В т.ч. комплексный ряд Фурье

Волченко Ю.М.

Содержание лекции

Ряд Фурье $2l$-периодической функции, заданной на произвольном отрезке длины $2l$. Ряды Фурье по синусам и по косинусам. Ряд Фурье для непериодической функции. Комплексный ряд Фурье.

Дополнительные возможности использования системы *Mathematica* в области рядов Фурье.

3 февраля 2016 г.

Разложение в ряд Фурье можно применять не только к периодическим функциям, определенным на всей числовой оси, но и к функциям, заданным, как обычно задаются сигналы, на некотором отрезке положительной полуоси. Кроме того, естественно перевести ряд Фурье в комплексную плоскость, столь привычную для электротехники и электроники, чтобы получать результаты, вписывающиеся в общий стиль рассуждений в этих областях.

1 Ряд Фурье на отрезке $[\lambda, \lambda + 2l]$

При вычислении коэффициентов Фурье у пытливых умов возникает вопрос: обязательно ли в вычислительных формулах интегрировать по промежутку $[-l, l]$, или его можно заменить другим промежутком такой же длины? Как утверждает следующая теорема, это возможно, причем замена часто приводит к более простому ходу вычислений.

Теорема 1. *Если $f(t)$ является $2l$-периодической функцией, то для любого λ*

$$\int_{-l}^{l} f(t)\, dt = \int_{\lambda}^{\lambda+2l} f(t)\, dt.$$

Доказательство. Выполним преобразование правой части доказываемого равенства:

$$\int_{\lambda}^{\lambda+2l} f\left(t\right)\,dt = \int_{\lambda}^{-l} f\left(t\right)\,dt + \int_{-l}^{l} f\left(t\right)\,dt + \int_{l}^{\lambda+2l} f\left(t\right)\,dt =$$
$$= \langle t = z + 2l,\; dt = dz\rangle =$$
$$= \cancel{\int_{\lambda}^{-l} f\left(t\right)\,dt} + \int_{-l}^{l} f\left(t\right)\,dt + \cancel{\int_{-l}^{\lambda} f\left(z+2l\right)\,dz} = \int_{-l}^{l} f\left(t\right)\,dt,$$

так как $f\left(t+2l\right) = f\left(t\right)$. Рис. 1 иллюстрирует геометрический смысл доказанного: площади зеленых фигур равны. $\square$

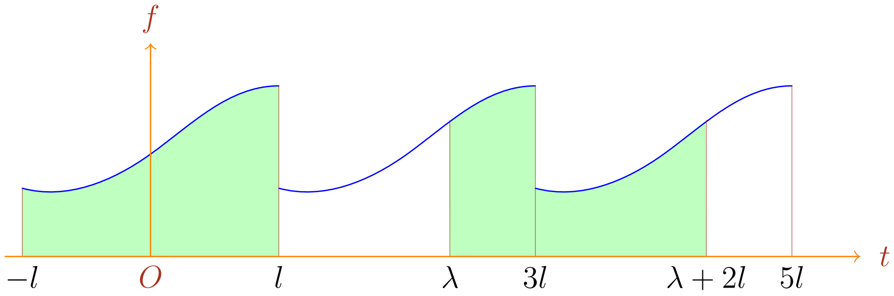


Рис. 1.

Следствие 1. *Коэффициенты Фурье для $2l$-периодической функции $f\left(x\right)$ можно вычислять по формулам*

$$\boxed{\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{l}\int_{\lambda}^{\lambda+2l} f\left(t\right)\,dt,\\ a_k &= \frac{1}{l}\int_{\lambda}^{\lambda+2l} f\left(t\right)\cos\frac{k\pi t}{l}\,dt,\\ a_k &= \frac{1}{l}\int_{\lambda}^{\lambda+2l} f\left(t\right)\sin\frac{k\pi t}{l}\,dt.\end{aligned}}$$

Пример 1. *Разложить в ряд Фурье 2π-периодическую функцию, заданную на отрезке $[0;2\pi]$ формулой*

$$f\left(t\right) = t,$$

см. рис. 2.

Решение. Данная функция 2π-периодична. Но на отрезке $[-\pi,\pi]$ она задается двумя аналитическими выражениями, а на отрезке $[0;2\pi]$ — одним. Поэтому есть смысл при

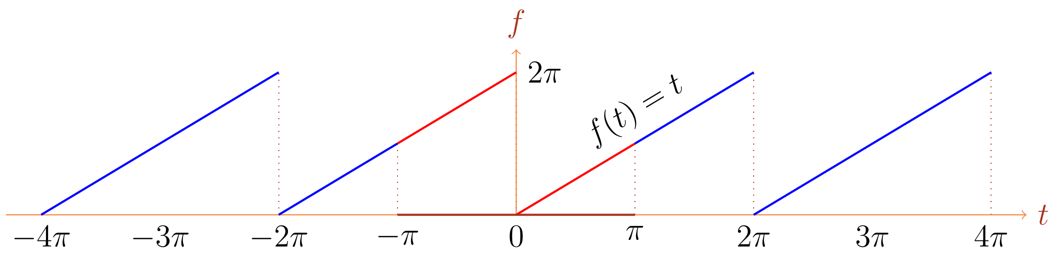


Рис. 2.

