# Сходимость ряда Фурье

Волченко Ю.М.

### Содержание лекции

Сходимость в среднем. Условие сходимости в среднем ряда Фурье. Равномерная и поточечная сходимости ряда Фурье. Минимальность частичной суммы ряда Фурье. Неравенство Бесселя и равенство Парсеваля. Физический смысл равенства Парсеваля.

Анимация равномерной сходимости ряда Фурье.

Анимация работает только в программе Acrobat Reader!

27 января 2016 г.

## 1 Сходимость в среднем

В последнем примере прошлой лекции было обнаружено своеобразное поведение частичных сумм ряда Фурье, которое наводило на мысль, что в примере наблюдается какой-то новый тип сходимости. Это предположение было подтверждено в свое время математической наукой, которая назвала новый вид сходимости сходимостью в среднем.

Говорят, что на отрезке $[a, b]$ ***последовательность функций*** $f_1, f_2, \ldots$ ***сходится в среднем*** к функции $f$, если

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\| = \lim_{n\to\infty} \left( \int_a^b \left[f_n(t) - f(t)\right]^2 dt \right)^{1/2} = 0.$$

Говорят, что ***функциональный ряд сходится в среднем*** к функции $f(t)$ на отрезке $[a, b]$, если последовательность его частичных сумм сходится в среднем к $f(t)$ на этом отрезке.

**Теорема 1.** *Если последовательность функций $f_1, f_2, \ldots,$ сходится равномерно к функции $f$ на отрезке $[a, b]$, то эта последовательность сходится и в среднем к $f$ на $[a, b]$.*

*Доказательство.* Возьмем произвольное число $\varepsilon > 0$. Для положительного числа $\sqrt{\varepsilon / \left[2\left(b-a\right)\right]}$ в силу равномерной сходимости найдется такой номер $N$, что для всех $n \geq N$ и для всех $t \in [a, b]$ выполнится неравенство

$$|f_n - f| < \sqrt{\frac{\varepsilon}{2\left(b-a\right)}}.$$

Но тогда для всех $n \geq N$

$$\|f_n - f\| = \left(\int_a^b \left[f_n\left(t\right) - f\left(t\right)\right]^2\, dt\right)^{1/2} \leq \frac{\varepsilon}{2\left(b-a\right)} \int_a^b dt = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

□

Обратное утверждение неверно. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим следующий

**Пример 1.** *Показать, что последовательность функций $f_n(t) = t^n$ не сходится к функции $f \equiv 0$ на отрезке $[0; 1]$, но сходится к ней в среднем.*

*Решение.* Действительно, сходимость в среднем имеет место:

$$\|f_n - f\|^2 = \int_0^1 \left(t^n - 0\right)^2\, dt = \left.\frac{t^{2n+1}}{2n+1}\right|_0^1 = \frac{1}{2n+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Но $f_n\left(1\right) = 1$ и, значит, $\lim_{n\to\infty} f_n\left(1\right) \nrightarrow 0$. Поскольку последовательность не сходится к $f \equiv 0$, то она не сходится и равномерно. □

Этот пример служит некоторым объяснением своеобразной сходимости, наблюдавшейся в примере из прошлой лекции. Мы видим, что расходимость последовательности функций в одной точке (и даже в нескольких) не влияет на ее сходимость в среднем. Так что торчащие на рис. к упомянутому примеру «ушки», которые серьезные люди называют явлением Гиббса, не противоречат тому, что ряд Фурье, быть может, сходится к функции $f\left(t\right)$ в среднем. А, действительно, сходится ли он в среднем?

**Теорема 2.** *Тригонометрический ряд Фурье любой кусочно непрерывной на отрезке $[-l, l]$ функции $f\left(t\right)$ сходится на этом отрезке к указанной функции в среднем.*

Очевидно, функция из последнего примера прошлой лекции удовлетворяет условиям теоремы, и поэтому ее ряд Фурье сходится к ней в среднем.

Оказывается, если функция $f\left(t\right)$ непрерывна, то сходимость становится даже равномерной, и явление Гиббса уже наблюдаться не будет. Чтобы сформулировать соответствующее утверждение, введем новые определения.

Функция $f(t)$ называется ***кусочно гладкой*** на отрезке $[a, b]$, если она сама и ее производная $f'(t)$ непрерывны на этом отрезке, за исключением, быть может, конечного числа точек разрыва I рода.

