0$.

Доказательство приведено в Приложении¹).

Поскольку линейная комбинация функций из $F_{[a,b]}$ принадлежит $F_{[a,b]}$ ²), то $F_{[a,b]}$ является линейным пространством, а в силу доказанной леммы — и евклидовым.

Другой способ справиться с невыполнением $(f, f) = 0 \implies f \equiv 0$ заключается в отождествлении всех функций, для которых $(f, f) = 0$. Все такие функции отождествляются с $f \equiv 0$, которая становится их полномочным представителем. Как следствие, отождествляются и все функции f и g , для которых $\|f - g\| = 0$.

Введем в рассмотрение бесконечную последовательность действительных функций

$$\varphi_0(t), \varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t), \dots, \quad (6)$$

от которой потребуем выполнения свойств базиса. Достаточно, чтобы система функций (6) была **ортogonalной** на отрезке $[a, b]$, то есть, чтобы при любых

$n \neq k$ выполнялись равенства

$$(\varphi_n, \varphi_k) = \int_a^b \varphi_n(t) \varphi_k(t) dt = 0, \quad (7)$$

$$\|\varphi_n\|^2 = \int_a^b \varphi_n^2(t) dt \neq 0. \quad (8)$$

Существуют ли такие системы функций? Положительным ответом на этот вопрос служит **тригонометрическая последовательность** функций

$$1, \cos \frac{\pi t}{l}, \sin \frac{\pi t}{l}, \cos \frac{2\pi t}{l}, \sin \frac{2\pi t}{l}, \dots, \cos \frac{k\pi t}{l}, \sin \frac{k\pi t}{l}, \dots \quad (9)$$

Лемма 2. Система функций (9) ортогональна на отрезке $[-l, l]$.

Доказательство. Проверим условие (7) при $n \neq k$:

$$\begin{aligned} \int_{-l}^l \cos \frac{k\pi t}{l} \cos \frac{n\pi t}{l} dt &= \frac{1}{2} \int_{-l}^l \left(\cos \frac{\pi(k+n)}{l} t + \cos \frac{\pi(k-n)}{l} t \right) dt = \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{l}{\pi(k+n)} \sin \frac{k+n}{l} \pi t + \frac{l}{\pi(k-n)} \sin \frac{k-n}{l} \pi t \right] \Big|_{-l}^l dt = 0. \end{aligned}$$

Далее можно убедиться, что $\int_{-l}^l \cos \frac{k\pi t}{l} \sin \frac{n\pi t}{l} dt = 0$, $\int_{-l}^l \sin \frac{k\pi t}{l} \sin \frac{n\pi t}{l} dt = 0$, $n \neq k$. Проверим условие (8) для косинуса:

$$\int_{-l}^l \cos^2 \frac{k\pi t}{l} dt = \frac{1}{2} \int_{-l}^l \left(1 + \cos \frac{2k\pi t}{l} \right) dt = \left(\frac{t}{2} + \frac{l}{4k\pi} \sin \frac{2k\pi t}{l} \right) \Big|_{-l}^l = l \neq 0.$$

Аналогично проверяется, что $\int_{-l}^l 1^2 dt = 2l \neq 0$, $\int_{-l}^l \sin^2 \frac{k\pi t}{l} dt = l \neq 0$. \square

Пусть функция $f(t)$ определена на отрезке $[a, b]$ и представима в виде сходящегося к ней функционального ряда, составленного из функций базиса (6):

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(t). \quad (10)$$

Не вдаваясь пока в вопрос о том, при каких условиях такое представление возможно, попробуем найти коэффициенты c_n — это даст нам возможность на практике записать какую-нибудь конкретную периодическую функцию в виде ряда из синусов и косинусов и оценить хотя бы графически и характер, и степень приближения.

Для этого умножим обе части равенства (10) на функцию $\varphi_k(t)$ и проинтегрируем полученный ряд почленно в пределах от a до b , предполагая, что это

законно, и используя условие (7):

$$\int_a^b \varphi_k(t) f(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b c_n \varphi_k(t) \varphi_n(t) dt = c_k \int_a^b \varphi_k^2(t) dt.$$

Таким образом, искомые коэффициенты в силу (8) выражаются формулой:

$$c_k = \frac{\int_a^b \varphi_k(t) f(t) dt}{\int_a^b \varphi_k^2(t) dt}. \quad (11)$$

Их называют **коэффициентами Фурье** функции $f(t)$, а ряд (10) с коэффициентами, вычисленными по формуле (11), — **рядом Фурье**.

