Функциональные ряды

Волченко Ю.М.

Содержание лекции

Понятие функционального ряда. Его равномерная сходимость. Непрерывность суммы ряда. Почленное дифференцирование и интегрирование функциональных рядов.

Анимация понятия равномерной сходимости ряда.

Анимация работает только в программе Acrobat Reader!

26 ноября 2010 г.

1 Понятие функционального ряда

Функциональным называется ряд, составленный из функций:

$$u_1(z) + u_2(z) + \ldots + u_n(z) + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(z). \tag{1}$$

Если $z = x + jy$ — комплексная переменная, то общий член ряда $u_n(z)$ является комплексной функцией, и сам ряд (1) называется ***комплексным***, а если $y = 0$, то $z = x$ и ряд называется ***действительным***. В последнем случае его члены будем обозначать $u_n(x)$.

Если вместо z в функциональный ряд подставить конкретное число, он превратится в обычный числовой ряд, который может сходиться, а может и расходиться. Поэтому появляется новое понятие ***области сходимости*** функционального ряда — это множество значений аргумента z, при которых функциональный ряд сходится. Область сходимости будем обозначать $X_{\text{сх}}$. Иногда мы будем рассматривать ее подобласти: $X_{\text{а.сх}}$, $X_{\text{у.сх}}$ — области абсолютной и условной сходимостей ряда. Так как члены функционального ряда — функции, то частичная сумма ряда — тоже функция, которая обозначается $S_n(z)$. В области сходимости ряда функцией является и его сумма, которую будем обозначать $S(z)$.

Для определения области сходимости функционального ряда можно использовать рассмотренные ранее признаки сходимости числовых рядов.

Пример 1. *Найти область сходимости функционального ряда*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^x}.$$

Решение. 1) Пусть $x \leq 0$. В этом случае общий член ряда $(-1)^{n+1}n^{-x}$ для четных n неограниченно убывает, а для нечетных n — неограниченно возрастает. Следовательно, ряд расходится.

2) Пусть $0 < x \leq 1$. Составим ряд из модулей членов заданного ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}. \tag{2}$$

Мы знаем, что такой ряд при $x \leq 1$ расходится, следовательно, абсолютная сходимость у заданного ряда отсутствует. Однако он сходится по признаку Лейбница, так как модули его членов убывают и общий член стремится к нулю:

$$\frac{1}{n^x} > \frac{1}{(n+1)^x}, \quad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^x} = 0.$$

Это означает, что заданный ряд в этом случае сходится условно.

3) Пусть $x > 1$. Теперь ряд (2) сходится, и, значит, заданный ряд сходится абсолютно.

Получили следующие области сходимости:

$$X_{\text{сх}} = (0;\infty),\ X_{\text{а.сх}} = (1;\infty),\ X_{\text{у.сх}} = (0;1].$$

2 Равномерная сходимость

В теории рядов возникает вопрос, имеющий и прикладное значение, о том, переносятся ли свойства функций, являющихся членами сходящегося функционального ряда на их сумму. В частности, будет ли сумма непрерывной, если члены ряда — непрерывные функции? Примеры различных сходящихся рядов показывают, что в одних случаях непрерывность членов ряда наследуется его суммой, а в других – нет. Таким образом, только сходимости ряда недостаточно, чтобы гарантировать такую преемственность. Условие, обеспечивающее свойства суммы ряда, не худшие, чем свойства его членов, носит название равномерной сходимости ряда и формулируется следующим образом. Говорят, что функциональный ряд (1) ***сходится равномерно*** на множестве G, если

$$\forall(\varepsilon > 0)\ \exists(N \in \mathbf{N})\ \forall(n \geq N)\ \forall(z \in G)\ |S_n(z) - S(z)| < \varepsilon. \tag{3}$$