**Теорема 3.** *Если функция $f(t)$ непрерывна и кусочно гладка на отрезке $[-l, l]$ и выполняется условие $f(-l) = f(l)$, то тригонометрический ряд Фурье функции $f(t)$ сходится к ней на $[-l, l]$ абсолютно и равномерно.*

Доказательство приведено в Приложении$^{1)}$.

**Пример 2.** *Разложить в ряд Фурье $2\pi$-периодическую функцию $f(t) = |t|$, заданную на отрезке $[-\pi, \pi]$ и изображенную на рис. 1.*

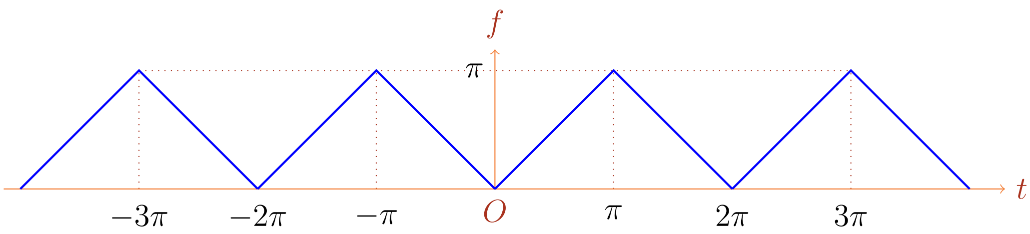


Рис. 1.

*Решение.* Заданная функция четна, поэтому коэффициенты Фурье вычислим по формулам для четных функций:

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t\, dt = \left.\frac{t^2}{\pi}\right|_0^{\pi} = \pi;\\
a_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos kt\, dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t\cos kt\, dt =\\
&= \left\langle u = t,\ dv = \cos kt\, dt,\ du = dt,\ v = \frac{1}{k}\sin kt \right\rangle =\\
&= \left.\frac{2}{k\pi}\, t\sin kt\right|_0^{\pi} - \frac{2}{k\pi}\int_0^{\pi}\sin kt\, dt = \left.\frac{2}{k^2\pi}\cos kt\right|_0^{\pi} =\\
&= \frac{2}{k^2\pi}(\cos k\pi - 1) = \frac{2}{k^2\pi}\left[(-1)^k - 1\right] =\\
&= \begin{cases} 0, & k = 2m;\\ -\dfrac{4}{k^2\pi}, & k = 2m+1;\ m = 0, 1, 2, \ldots; \end{cases}\\
b_k &= 0.
\end{aligned}
$$

Следовательно,

$$
f(t) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\cos(2m+1)\, t}{(2m+1)^2}.
$$

Анимационный рис. 2 показывает, что для заданной функции явление Гиббса отсутствует, а скорость сходимости частичных сумм ряда Фурье к функции $f(t)$ на порядок выше, чем в аналогичном примере с анимацией прошлой лекции. Первое объясняется равномерной сходимостью ряда Фурье для кусочно гладкой функции, а второе — тем, что знаменатели дробей убывают как квадраты чисел $2m + 1$, в то время как в примере 3 предыдущей лекции они убывали линейно.

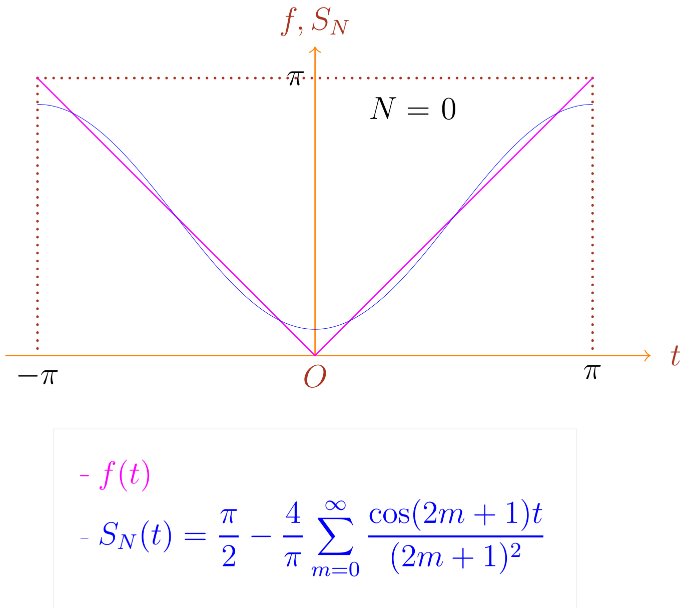


Рис. 2. Аппроксимация пилообразного сигнала рядом Фурье.