вычислении коэффициентов Фурье использовать отрезок $[0;2\pi]$, а не отрезок $[-\pi,\pi]$ (при этом, очевидно, $\lambda=0$):

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}t\,dt=\left.\frac{t^2}{2\pi}\right|_0^{2\pi}=2\pi,$$

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}t\cos kt\,dt=\left\langle u=t, dv=\cos kt\,dt,\ du=dt,\ v=\frac{\sin kt}{k}\right\rangle=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\left.\frac{t\sin kt}{k}\right|_0^{2\pi}-\frac{1}{k}\int_0^{2\pi}\sin kt\,dt\right)=\left.\frac{\cos kt}{\pi k^2}\right|_0^{2\pi}=0,$$

$$b_k=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}t\sin kt\,dt=\left\langle u=t, dv=\sin kt\,dt,\ du=dt,\ v=-\frac{\cos kt}{k}\right\rangle=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(-\left.\frac{t\cos kt}{k}\right|_0^{2\pi}+\frac{1}{k}\int_0^{2\pi}\cos kt\,dt\right)=-\frac{2}{k}+\left.\frac{\sin kt}{\pi k^2}\right|_0^{2\pi}=-\frac{2}{k}.$$

Следовательно, разложение заданной функции в ряд Фурье имеет вид

$$f\left(t\right)=\pi-2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kt}{k}.$$

2 Ряды Фурье по синусам и по косинусам

В тех случаях, когда функция $f\left(t\right)$ представляет собой сигнал (а тогда t является временем), она задается не на отрезке $[-l,l]$, а на отрезке $[0,l]$, потому что обычно сигнал рассматривают, начиная с нулевого момента времени. Как в этом случае получить разложение $f\left(t\right)$ в ряд Фурье? В такой ситуации принято поступать следующими двумя способами.

Функцию $f\left(t\right)$, заданную на отрезке $[0,l]$, продолжают на промежуток $[-l;0]$ оси Ox либо четным, либо нечетным образом (см. рис. 3), а затем получившуюся функцию периодически продолжают на всю числовую ось.

В первом случае конструируется четная $2l$-периодическая функция, заданная на отрезке $[-l,l]$, следовательно, ее можно разложить в ряд Фурье, вычислив коэффициенты разложения по формулам для четных функций. Если

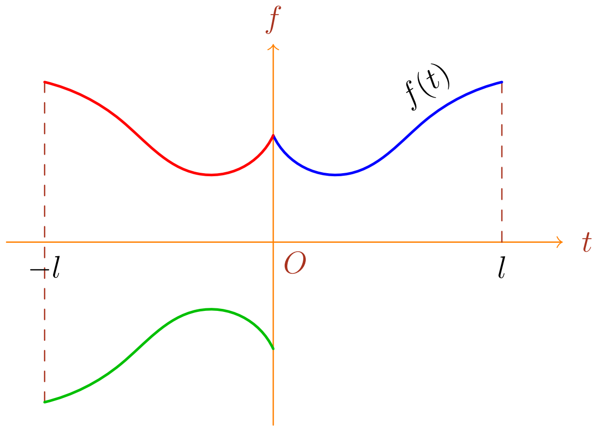


Рис. 3. ∼ − $f(t)$, ∼ − четное продолжение, ∼ − нечетное продолжение.

полученный таким образом ряд Фурье будет сходиться к построенной функции, то он будет сходиться и к функции $f(t)$ на отрезке $[0, l]$. Такое разложение $f(t)$ в ряд Фурье называется ***разложением в ряд Фурье по косинусам***.

Во втором случае, действуя аналогично, получают нечетную $2l$-периодическую функцию, заданную на отрезке $[-l, l]$, применяют формулы для нечетных функций и приходят к ***разложению*** функции $f(t)$ ***в ряд Фурье по синусам***.

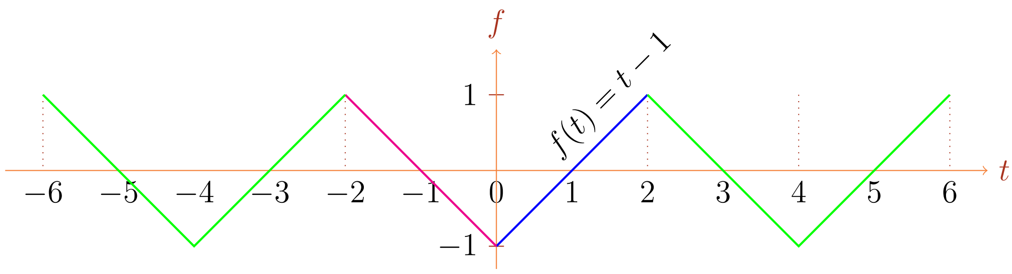
Пример 2. *Функцию* $f(t) = t - 1$*, заданную на отрезке* $[0; 2]$*, разложить в ряды Фурье по косинусам и по синусам.*

Решение. Продолжим заданную функцию на отрезок $[-2; 0]$ четным образом, а затем периодически – на всю числовую ось, рис. 4, а). Применим формулы вычисления коэффициентов Фурье для четных функций:

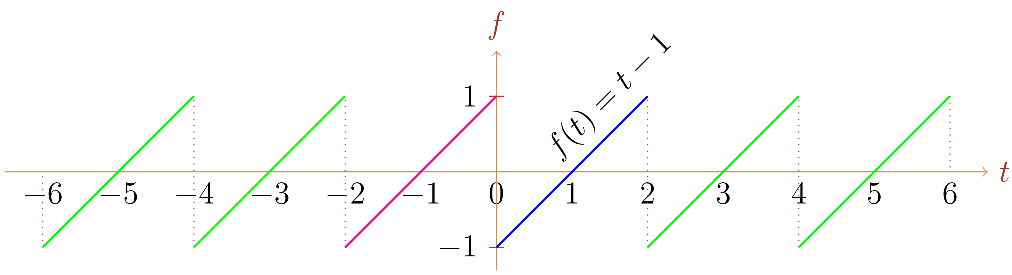
$$
\begin{aligned}
a_0 &= \int_0^2 (t-1)\,dt = \left(\frac{t^2}{2} - t\right)\Bigg|_0^2 = 2 - 2 = 0,\\
a_k &= \int_0^2 (t-1)\cos\frac{k\pi t}{2}\,dt = \\
&= \left\langle u = t-1,\ dv = \cos\frac{k\pi t}{2}\,dt,\ du = dt,\ v = \frac{2}{k\pi}\sin\frac{k\pi t}{2}\right\rangle = \\
&= \frac{2(t-1)}{k\pi}\sin\frac{k\pi t}{2}\Bigg|_0^2 - \frac{2}{k\pi}\int_0^2 \sin\frac{k\pi t}{2}\,dt = \frac{4}{k^2\pi^2}\cos\frac{k\pi t}{2}\Bigg|_0^2 = \frac{4\left[(-1)^k - 1\right]}{k^2\pi^2} = \\
&= \begin{cases} 0, & k = 2m; \\ -\dfrac{8}{k^2\pi^2}, & k = 2m+1; \end{cases} \quad m = 0, 1, 2\ldots,\\
b_k &= 0.
\end{aligned}
$$

Разложение в ряд по косинусам имеет вид

$$
t - 1 = -\frac{8}{\pi^2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\cos\frac{(2m+1)\pi t}{2}}{(2m+1)^2}.
$$



а) четное продолжение



б) нечетное продолжение

Рис. 4.

Теперь вычислим коэффициенты разложения в ряд Фурье по формулам для нечетных функций, рис. 4, б):

$$
\begin{aligned}
& a_0 = 0,\ a_k = 0,\\
& b_k = \int_0^2 (t-1)\sin\frac{k\pi t}{2}\,dt =\\
&\quad = \left\langle u = t-1,\ dv = \sin\frac{k\pi t}{2}\,dt,\ du = dt,\ v = -\frac{2}{k\pi}\cos\frac{k\pi t}{2}\right\rangle =\\
&\quad = -\frac{2\,(t-1)}{k\pi}\cos\frac{k\pi t}{2}\bigg|_0^2 + \frac{2}{k\pi}\int_0^2 \cos\frac{k\pi t}{2}\,dt = -\frac{2\,(-1)^k+2}{k\pi} + \frac{4}{k^2\pi^2}\sin\frac{k\pi t}{2}\bigg|_0^2 =\\
&\quad = -\frac{2\left[(-1)^k+1\right]}{k\pi} = \begin{cases} 0, & k = 2m+1;\\ -\dfrac{4}{k\pi}, & k = 2m; \end{cases} \qquad m = 1, 2, 3, \ldots .
\end{aligned}
$$

Следовательно, разложение в ряд по синусам будет таким:

$$
t - 1 = -\frac{2}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\sin m\pi t}{m}.
$$

В первом случае коэффициенты ряда Фурье убывают быстрее, как величины, обратные квадратам, а во втором они убывают, как величины, обратные первым степеням, и, следовательно, медленнее. Это объясняется тем, что четное продолжение оказалось непрерывным, а нечетное — разрывным. Таким образом, с точки зрения скорости сходимости разложение по косинусам эффективнее.

3 Ряд Фурье для непериодической функции

Пусть функция $f(t)$ задана на отрезке $[a,b]$, $a > 0$. Продолжим ее любым способом на отрезок $[0;a]$, а затем – на отрезок $[-b;0]$ четным или нечетным образом, см. рис. 5. Полученную функцию продолжим периодически на всю числовую ось. Разложение последней функции в ряд Фурье будет и разложением заданной на отрезке $[a,b]$ функции $f(t)$.

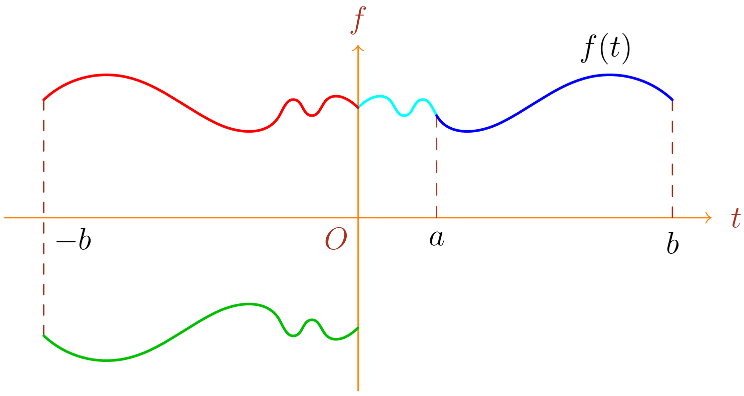


Рис. 5.

Пример 3. *Разложить в ряд Фурье функцию* $f(t) = 4(1-t)$, *заданную на отрезке* $[1/2;1]$.