Равномерную сходимость поясняет анимация рис. 1. Так как неравенство в определении (3) можно представить в виде

$$S(x) - \varepsilon < S_n(x) < S(x) - \varepsilon,$$

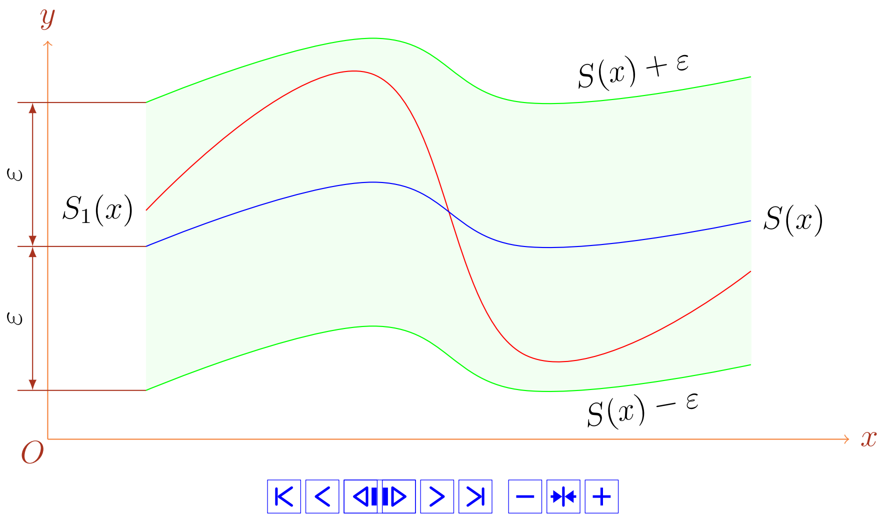


Рис. 1. Равномерная сходимость.

то равномерная сходимость означает, что, начиная с некоторого номера N, все частичные суммы $S_n(x)$ будут находиться внутри «ε-коридора», образованного функциями $S(x)-\varepsilon$ и $S(x)+\varepsilon$. Поскольку ε может быть как угодно малым, то, неограниченно уменьшая его, можно видеть как (для все бо́льших номеров n) частичные суммы $S_n(x)$ все плотнее прилегают к предельной функции $S(x)$.

Определение обычной сходимости от равномерной отличается отсутствием фрагмента $\forall(z \in G)$, входящего в определение (3). Следовательно, *если ряд сходится равномерно, то он сходится*. Обратное неверно, как демонстрирует следующий пример, показывающий также и то, что неравномерно сходящийся ряд с непрерывными членами может сходиться к разрывной функции.

Пример 2. *Исследовать на отрезке* $[0;1]$ *равномерную сходимость ряда*

$$x-(x-x^2)-(x^2-x^3)-(x^3-x^4)-\ldots-(x^{n-1}-x^n)-\ldots$$

имеющего членами непрерывные функции

$$u_1(x)=x,\ u_n(x)=x^{n-1}-x^n, n\geq 2.$$

Решение. Этот ряд на отрезке $[0;1]$ сходится, так как

$$S_n(x)=x^n,\ S(x)=\lim_{n\to\infty}S_n(x)=\begin{cases}1, & x=1;\\ 0, & x\neq 1.\end{cases}$$

Сходимость частичных сумм показана на анимационном рис. 2. Предельная функция $S(x)$ изображена жирной синей стрелкой, лежащая на оси Ox, и точкой $(1;1)$. Нетрудно видеть, что скорость сходимости частичных сумм к сумме ряда не одинакова для различных точек отрезка $[0;1]$: чем дальше x от 0, тем ниже скорость сходимости (за исключением точки $x=1$). Это различие в скорости сходимости существенно, оно приводит к тому, что предельная функция — сумма ряда — терпит разрыв при $x=1$. Равномерная сходимость отсутствует, так как из «ε-коридора» (зеленоватая область) все частичные суммы выходят, чтобы попасть в точку $(1;1)$.