□

Наконец, существуют теоремы о поточечной сходимости ряда Фурье, уточняющие особенности поведения его частичных сумм. Чтобы сформулировать одну из них, добавим еще одно определение.

Функция $f(t)$ называется ***кусочно монотонной*** на отрезке $[a, b]$, если этот отрезок можно разбить конечным числом точек $t_1$, $t_2$, …, $t_{n-1}$ на интервалы $(a, t_1)$, $(t_1, t_2)$, …, $(t_{n-1}, b)$, в каждом из которых функция $f(t)$ монотонна (только убывает или только возрастает). Пример кусочно монотонной функции показан на рис. 3.

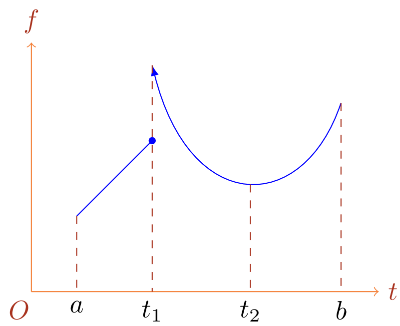


Рис. 3. Кусочно монотонная функция.

Одно из доказанных ранее утверждений[†] приводит к выводу, что кусочно монотонная и ограниченная на некотором отрезке функция может иметь на нем точки разрыва только I рода.

**Теорема 4.** *Если $2l$-периодическая функция $f(t)$ кусочно монотонна и ограничена на $[-l, l]$, то ряд Фурье*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi t}{l} + b_n \sin \frac{n\pi t}{l} \right) \tag{1}$$

*этой функции сходится во всех точках. Сумма полученного ряда $S(t)$ равна значению функции $f(t)$ в точках ее непрерывности, а в точках разрыва $t = c$ — среднему арифметическому ее пределов слева и справа:*

$$S(c) = \frac{f(c-0) + f(c+0)}{2}.$$

*В каждом принадлежащем отрезку $[-l, l]$ интервале, в котором $f(t)$ непрерывна, ряд (1) сходится равномерно.*

Таким образом, при выполнении условий теоремы сумма $S(t)$ принадлежит классу функций $F_{[-l,l]}$.

## 2 Минимальность частичной суммы ряда Фурье

Пусть $\{\varphi_n\}$ — ортогональная система функций. Для упрощения дальнейших выкладок рассмотрим также ***ортонормированную систему*** $\{\psi_n\}$, для которой $\|\psi_n\| = 1$. Ортогональную систему $\{\varphi_n\}$ можно сделать ортонормированной, если ее ***нормировать***, т.е. положить

$$\psi_n = \frac{\varphi_n}{\|\varphi_n\|}.$$

Ряд Фурье по ортогональной системе мы записывали как $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n$, а тогда по ортонормированной системе он запишется в виде

$$\sum_{n=0}^{\infty} d_n \psi_n = \sum_{n=0}^{\infty} d_n \frac{\varphi_n}{\|\varphi_n\|}.$$

Отсюда получаем связь коэффициентов Фурье для ортогональной и ортонормированной систем:

$$d_n = c_n \|\varphi_n\|. \tag{2}$$

[†] Лекция «Непрерывность функции».

Назовем величину $\|f-g\|$ ***отклонением*** функции $f$ от функции $g$.

**Теорема 5.** *Пусть система функций $\{\psi_n\}$ ортонормирована. Среди всех сумм вида*

$$\sum_{n=0}^{N} \alpha_n \psi_n(t)$$

*с произвольными коэффициентами $\alpha_n$ наименьшее отклонение от функции $f(t)$ имеет $N$-я частичная сумма ряда Фурье*

$$\sum_{n=0}^{N} d_n \psi_n(t).$$

*Доказательство.* Из ортонормированности системы $\{\psi_n\}$ следует, что формула вычисления коэффициентов Фурье

$$c_k = \frac{\int_a^b \psi_k(t) f(t)\, dt}{\int_a^b \psi_k^2(t)\, dt}$$

принимает вид $d_k = (f, \psi_k)$. Пользуясь свойствами интеграла, определяющего введенное скалярное произведение, получим

$$\left\|\sum_{n=0}^{N} \alpha_n \psi_n - f\right\|^2 = \left(\sum_{n=0}^{N} \alpha_n \psi_n - f, \sum_{n=0}^{N} \alpha_n \psi_n - f\right) =$$
$$= \sum_{n=0}^{N} \alpha_n^2 (\psi_n, \psi_n) - 2\sum_{n=0}^{N} \alpha_n (f, \psi_n) + (f, f) =$$
$$= \sum_{n=0}^{N} \alpha_n^2 - 2\sum_{n=0}^{N} \alpha_n d_n + \|f\|^2,$$