3 Тригонометрический ряд Фурье

Запишем формулу (10) для тригонометрической системы (9) в виде

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi t}{l} + b_n \sin \frac{n\pi t}{l} \right), \quad (12)$$

который с точностью до верхнего индекса суммирования совпадает с формулой (4). При решении примера 2 в процессе проверки ортогональности было получено, что для системы (9) $\int_{-l}^l \varphi_0^2(t) dt = 2l$, $\int_{-l}^l \varphi_k^2(t) dt = l$, $k > 0$. В соответствии с этим и формулой (11) получим формулы для вычисления коэффициентов ряда (12):

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(t) dt,$$

или

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) dt.$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) \cos \frac{k\pi t}{l} dt, \\ b_k &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) \sin \frac{k\pi t}{l} dt. \end{aligned}$$

Теперь стало понятно, почему в формулах (4) и (12) свободный член был взят в виде $a_0/2$, а не в виде a_0 — исключительно для единообразия формул для коэффициентов Фурье!

Ряд (12) с так вычисленными коэффициентами называется **тригонометрическим рядом Фурье**.

Ряд (12) можно записать и по аналогии с суммой (3):

$$f(t) = A_0 \cos(0t + \varphi_0) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{n\pi}{l}t + \varphi_n\right), \quad (13)$$

где

$$A_0 = |a_0|/2, \quad A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \quad (14)$$

а фазы определяются условиями:

$$\varphi_0 = 0, \text{ если } a_0 > 0, \text{ и } \varphi_0 = \pi, \text{ если } a_0 < 0; \quad (15)$$

$$\cos \varphi_n = \frac{a_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}, \quad \sin \varphi_n = -\frac{b_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}, \quad -\pi < \varphi_n \leq \pi, \quad n = 1, 2, \dots \quad (16)$$

Вот теперь все готово для того, чтобы на практике познакомиться с приближением функции ее рядом Фурье. Однако сначала вспомним очень полезные формулы, упрощающие вычисление коэффициентов Фурье[†]:

$$\int_{-a}^a f(t) dt = 2 \int_0^a f(t) dt,$$

если функция $f(t)$ четна, и

$$\int_{-a}^a f(t) dt = 0,$$

если функция $f(t)$ нечетна.

Поэтому формулы коэффициентов Фурье для четной функции $f(t)$ принимают вид

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{l} \int_0^l f(t) dt, \\ a_k &= \frac{2}{l} \int_0^l f(t) \cos \frac{k\pi t}{l} dt, \\ b_k &= 0, \quad k = 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

а для нечетной —

$$\begin{aligned} a_0 &= 0, \quad a_k = 0, \\ b_k &= \frac{2}{l} \int_0^l f(t) \sin \frac{k\pi t}{l} dt, \\ k &= 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (17)$$

[†]Лекция «Физические приложения определенного интеграла».

Пример 3. Разложить в ряд Фурье 2π -периодическую функцию, изображенную на рис. 5 и заданную на отрезке $[-\pi, \pi]$ формулой

$$f(t) = \begin{cases} -1, & t \in [-\pi; 0); \\ 1, & t \in [0; \pi). \end{cases}$$

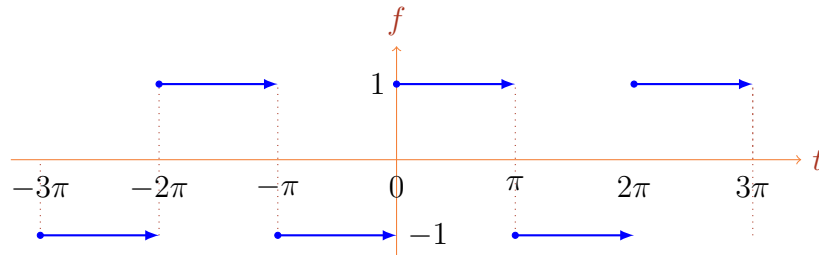


Рис. 5.