Интересно отметить, что на любом отрезке $[0, q]$, $0 < q < 1$, данный ряд сходится равномерно, так как каждый раз, когда «ε-коридор» сужается, находится частичная сумма с бóльшим номером, которая полностью попадает в этот коридор на отрезке $[0, q]$. $\square$

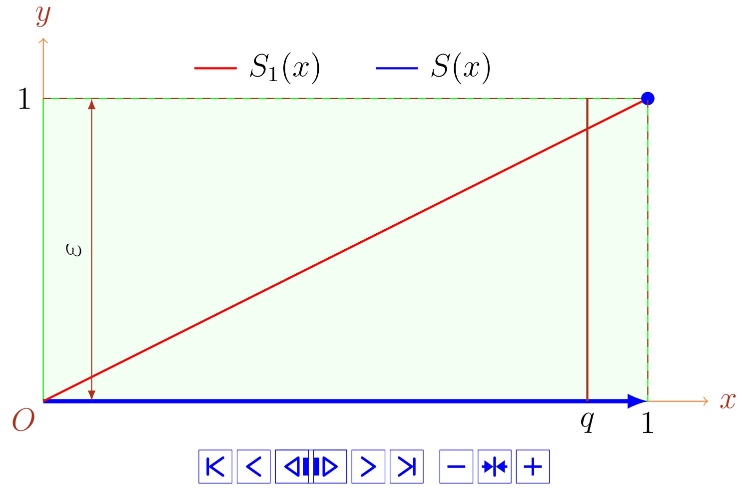


Рис. 2. Неравномерная сходимость.

Для сходящегося ряда его сумму будем записывать как $S(z) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(z)$, и пусть $S_n(z)$ — его частичная сумма. Так как отбрасывание конечного числа членов ряда не влияет на его сходимость, то ряд $\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(z)$ тоже сходится. Его сумму обозначим $S^*(z) = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(z)$, а m-ю частичную сумму — $S_m^*(z) = \sum_{k=n+1}^{m} u_k(z)$. Очевидно, что

$$S_m(z) - S_m^*(z) = \sum_{k=1}^{m} u_k(z) - \sum_{k=n+1}^{m} u_k(z) = \sum_{k=1}^{n} u_k(z).$$

Переходя к пределу при $m \to \infty$, получим, что $S(z) - S^*(z) = \sum_{k=1}^{n} u_k(z)$ и тогда можно записать

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(z) - \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(z) = \sum_{k=1}^{n} u_k(z). \tag{4}$$

Слагаемые в этом равенстве можно переставлять, а суммы переносить из одной части равенства в другую по обычным алгебраическим правилам, так как это можно делать с соответствующими частичными суммами.

Используя (4), утверждение (3) можно переписать в виде

$$\forall(\varepsilon > 0)\ \exists(N \in \mathbf{N})\ \forall(n \geq N)\ \forall(z \in G)\ \left|\sum_{k=1}^{n} u_k(z) - \sum_{k=1}^{\infty} u_k(z)\right| < \varepsilon,$$

или

$$\forall(\varepsilon > 0)\ \exists(N \in \mathbf{N})\ \forall(n \geq N)\ \forall(z \in G)\ |r_n(z)| < \varepsilon, \tag{5}$$

где $r_n(z) = S(z) - S_n(z) = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(z)$ называется ***n-м остатком*** функционального ряда.

Наличие у функционального ряда равномерной сходимости позволяет перенести на сумму ряда некоторые свойства ее членов.

3 Непрерывность суммы ряда

Прежде всего отметим, что проверить, сходится ли функциональный ряд равномерно, пользуясь определением равномерной сходимости, довольно сложно. К счастью, существует теорема, позволяющая упростить такую проверку.

Теорема 1. *Если, начиная с некоторого номера N, члены функционального ряда* (1) *в области G удовлетворяют неравенствам*

$$|u_n(z)| \le \alpha_n,$$

где α_n — члены сходящегося ряда с положительными членами, то ряд (1) *в области G сходится абсолютно и равномерно.*

Доказательство приведено в Приложении[1)].