или

$$\left\|\sum_{n=0}^{N} \alpha_n \psi_n - f\right\|^2 = \sum_{n=0}^{N} (\alpha_n - d_n)^2 + \|f\|^2 - \sum_{n=0}^{N} d_n^2. \tag{3}$$

Мы видим, что квадрат отклонения будет минимальным только при $\alpha_n = d_n$.

## 3 Неравенство Бесселя и равенство Парсеваля

Если в формуле (3) положить $\alpha_n = d_n$, то получится равенство

$$\left\|\sum_{n=0}^{N} d_n \psi_n - f\right\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{n=0}^{N} d_n^2,$$

которое называется ***тождеством Бесселя***. Оно, в свою очередь, влечет за собой неравенство

$$\sum_{n=0}^{N} d_n^2 \le \|f\|^2 .$$

Если при $N \to \infty$ реализовать в последнем предельный переход, придем к неравенству

$$\sum_{n=0}^{\infty} d_n^2 \le \|f\|^2 ,$$

называемому ***неравенством Бесселя***. При определенных условиях это неравенство переходит в равенство

$$\sum_{n=0}^{\infty} d_n^2 = \|f\|^2 ,$$

которое носит название ***равенства Парсеваля***.

Для ортогональной системы $\{\varphi_k\}$ в силу формулы (2) неравенство Бесселя принимает вид

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 \|\varphi_n\|^2 \le \|f\|^2 , \tag{4}$$

а равенство Парсеваля становится таким:

$$\|f\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 \|\varphi_n\|^2 .$$

Свяжем найденные соотношения с тригонометрическим рядом (1). Для этого надо только вспомнить, что квадраты норм системы функций

$$1, \cos\frac{\pi t}{l}, \sin\frac{\pi t}{l}, \cos\frac{2\pi t}{l}, \sin\frac{2\pi t}{l}, \ldots, \cos\frac{k\pi t}{l}, \sin\frac{k\pi t}{l}, \ldots ,$$

мы уже вычислили раньше:

$$\|1\|^2 = 2l, \quad \left\|\cos\frac{k\pi t}{l}\right\|^2 = \left\|\sin\frac{k\pi t}{l}\right\|^2 = l.$$

Следовательно, неравенство Бесселя (4) в этом случае записывается как

$$\left(\frac{a_0}{2}\right)^2 2l + \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n^2 l + b_n^2 l\right) \le \|f\|^2 ,$$

или

$$\boxed{\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^2 + b_n^2\right) \le \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f^2(t)\, dt,} \tag{5}$$

а равенство Парсеваля – как

$$\boxed{\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f^2(t)\, dt = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right).} \tag{6}$$

**Теорема 6.** *Для любой ограниченной и кусочно монотонной на $[-l, l]$ функции $f(t)$ справедливо равенство Парсеваля* (6).

Равенство Парсеваля для разложения

$$f(t) = A_0\cos(0t + \varphi_0) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{k\pi}{l}\, t + \varphi_n\right),$$

преобразуется в

$$\frac{1}{l}\int_{0}^{l} f^2(t)\, dt = A_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} A_n^2,$$

поскольку $f^2(t)$ четна, $A_0 = |a_0|/2$, $A_n^2 = a_n^2 + b_n^2$. Как показывает следующий пример, в этом виде оно приобретает важный физический смысл.