Решение. В силу нечетности функции $f(t)$ естественно применить формулы (17) с $l = \pi$:

$$\begin{aligned} a_0 &= 0, \quad a_k = 0, \\ b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt \, dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin kt \, dt = -\frac{2}{k\pi} \cos kt \Big|_0^{\pi} = \\ &= \frac{2}{k\pi} (1 - \cos k\pi). \end{aligned}$$

Но $\cos k\pi = (-1)^k$, поэтому

$$b_k = \frac{2 [1 - (-1)^k]}{k\pi} = \begin{cases} 0, & k = 2m; \\ \frac{4}{k\pi}, & k = 2m + 1; \end{cases} \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

В соответствии с (12) тригонометрический ряд Фурье для заданной функции имеет вид

$$f(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\sin(2m+1)t}{2m+1}. \quad (18)$$

Построим спектры заданного сигнала, преобразовав полученную формулу:

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{4}{\pi(2m+1)} \sin(2m+1)t = \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{4}{\pi(2m+1)} \cos \left[(2m+1)t - \frac{\pi}{2} \right]. \end{aligned}$$

Таким образом, сигнал имеет следующие спектры. Частотный:

$$\{1, 3, 5, 7, \dots\},$$

амплитудный:

$$\left\{ \frac{4}{\pi}, \frac{4}{3\pi}, \frac{4}{5\pi}, \dots \right\},$$

фазовый:

$$\left\{ \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \dots \right\}.$$

Участки этих спектров показаны на рис. 6.

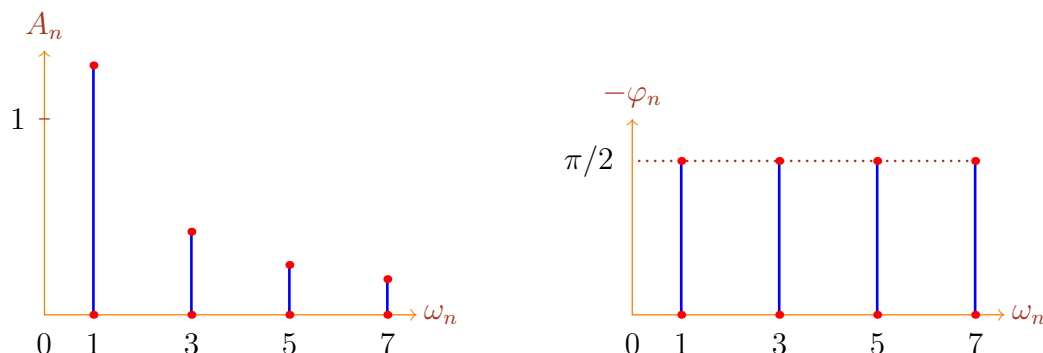


Рис. 6.

На анимационном рис. 7 изображена функция f и частичные суммы S_N ряда (18). Щелкая мышкой по рис., можно видеть, как осуществляется сходимость суммы синусов к заданной разрывной функции, как с увеличением N все туже навивается спираль частичной суммы на «ступеньки» функции $f(t)$.

Рис. 7. Аппроксимация телеграфного сигнала рядом Фурье.

Однако одна особенность рис. вызывает недоумение. Последний его кадр показывает, что даже для $N = 90$ в точках разрыва функции $f(t)$ хорошее приближение не наблюдается. Можно убедиться, что и для бóльших значений N торчащие в точках разрыва «ушки» не исчезают. Как же быть? Считать, что частичные суммы ряда Фурье не сходятся к $f(t)$? Но уж больно хорошо они ее приближают вне точек разрыва. . . . Оказывается, рассмотренный пример просто демонстрирует новый тип сходимости. \square

В Приложении³⁾ рассмотрены возможности гармонического анализа в системе *Mathematica*.

Приложение

1) Сначала докажем следующее утверждение.

Лемма П1. Если функция $f(t)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и $(f, f) = 0$, то $f \equiv 0$.

Доказательство. Предположим противное: на $[a, b]$ найдется точка τ , в которой $f(\tau) \neq 0$. Тогда в силу непрерывности функции $f^2(t)$ найдется[†] окрестность $U(\tau, r) \subset [a, b]$, в которой $f^2(t) \geq s > 0$. Из этого следует, что

$$(f, f) = \int_a^b f^2(t) dt \geq \int_{U(\tau, r)} s dt = 2sr > 0.$$

Полученное противоречие доказывает утверждение. □

Покажем теперь справедливость леммы 1.

Точки разрыва c_1, c_2, \dots, c_m функции $f \in F_{[a, b]}$ разбивают отрезок $[a, b]$ на части $[c_i, c_{i+1}]$, $i = 1, m-1$, на каждой из которых функция $f(t)$ непрерывна и, значит, в соответствии с предыдущей леммой тождественно равна нулю. Но тогда и в точках разрыва в силу условия (5) $f(c_i) = 0$.