Решение. Продолжим заданную функцию на отрезок $[0;1/2]$, положив ее на этом отрезке равной нулю. Далее продолжим ее нечетным образом на отрезок $[-1;0]$, а затем 2-периодическим образом на всю числовую ось (рис. 6). $\square$

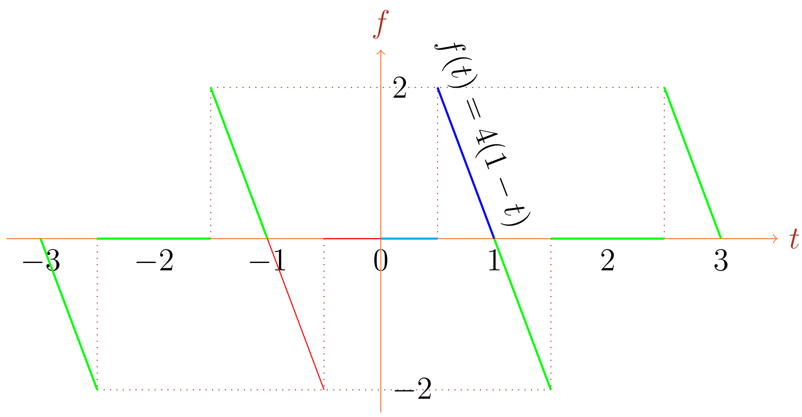


Рис. 6.

Решение. Так как построенная функция нечетна, то и вычислим ее коэффициенты Фурье по формулам для нечетных функций:

$$a_k = 0,$$

$$
\begin{aligned}
b_k &= 2\int_{1/2}^{1} 4\left(1-t\right)\sin k\pi t\,dt = \\
&= \left\langle u = 1-t,\ dv = \sin k\pi t\,dt,\ du = -dt,\ v = -\frac{1}{k\pi}\cos k\pi t \right\rangle = \\
&= -\frac{8\left(1-t\right)}{k\pi}\cos k\pi t\Big|_{1/2}^{1} - \frac{8}{k\pi}\int_{1/2}^{1}\cos k\pi t\,dt = \\
&= \frac{4}{k\pi}\cos\frac{k\pi}{2} - \frac{8}{k^2\pi^2}\sin k\pi t\Big|_{1/2}^{1} = \frac{4}{k\pi}\cos\frac{k\pi}{2} + \frac{8}{k^2\pi^2}\sin\frac{k\pi}{2} = \\
&= \frac{4\left(2\sin\frac{k\pi}{2} + k\pi\cos\frac{k\pi}{2}\right)}{k^2\pi^2}.
\end{aligned}
$$

Имеем следующее разложение в ряд Фурье:

$$
f\left(t\right) = \frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2\sin\frac{k\pi}{2} + k\pi\cos\frac{k\pi}{2}}{k^2}\sin k\pi t.
$$

4 Комплексный ряд Фурье

Остается перевести все построения в сфере рядов Фурье в комплексную область, наиболее подходящую для изысканий и приложений вашей специальности. Имея в виду разложение

$$
f\left(t\right) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi t}{l} + b_n\sin\frac{n\pi t}{l}\right), \tag{1}
$$

преобразуем следующим образом базисные функции:

$$
\cos\frac{n\pi t}{l} = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{jn\pi t}{l}} + e^{-\frac{jn\pi t}{l}}\right),\ \sin\frac{n\pi t}{l} = -\frac{j}{2}\left(e^{\frac{jn\pi t}{l}} - e^{-\frac{jn\pi t}{l}}\right).
$$

Подставив эти выражения в (1), получим

$$
\begin{aligned}
f\left(t\right) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{a_n}{2}\left(e^{\frac{jn\pi t}{l}} + e^{-\frac{jn\pi t}{l}}\right) - j\,\frac{b_n}{2}\left(e^{\frac{jn\pi t}{l}} - e^{-\frac{jn\pi t}{l}}\right)\right] = \\
&= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n - jb_n}{2}\,e^{\frac{jn\pi t}{l}} + \frac{a_n + jb_n}{2}\,e^{-\frac{jn\pi t}{l}}\right).
\end{aligned}
$$

Обозначим $c_0 = a_0/2$, $c_n = \left(a_n - jb_n\right)/2$, $c_{-n} = \left(a_n + jb_n\right)/2$; тогда

$$
\boxed{f\left(t\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j\frac{n\pi t}{l}}.} \tag{2}
$$

Выражение в правой части этой формулы называется ***комплексным рядом Фурье*** для функции $f\,(t)$, а сама формула — ***разложением*** функции $f\,(t)$ в комплексный ряд Фурье.

Чтобы не пересчитывать коэффициенты c_n по коэффициентам a_n и b_n действительного ряда Фурье, найдем формулы для вычисления коэффициентов c_n непосредственно по функции $f\,(t)$. Для этого воспользуемся выражениями для коэффициентов действительного ряда Фурье:

$$c_n = \frac{a_n - jb_n}{2} = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f\,(t)\cos\frac{n\pi t}{l}\,dt - \frac{j}{2l}\int_{-l}^{l} f(t)\sin\frac{n\pi t}{l}\,dt =$$
$$= \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f\,(t)\left(\cos\frac{n\pi t}{l} - j\sin\frac{n\pi t}{l}\right)\,dt = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f\,(t)\,e^{-j\frac{n\pi t}{l}}\,dt,\ n > 0.$$

Можно показать, что и для неположительных n формула будет такой же. Поэтому

$$\boxed{c_n = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f\,(t)\,e^{-j\frac{n\pi t}{l}}\,dt,\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\ .} \tag{3}$$

Наоборот, зная коэффициенты комплексного ряда Фурье, нетрудно найти коэффициенты его действительного аналога:

$$a_n = 2\,\mathrm{Re}\,c_n,\ b_n = -2\,\mathrm{Im}\,c_n,\ n \geq 0. \tag{4}$$

В приложениях теории рядов Фурье используется следующая терминология:

- $e^{\frac{n\pi t}{l}}$ — ***гармоники***;
- $\omega_n = \frac{n\pi}{l}$ — ***частоты***, или ***волновые числа***;
- c_n — ***комплексные амплитуды***.