**Пример 3.** *Пусть по проводнику с сопротивлением $R$ течет ток $i(t)$ с периодом $T$. Разложим его на гармоники:*

$$i(t) = I_0\cos\varphi_0 + \sum_{n=1}^{\infty} I_n \cos(\omega_n t + \varphi_n). \tag{7}$$

*Равенство Парсеваля для этого разложения после умножения на $R$ записывается как*

$$\frac{1}{T}\int_{0}^{T} i^2(t)\, R\, dt = I_0^2 R + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{I_n^2 R}{2}.$$

*Левая часть равенства представляет собой среднюю мощность тока $i(t)$ за период. Первое слагаемое $I_0^2 R$ в правой части является мощностью постоянной составляющей тока в формуле* (7)*, а остальные слагаемые $I_n^2 R/2$ равны средней мощности*

$$\frac{I_n^2 R}{T}\int_{0}^{T}\cos^2(\omega_n t + \varphi_n)\, dt$$

*гармонических компонент $I_n\cos(\omega_n t + \varphi_n)$ за период. Действительно,*

$$\frac{I_n^2 R}{T}\int_{0}^{T}\cos^2(\omega_n t + \varphi_n)\, dt = \frac{I_n^2 R}{2T}\int_{0}^{T}\left[1 + \cos(2\omega_n t + 2\varphi_n)\right] dt =$$

$$= \frac{I_n^2 R}{2T}\left[t + \frac{1}{2\omega_n}\sin(2\omega_n t + 2\varphi_n)\right]\Bigg|_0^T = \frac{I_n^2 R}{2}.$$

## Приложение

[1]) Все дальнейшие рассуждения будут относиться не к последовательности функций

$$1, \cos\frac{\pi t}{l}, \sin\frac{\pi t}{l}, \cos\frac{2\pi t}{l}, \sin\frac{2\pi t}{l}, \ldots, \cos\frac{k\pi t}{l}, \sin\frac{k\pi t}{l}, \ldots, \tag{П1}$$

а к последовательности

$$1, \cos t, \sin t, \cos 2t, \sin 2t, \ldots, \cos kt, \sin kt, \ldots,$$

которая получается из (П1) заменой $t \to lt/\pi$; при этом отрезок $[-l, l]$, на котором рассматривается последовательность (П1), заменяется отрезком $[-\pi, \pi]$. Затем полученные выводы можно перенести на последовательность (П1), сделав обратную замену $t \to \pi t/l$.

Прежде всего отметим, что для скалярного произведения двух функций $f$ и $g$ справедливо неравенство Коши-Буняковского:

$$(f, g)^2 \le (f, f) \cdot (g, g)\,. \tag{П2}$$

Доказывается этот факт с использованием свойств интеграла по той же схеме, что и для всякого евклидова пространства.

**Лемма П1.** *Для нормы функции справедливо неравенство треугольника*

$$\|f + g\| \le \|f\| + \|g\|\,. \tag{П3}$$

*Доказательство.* Перепишем неравенство Коши-Буняковского (П2) в виде

$$|(f, g)| \le \sqrt{(f, f)} \cdot \sqrt{(g, g)} = \|f\| \cdot \|g\|\,.$$

Используя это соотношение и свойства интеграла, получим

$$\|f + g\| = \sqrt{(f + g, f + g)} = \sqrt{\|f\|^2 + 2\,(f, g) + \|g\|^2} \le$$
$$\le \sqrt{\|f\|^2 + 2\,\|f\| \cdot \|g\| + \|g\|^2} = \sqrt{(\|f\| + \|g\|)^2} = \|f\| + \|g\|\,.$$

□

Теперь докажем следующее утверждение.

**Теорема П1.** *Если тригонометрический ряд Фурье кусочно непрерывной на отрезке* $[-\pi, \pi]$ *функции* $f(t)$ *сходится равномерно на* $[-\pi, \pi]$, *то он сходится на* $[-\pi, \pi]$ *именно к* $f(t)$.

*Доказательство.* Так как тригонометрический ряд Фурье сходится равномерно на $[-\pi, \pi]$, то в силу теоремы 1 он сходится на этом отрезке и в среднем. Пусть $S(t)$ — сумма этого ряда. Сходимость в среднем означает, что

$$\forall(\varepsilon > 0)\exists(N_1 \in \mathbf{N})\forall(n \ge N_1)\ \|S(t) - S_n(t)\| < \frac{\varepsilon}{2},$$

где $S_n(t)$ — частичная сумма тригонометрического ряда Фурье.