2) Пусть $f_1, f_2 \in F_{[a, b]}$; $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Используя формулу (5), для функции $f = \alpha f_1 + \beta f_2$ в точке разрыва $t = c$ получим

$$\begin{aligned} f(c) &= \alpha f_1(c) + \beta f_2(c) = \\ &= \alpha \frac{f_1(c-0) + f_1(c+0)}{2} + \beta \frac{f_2(c-0) + f_2(c+0)}{2} = \\ &= \frac{\alpha f_1(c-0) + \beta f_2(c-0)}{2} + \frac{\alpha f_1(c+0) + \beta f_2(c+0)}{2} = \\ &= \frac{f(c-0) + f(c+0)}{2}. \end{aligned}$$

3) Прежде всего, конечно, *Mathematica* может помочь при вычислении коэффициентов Фурье.

Пусть, например, требуется разложить в ряд Фурье 2π -периодическую функцию, заданную на промежутке $(-\pi, \pi]$ выражением

$$f(t) = \left(t + \frac{\pi}{2}\right)^2. \quad (\text{П1})$$

Введем ее в систему *Mathematica*:

$$f[t_] := \left(t + \frac{\pi}{2}\right)^2$$

Сконструируем из нее как бы 2π -периодическую функцию, которую изобразим на дисплее:

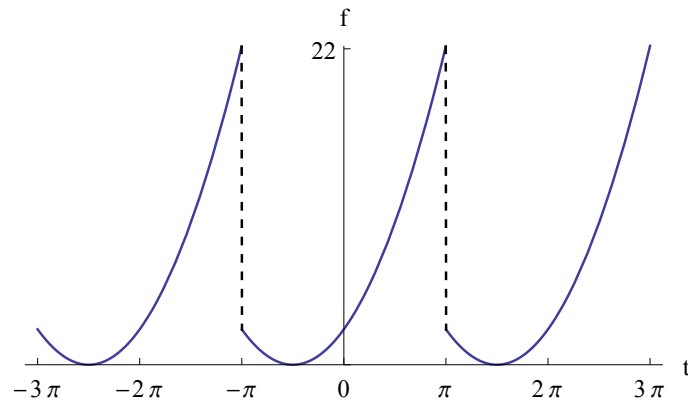
$$g[t_] := \begin{cases} f[t+2\pi] & t \leq -\pi \\ f[t] & -\pi < t \leq \pi \\ f[t-2\pi] & t > \pi \end{cases}$$

`Plot[g[t], {t, -3\pi, 3\pi}, AxesLabel -> {"t", "f"}, PlotRange -> {0, 9\pi^2/4},`

`ExclusionsStyle -> Dashing[Small], Ticks -> {{-3\pi, -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, 3\pi}, {0, 22}},`

`AspectRatio -> 1/2]`

[†]Лекция «Теоремы о среднем», Приложение.



Опция `Ticks` в операторе `Plot` задает отметки на осях.

Вычислим коэффициент a_0 :

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f[t] dt$$

$$\frac{7\pi^2}{6}$$

Чтобы при вычислении коэффициентов a_k и b_k *Mathematica* выполнила преобразования вида $\cos k\pi = (-1)^k$, $\sin k\pi = 0$, ей надо указать, что k — целое число:

$$\text{FullSimplify} \left[\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f[t] \text{Cos}[k t] dt, k \in \text{Integers} \right]$$

$$\frac{4(-1)^k}{k^2}$$

$$\text{FullSimplify} \left[\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f[t] \text{Sin}[k t] dt, k \in \text{Integers} \right]$$

$$-\frac{2(-1)^k \pi}{k}$$

Таким образом, имеем следующее разложение заданной функции в ряд Фурье:

$$f(t) = \frac{7\pi^2}{12} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \left(\frac{2}{k} \cos kt - \pi \sin kt \right).$$

Это же разложение можно получить более автоматизированным способом, используя специальный оператор `FourierCoefficient`, вычисляющий коэффициенты комплексного ряда Фурье:

$$c_0 = \frac{a_0}{2}, c_n = \frac{a_n - j b_n}{2}, n = 1, 2, \dots$$

Что это за ряд и что это за коэффициенты, мы пока не знаем, но это не мешает нам их использовать, например, для получения коэффициентов ряда (13) в соответствии с формулами (14), (15) и (16). Упомянутый оператор определяется как

`FourierCoefficient[expr, t, n]`, где

`expr` — раскладываемая на отрезке $[-\pi, \pi]$ в ряд Фурье функция,

`t` — ее аргумент,

`n` — порядковый номер коэффициента.