Поскольку амплитуды и фазы из разложения

$$f(t) = A_0\cos(0t + \varphi_0) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n\cos\left(\frac{k\pi}{l}\,t + \varphi_n\right)$$

удовлетворяют соотношениям

$$A_0 = |c_0|\,,\ A_n = 2\,|c_n|\,,\ \varphi_n = \arg c_n,$$

то в комплексной области $\{|c_n|\}$ называют ***амплитудным***, а $\{-\varphi_n\}$ — ***фазовым*** спектром.

Пример 4. *Разложить функцию*

$$f(t)=\begin{cases}0, & t\in(-\pi;0);\\ e^{-t}, & t\in[0;\pi);\end{cases}$$

(рис. 7) в комплексный и действительный ряды Фурье. Найти амплитудный спектр $\{|c_n|\}$.

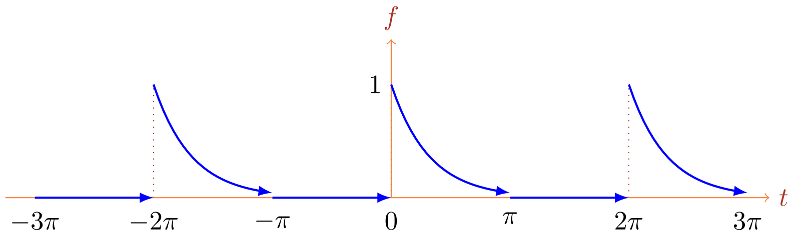


Рис. 7.

Решение. По формулам (3) найдем коэффициенты комплексного ряда Фурье:

$$c_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\,e^{-jnt}\,dt=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}e^{-t}e^{-jnt}\,dt=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}e^{-(1+jn)t}\,dt=$$
$$=-\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{1+jn}\,e^{-(1+jn)t}\Big|_0^{\pi}=-\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{1+jn}\left[e^{-(1+jn)\pi}-1\right].$$

Но

$$\frac{1}{1+jn}=\frac{1-jn}{1+n^2},\quad e^{-(1+jn)\pi}=e^{-\pi}\left[\cos n\pi+j\sin(-n\pi)\right]=(-1)^n e^{-\pi},$$

поэтому

$$c_n=\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1-jn}{1+n^2}\left[1-(-1)^n e^{-\pi}\right].$$

Запишем разложение функции в комплексный ряд Фурье по формуле (2):

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(1-jn)\left[1-(-1)^n e^{-\pi}\right]}{1+n^2}\,e^{jnt}.$$

По формулам (4) получим коэффициенты действительного ряда Фурье:

$$a_0=2\,\mathrm{Re}\,c_0=\frac{1}{\pi}\left(1-e^{-\pi}\right),\quad a_n=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1-(-1)^n e^{-\pi}}{1+n^2},$$
$$b_n=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{n[1-(-1)^n]e^{-\pi}}{1+n^2}.$$

Значит, разложение заданной функции в действительный ряд Фурье будет таким:

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\left(1-e^{-\pi}\right)+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n e^{-\pi}}{1+n^2}\left(\cos nt+n\sin nt\right).$$

Найдем составляющие амплитудного спектра:

$$|c_n|=\frac{\sqrt{1+n^2}\left[1-(-1)^n e^{-\pi}\right]}{2\pi\left(1+n^2\right)}=\frac{1-(-1)^n e^{-\pi}}{2\pi\sqrt{1+n^2}},$$

и изобразим его на рис. 8.

□

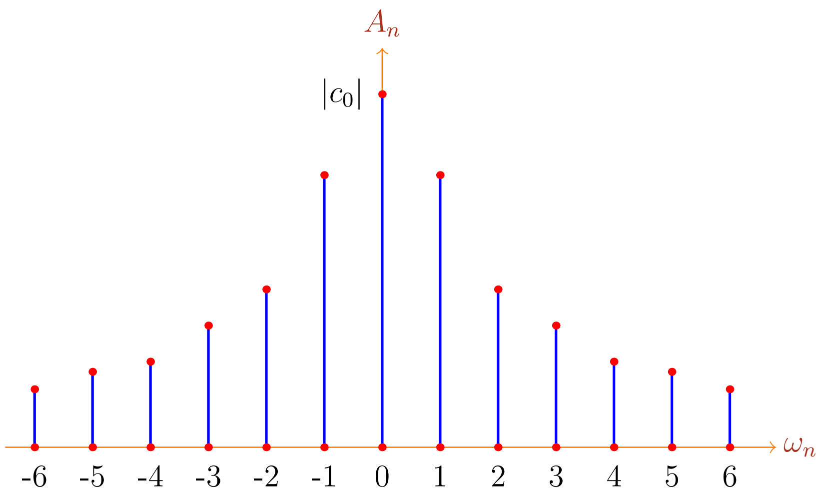


Рис. 8.