С другой стороны, из теоремы 2 следует, что последовательность частичных сумм $S_n(t)$ сходится к функции $f(t)$ в среднем. То есть справедливо, что

$$\forall(\varepsilon > 0)\exists(N_2 \in \mathbf{N})\forall(n \ge N_2)\ \|S_n(t) - f(t)\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Из двух последних неравенств и неравенства треугольника (П3) получим

$$\|S(t) - f(t)\| \leq \|S(t) - S_n(t)\| + \|S_n(t) - f(t)\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Произвольность $\varepsilon > 0$ позволяет сделать вывод, что $\|S(t) - f(t)\| = 0$. Если $f(t) \in F_{[-\pi,\pi]}$, то, как было доказано на предыдущей лекции, $S(t) \equiv f(t)$.

На той же лекции был упомянут другой подход, заключавшийся в отождествлении функций $f$ и $g$, для которых $\|f(t) - g(t)\| = 0$. В этом случае можно показать, что $S(t)$ и $f(t)$ представляют собой функции, отличающиеся друг от друга лишь в отдельных точках. □

Перейдем непосредственно к доказательству теоремы 3. Пусть $\alpha_n$ и $\beta_n$ — коэффициенты тригонометрического ряда Фурье для производной $f'(t)$. Применим к формулам вычисления коэффициентов Фурье для функции $f(t)$ интегрирование по частям:

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos kt\,dt = \left\langle u = f(t),\ dv = \cos kt\,dt,\ du = f'(t)\,dt,\ v = \frac{1}{k}\sin kt \right\rangle = \\ &= \frac{1}{k\pi} f(t)\sin kt\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{k\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(t)\sin kt\,dt = -\frac{1}{k\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(t)\sin kt\,dt, \\ b_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin kt\,dt = \left\langle u = f(t),\ dv = \sin kt\,dt,\ du = f'(t)\,dt,\ v = -\frac{1}{k}\cos kt \right\rangle = \\ &= -\frac{1}{k\pi} f(t)\cos kt\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{k\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(t)\cos kt\,dt = \frac{1}{k\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(t)\cos kt\,dt. \end{aligned}$$

Таким образом, справедливы равенства

$$a_k = -\frac{\beta_k}{k}, \quad b_k = \frac{\alpha_k}{k}. \tag{П4}$$

Здесь мы забежим немного вперед и воспользуемся неравенством Бесселя (5), оправдываясь тем, что вывод указанного неравенства никак не связан с доказываемыми сейчас утверждениями. Так вот из неравенства Бесселя следует, что ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k^2 + b_k^2\right) \tag{П5}$$

сходится, поскольку существует и конечен интеграл, стоящий в правой части неравенства. Последнее справедливо в силу того, что всякая кусочно гладкая функция ограничена и имеет ограниченную производную во всех точках, за исключением угловых точек и точек разрыва.

Примем во внимание соотношения

$$\left(|\alpha_k| - \frac{1}{k}\right)^2 = \alpha_k^2 - \frac{2|\alpha_k|}{k} + \frac{1}{k^2} \geq 0,$$
$$\left(|\beta_k| - \frac{1}{k}\right)^2 = \beta_k^2 - \frac{2|\beta_k|}{k} + \frac{1}{k^2} \geq 0,$$

из которых следует, что

$$\frac{|\alpha_k|}{k} + \frac{|\beta_k|}{k} \leq \frac{1}{2}(\alpha_k^2 + \beta_k^2) + \frac{1}{k^2}.$$

В правой части стоят члены сходящихся рядов (П5) и $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$, поэтому сходится и ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{|\alpha_k|}{k} + \frac{|\beta_k|}{k}\right).$$

Тогда в силу (П4) сходится ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} (|a_k| + |b_k|) \,. \tag{П6}$$

Следовательно, тригонометрический ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kt + b_k \sin kt)$$

сходится абсолютно и равномерно, поскольку мажорируется рядом (П6):

$$|a_k \cos kt + b_k \sin kt| \le |a_k \cos kt| + |b_k \sin kt| \le |a_k| + |b_k|.$$

Отсюда в силу теоремы П1 и получается заключение доказываемой теоремы.

## Литература

[1] Бугров Я.С., Никольский С.М. *Высшая математика. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного* . – М.: Наука, 1985, – с. 266-268, 271-275, 278-291.

[2] Письменный Д.Т. *Конспект лекций по высшей математике*. – М.: Рольф, 2000. Ч. 2. – с. 148.

[3] Толстов Г.П. *Ряды Фурье*. – М.: Физматгиз, 1960, – с. 30-35, 70-122.