Вначале найдем коэффициент a_0 :

```
a0 = 2 FourierCoefficient[f[t], t, 0]

$$\frac{7\pi^2}{6}$$

```

Если в операторе `FourierCoefficient` последний аргумент (порядковый номер коэффициента) является переменной, которой не присвоено никакого значения, коэффициент Фурье будет найден в общем виде. Воспользуемся этим, чтобы составить себе представление о комплексных коэффициентах Фурье:

```
FCoef = FullSimplify[FourierCoefficient[f[t], t, k], k ∈ Integers]

$$\frac{(-1)^k (2 + I k \pi)}{k^2}$$

```

Теперь с их помощью определим коэффициенты действительного ряда Фурье:

```
ComplexExpand[2 Re[FCoef]];
an = FullSimplify[%, k ∈ Integers]

$$\frac{4(-1)^k}{k^2}$$

ComplexExpand[-2 Im[FCoef]];
bn = FullSimplify[%, k ∈ Integers]

$$-\frac{2(-1)^k \pi}{k}$$

```

Наконец, напечатаем общий вид полученного ряда:

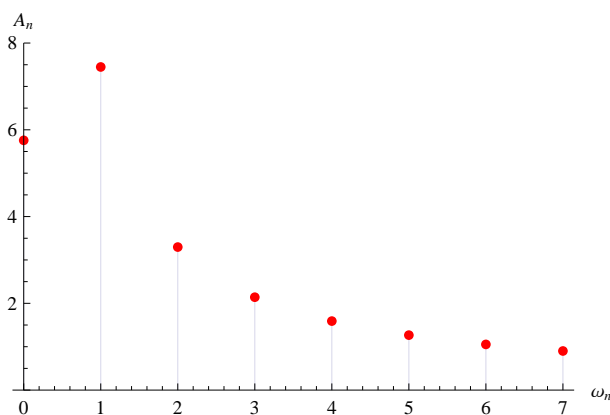
```
Print[ $\frac{a_0}{2}$ , " +  $\sum_{k=1}^{\infty}$ [" , an, " cos kt - " , -bn, " sin kt]" ]

$$\frac{7\pi^2}{12} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{4(-1)^k}{k^2} \cos kt - \frac{2(-1)^k \pi}{k} \sin kt \right]$$

```

С помощью этого же оператора `FourierCoefficient` найдем и спектры сигнала. Сначала определим амплитудный спектр и построим его график:

```
A = {Abs[FourierCoefficient[f[t], t, 0]] // N};
Do[A = Append[A, 2 Abs[FourierCoefficient[f[t], t, k]] // N], {k, 1, 7}]
ListPlot[Table[{k - 1, A[[k]]}, {k, 1, 8}], AxesLabel → {" $\omega_n$ ", " $A_n$ "},
PlotStyle → {PointSize[Medium], Red}, PlotRange → {0, 8}, Filling → Axis]
```

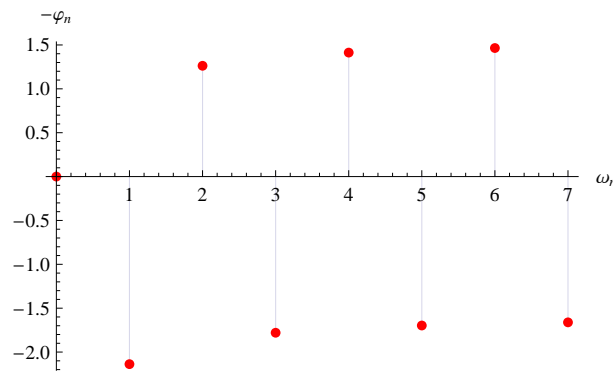


а затем — фазовый:

```

 $\varphi = \{\text{If}[A_{[[1]]} \geq 0, 0, \pi];$ 
Do[ $\varphi = \text{Append}[\varphi, -\text{Arg}[2 \text{FourierCoefficient}[f[t], t, k]] // N], \{k, 1, 7\}]$ 
ListPlot[Table[ $\{k - 1, \varphi_{[[k]]}\}, \{k, 1, 8\}], \text{AxesLabel} \rightarrow \{\omega_n, -\varphi_n\},$ 
PlotStyle  $\rightarrow \{\text{PointSize}[\text{Medium}], \text{Red}\}, \text{Filling} \rightarrow \text{Axis}]$ 

```



Опция `Filling` в операторе `ListPlot` проводит отрезки от красных точек графика к оси абсцисс.