В Приложении[1)] показано, как с помощью системы *Mathematica* раскладывать функции в ряды по синусам и по косинусам, а также в комплексный ряд Фурье.

Приложение

[1] Прежде всего научимся в системе *Mathematica* раскладывать в ряд Фурье функцию, заданную не на отрезке $[-\pi,\pi]$, а на произвольном отрезке $[-l,l]$. В общем случае *Mathematica* вычисляет коэффициенты комплексного ряда Фурье по формуле

$$c_n = \left|\frac{b}{2\pi}\right|^{\frac{a+1}{2}} \int_{-\pi/b}^{\pi/b} f(t)e^{-jbnt}dt, \tag{П1}$$

а само разложение функции $f(t)$ в ряд Фурье при этом выглядит как

$$f(t) = \left|\frac{b}{2\pi}\right|^{\frac{1-a}{2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jbnt}. \tag{П2}$$

По умолчанию предполагается, что $a = b = 1$, что́ соответствует разложению функции, заданной на отрезке $[-\pi,\pi]$.

Если требуется разложение на отрезке $[-l,l]$, то из приведенных формул ясно, что надо оставить $a = 1$ и взять $b = \pi/l$.

Для примера рассмотрим разложение в ряд Фурье функции

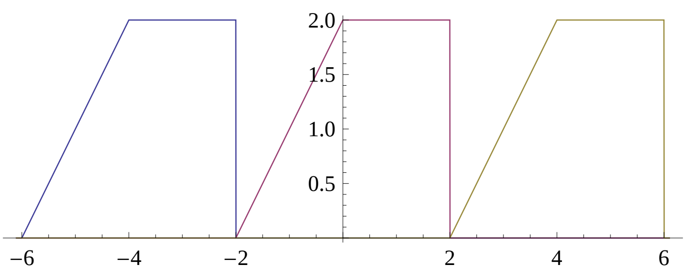
$$\texttt{f[t\_]} := \begin{cases} \texttt{t}+2 & \texttt{t}<0 \\ 2 & \texttt{t}\geq 0 \end{cases}$$

которую будем считать заданной на отрезке $[-2;2]$, и, таким образом, $l = 2$. Чтобы изобразить ее как периодически повторяющуюся на всей числовой оси, введем специально для этого функцию

```
g[t_] := f[t] UnitBox[t/4]
```

где `UnitBox[x]` — единичный прямоугольник; функция, равная 1 на отрезке $[-1/2;1/2]$, и равная 0 в остальных случаях. Построим упомянутый график:

```
Plot[{g[t+4],g[t],g[t-4]},{t,-6.1,6.1},AspectRatio → 1/3]
```



Далее найдем a_0:

```
a0 = 2 FourierCoefficient[f[t],t,0,FourierParameters → {1,π/2}]
3
```

Опция `FourierParameters` как раз и устанавливает $a = 1$ и $b = \pi/l$, о чем было сказано выше. Найдем остальные коэффициенты:

```
FCoef = FourierCoefficient[f[t],t,k,FourierParameters → {1,π/2}];
ComplexExpand[2 Re[FCoef]];
an = FullSimplify[%,k ∈ Integers]
```

$$-\frac{2((-1)^{k}-1)}{\pi^2 k^2}$$

```
ComplexExpand[-2 Im[FCoef]];
bn = FullSimplify[%,k ∈ Integers]
```

$$-\frac{2(-1)^{k}}{\pi k}$$

Получаем следующее разложение заданной функции в ряд Фурье:

$$\text{Print}\left[\frac{a0}{2}, '' + \sum_{k=1}^{\infty}['', an, ''\cos\frac{k\pi t}{2} + '', -bn, ''\sin\frac{k\pi t}{2}\text{“}]''\right]$$

$$\frac{3}{2} - \sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{2(-1+(-1)^{k})}{k^2\pi^2}\cos\frac{k\pi t}{2} + \frac{2(-1)^{k}}{k\pi}\sin\frac{k\pi t}{2}\right]$$

Конечно, *Mathematica* может найти и частичную сумму этого ряда:

```
FourierSeries[f[t],t,5,FourierParameters → {1,π/2}] // ExpToTrig
```

$$\frac{3}{2} + \frac{4\,\text{Cos}\left[\frac{\pi t}{2}\right]}{\pi^2} + \frac{4\,\text{Cos}\left[\frac{3\pi t}{2}\right]}{9\pi^2} + \frac{4\,\text{Cos}\left[\frac{5\pi t}{2}\right]}{25\pi^2} +$$
$$\frac{2\,\text{Sin}\left[\frac{\pi t}{2}\right]}{\pi} - \frac{\text{Sin}[\pi t]}{\pi} + \frac{2\,\text{Sin}\left[\frac{3\pi t}{2}\right]}{3\pi} - \frac{\text{Sin}[2\pi t]}{2\pi} + \frac{2\,\text{Sin}\left[\frac{5\pi t}{2}\right]}{5\pi}$$

При вычислении коэффициентов Фурье при разложении по косинусам *Mathematica* использует формулы

$$a_0 = \left|\frac{2b}{\pi}\right|^{\frac{a+1}{2}} \int_0^{\pi/|b|} f(t)\,dt,$$
$$a_n = \left|\frac{2b}{\pi}\right|^{\frac{a+1}{2}} \int_0^{\pi/|b|} f(t)\cos bnt\,dt.$$

О параметрах a и b уже было сказано выше. Поэтому, если функция $f(t)$ задана на отрезке $[0;\pi]$ и требуется найти коэффициенты ее разложения в ряд по косинусам, применяется оператор `FourierCosCoefficient[expr,t,n]`, причем его аргументы — такие же, как у предыдущих операторов. Если же функция задана на отрезке $[0,l]$, то следует добавить установку `FourierParameters` $\to \{1,\pi/l\}$.

Рассмотрим применение этого оператора на примере разложения в ряд Фурье по косинусам сигнала

```
f[t_] := UnitTriangle[t-1]
```

График функции `UnitTriangle` представляет собой равнобедренный треугольник высоты 1, построенный на основании $[-1;1]$. Нарисуем четное продолжение функции `f[t]`:

```
Plot[f[t],f[t+2],{t,-2,2},AspectRatio → 1/3]
```

и найдем коэффициенты ряда Фурье для косинусов:

```
a0 = FourierCosCoefficient[f[t],t,0,FourierParameters → {1,π/2}]
```

1

```
FourierCosCoefficient[f[t],t,k,FourierParameters → {1,π/2}]
an = Simplify[% /. k → 4 m + 2,m ∈ Integers]
```

$$\frac{16\,\mathrm{Cos}\left[\frac{k\pi}{2}\right]\,\mathrm{Sin}\left[\frac{k\pi}{4}\right]^2}{k^2\pi^2}$$

$$-\frac{4}{(\pi+2\,m\,\pi)^2}$$

Запишем разложение в ряд Фурье для косинусов:

$$\mathrm{Print}\left[\frac{a0}{2}, "-", "\sum_{m=0}^{\infty}", -an, "\cos(2m+1)\pi t"\right]$$

$$\frac{1}{2}-\sum_{m=0}^{\infty}\frac{4}{(\pi+2\,m\,\pi)^2}\cos\,(2\,m+1)\,\pi\,t$$

Следующий оператор позволяет найти частичную сумму этого ряда:

```
FourierCosSeries[f[t],t,10,FourierParameters → {1,π/2}]
```

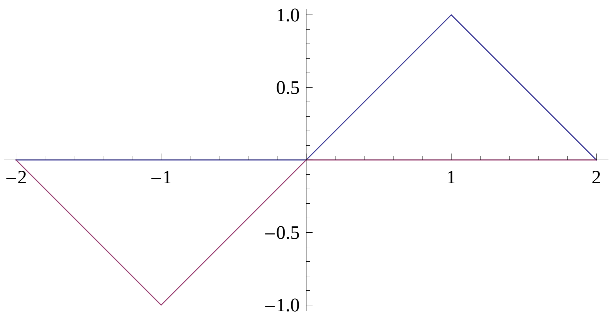
$$\frac{1}{2}-\frac{4\,\mathrm{Cos}[\pi t]}{\pi^2}+\frac{4\,\mathrm{Cos}[3\pi t]}{9\pi^2}-\frac{4\,\mathrm{Cos}[5\pi t]}{25\pi^2}$$

При разложении функции в ряд Фурье по синусам *Mathematica* руководствуется формулой

$$b_n=\left|\frac{2b}{\pi}\right|^{\frac{a+1}{2}}\int_0^{\pi/|b|} f(t)\sin bnt\,dt,$$

относительно параметров которой действуют те же правила, что и описанные выше. Имея это в виду, разложим теперь функцию $f(t)$ в ряд по синусам, продолжив ее нечетным образом на отрезок $[-2;0]$:

```
Plot[{f[t],-f[t + 2]},{t,-2,2},AspectRatio → 1/2]
```



Вычислим с помощью оператора `FourierSinCoefficient` коэффициенты ряда Фурье для синусов:

```
FourierSinCoefficient[f[t],t,k,FourierParameters → {1,π/2}]
bn = Simplify[% /. k → 2 m + 1,m ∈ Integers]
```

$$\frac{8\,\mathrm{Sin}\left[\frac{k\pi}{2}\right]}{k^2\pi^2}$$

$$\frac{8(-1)^{m}}{(\pi+2\,m\,\pi)^2}$$

Распечатаем разложение в ряд Фурье для синусов:

$$\text{Print}\left[''\sum_{m=0}^{\infty}'',\,bn,\,''\sin\frac{(2\,m+1)\pi\,t}{2}''\right]$$

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{8(-1)^{m}}{(\pi+2\,m\,\pi)^2}\sin\frac{(2\,m+1)\,\pi\,t}{2}$$

Найдем частичную сумму ряда:

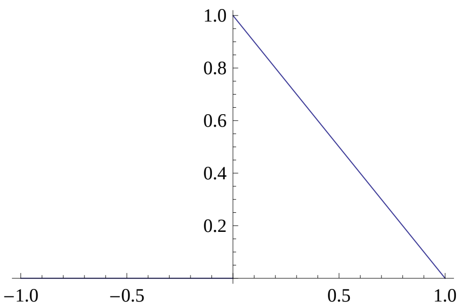
$$\text{FourierSinSeries}[f[t],t,7,\text{FourierParameters}\to\{1,\pi/2\}]$$

$$\frac{8\,\text{Sin}\left[\frac{\pi t}{2}\right]}{\pi^2}-\frac{8\,\text{Sin}\left[\frac{3\pi t}{2}\right]}{9\pi^2}+\frac{8\,\text{Sin}\left[\frac{5\pi t}{2}\right]}{25\pi^2}-\frac{8\,\text{Sin}\left[\frac{7\pi t}{2}\right]}{49\pi^2}$$