Mathematica может непосредственно формировать частичные суммы Фурье. Так что, если общий вид ряда Фурье пользователя не интересует, можно получить часть этого ряда и применить ее в вычислениях. Соответствующий оператор имеет вид `FourierSeries[expr, t, n]` и те же аргументы, что и предыдущий оператор. Ответ *Mathematica* выводит в комплексной форме, поэтому упомянутый оператор следует сопровождать оператором `ExpToTrig`, переводящим выражения с комплексной экспонентой в тригонометрические выражения. Для нашей функции это выглядит так:

```
FourierSeries[f[t], t, 3] // ExpToTrig
```

$$\frac{7\pi^2}{12} - 4 \cos[t] + \cos[2t] - \frac{4}{9} \cos[3t] + 2\pi \sin[t] - \pi \sin[2t] + \frac{2}{3} \pi \sin[3t]$$

В системе *Mathematica* имеется еще одна приятная возможность — создать «прибор», называемый манипулятором, с помощью которого можно визуализировать сходимость ряда Фурье к заданной функции. Описание этого оператора занимает довольно много места, поэтому ограничимся замечанием о том, что он обязательно содержит некий параметр (в нашем случае — n), изменяя который с помощью специального движка, можно соответственно изменять изображение.

Построим его (рис. 8):

```

Manipulate[Plot[ $\left\{ \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (2 \text{Re}[\text{FCoef}] \cos[kt] - 2 \text{Im}[\text{FCoef}] \sin[kt]), f[t] \right\},$ 
{t,  $-\pi, \pi$ }, PlotStyle  $\rightarrow \{\text{Blue}, \text{Magenta}\}, \text{AxesLabel} \rightarrow \{t, f\}], \{n, 1, 50, 1\}]$ 

```

Запись `{n, 1, 50, 1}` означает, что при перемещении движка манипулятора номер частичной суммы n изменяется от 1 до 50 с шагом 1. Синяя линия является графиком частичной суммы, а красноватая — графиком функции (П1). Пользуясь таким манипулятором, можно изучать сходимость рядов Фурье.

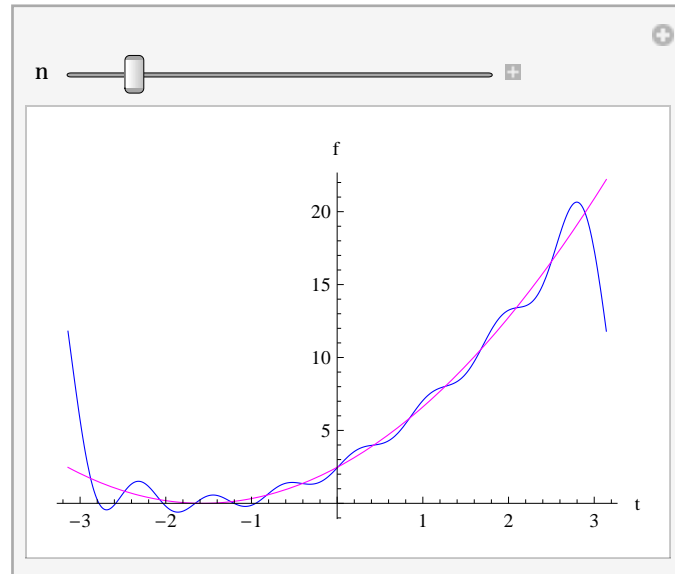


Рис. 8.

Литература

- [1] Бугров Я.С., Никольский С.М. *Высшая математика. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного*. – М.: Наука, 1985, – с. 260-265, 268-271, 275-278.
- [2] Письменный Д.Т. *Конспект лекций по высшей математике*. – М.: Рольф, 2000. Ч. 2. – с. 144–148, 150-152.
- [3] Толстов Г.П. *Ряды Фурье*. – М.: Физматгиз, 1960, – с. 9-28, 59-66.