Перейдем к комплексному ряду Фурье, в который разложим 2-периодическую функцию вида

$$f[t\_]:=\begin{cases}0 & t<0\\ 1-t & t\geq 0\end{cases}$$

$$\text{Plot}[f[t],\{t,-1,1\}]$$



С помощью уже знакомого нам оператора `FourierCoefficient` вычислим коэффициенты Фурье:

$$\text{c0}=\text{FourierCoefficient}[f[t],t,0,\text{FourierParameters}\to\{1,\pi\}]$$

$$\frac{1}{4}$$

$$\text{cn}=\text{FourierCoefficient}[f[t],t,k,\text{FourierParameters}\to\{1,\pi\}]$$

$$\frac{1+(-1)^{1+k}-I\,k\,\pi}{2\,k^2\,\pi^2}$$

Напечатаем соответствующий комплексный ряд Фурье:

$$\text{Print}\left[c0,''\sum_{k=-\infty}^{\infty}{}'\,'',\,-cn,\,''e^{I\,k\,\pi\,t}''\right]$$

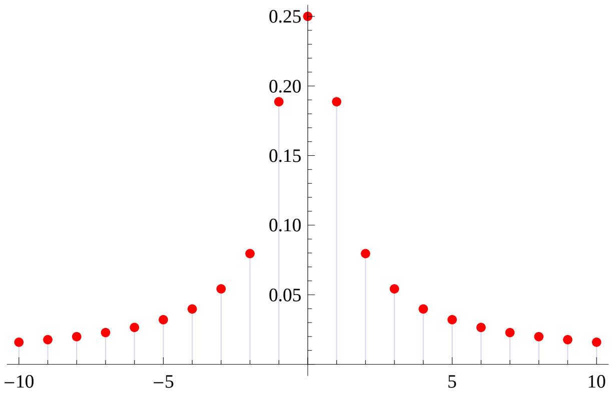
$$\frac{1}{4}+\sum_{k=-\infty}^{\infty}{}'\,\frac{1+(-1)^{1+k}+I\,k\,\pi}{2\,k^2\,\pi^2}\,e^{I\,k\,\pi\,t}$$

Здесь штрих у знака суммы означает, что в сумме отсутствует слагаемое, соответствующее $k=0$. Чтобы построить амплитудный спектр $|c_n|$, воспользуемся оператором

$$\text{DiscretePlot}[expr,\{n,n_{min},n_{max},dn\}],$$

который выводит на дисплей график последовательности `expr` аргумента `n`, изменяющегося от $\mathtt{n}_{\mathtt{min}}$ до $\mathtt{n}_{\mathtt{max}}$ с шагом `dn`. Если $\mathtt{n}_{\mathtt{min}}$ и/или `dn` равны 1, то их можно опустить. Вот что у нас получится:

```
DiscretePlot[Abs[FourierCoefficient[f[t],t,k,FourierParameters → {1,π}]],
  {k,−10,10},PlotStyle → {PointSize[Medium],Red},PlotRange → All]
```



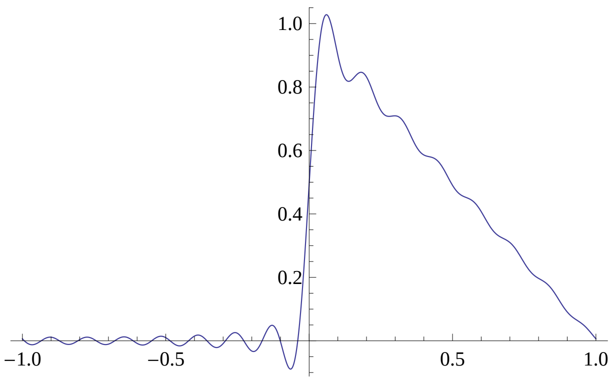
Найдем частичную сумму из пяти членов ряда Фурье:

```
FourierSeries[f[t],t,2,FourierParameters → {1,π}]
```

$$\frac{1}{4}+\frac{e^{\mathrm{I}\,\pi\,\mathrm{t}}(2-\mathrm{I}\,\pi)}{2\pi^2}+\frac{e^{-\mathrm{I}\,\pi\,\mathrm{t}}(2+\mathrm{I}\,\pi)}{2\pi^2}+\frac{\mathrm{I}\,e^{-2\mathrm{I}\,\pi\,\mathrm{t}}}{4\pi}-\frac{\mathrm{I}\,e^{2\mathrm{I}\,\pi\,\mathrm{t}}}{4\pi}$$

и в финале построим график частичной суммы, значительно увеличив число ее членов:

```
Plot[Evaluate[FourierSeries[f[t],t,15,FourierParameters → {1,π}]],{t,−1,1}]
```



Литература

[1] Письменный Д.Т. *Конспект лекций по высшей математике.* — М.: Рольф, 2000. Ч. 2. — с. 153-157.

[2] Толстов Г.П. *Ряды Фурье.* — М.: Физматгиз, 1960, — с. 36-55.