Как мы видели на примере, простая сходимость функционального ряда не гарантирует непрерывности ряда, состоящего из непрерывных членов. Следующая теорема показывает, что сходимость должна быть равномерной.

Теорема 2. *Если члены функционального ряда непрерывны в области G, и ряд сходится равномерно в этой области, то его сумма является непрерывной в G функцией.*

Доказательство см. в Приложении[2)].

Для действительного функционального ряда в качестве области G обычно берут отрезок $[a, b]$.

4 Почленное дифференцирование и интегрирование

Теорема 3. *Пусть члены ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ непрерывны на кривой $\mathcal{L}$ и ряд на $\mathcal{L}$ равномерно сходится к $S(z)$. Тогда интеграл от суммы такого ряда равен сумме ряда, составленного из интегралов от членов исходного ряда:*

$$\int\limits_{\mathcal{L}} S(z)\,dz = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{\mathcal{L}} u_n(z)\,dz, \tag{6}$$

Доказательство дано в Приложении[3)].

Замечание 1. *Равенство* (6) *можно переписать в виде:*

$$\boxed{\int\limits_{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)\,dz = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{\mathcal{L}} u_n(z)\,dz,}$$

так что в случае равномерно сходящегося ряда знаки суммы и интеграла перестановочны. Говорят также, что функциональный ряд можно ***почленно интегрировать****.*

Поскольку комплексный интеграл превращается в действительный, если действительна подынтегральная функция, а кривая $\mathcal{L}$ представляет собой отрезок на оси абсцисс, то следствием рассмотренной теоремы является аналогичная теорема для рядов с действительными членами.

Теорема 4. *Если действительный ряд из непрерывных на отрезке* $[a, b]$ *функций*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \tag{7}$$

равномерно сходится на этом отрезке, то его можно почленно интегрировать:

$$\boxed{\int_{\alpha}^{x} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)\,dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\alpha}^{x} u_n(t)\,dt,}$$

$\alpha, x \in [a, b]$.

Пример 3. *Исследовать на возможность почленного интегрирования ряд*

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n.$$

Решение. Данный ряд представляет собой геометрическую прогрессию, которая, как известно, сходится при $|x| < 1$, и тогда ее сумма равна

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n. \tag{8}$$

На любом отрезке вида $[-q, q]$, $q < 1$, ряд (8) по теореме 1 сходится равномерно, так как выполняется условие $|x|^n < q^n$, а ряд $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ сходится. Поэтому в интервале $(-1; 1)$ ряд (8) можно интегрировать почленно.

Например, при $x \in (-1;1)$

$$\int_0^x \frac{1}{1+t}\,dt = \ln(1+x) = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^n\,dt = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \int_0^x t^n\,dt =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \left.\frac{t^{n+1}}{n+1}\right|_0^x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

И мы получаем представление логарифма в виде ряда:

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad |x|<1.$$

□

Для функциональных рядов с комплексными членами справедливо следующее утверждение.

Теорема 5 (Вейерштрасса). *Если члены функционального ряда*

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(z) \tag{9}$$

представляют собой аналитические в области D функции и ряд в этой области сходится равномерно, то а) сумма ряда является аналитической функцией; б) функциональный ряд можно ***почленно дифференцировать*** *сколько угодно раз, то есть справедливо равенство*

$$\boxed{\left(\sum_{k=1}^{\infty} u_k(z)\right)^{(n)} = \sum_{k=1}^{\infty} u_k^{(n)}(z).}$$

Доказательство приведено в Приложении[4)].

Для почленного дифференцирования действительных рядов требуется равномерная сходимость не самого функционального ряда, а ряда, составленного из производных его членов.

Теорема 6. *Пусть ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) \tag{10}$$

с действительными членами из функций, имеющих непрерывную производную на отрезке $[a,b]$, сходится на этом отрезке, а ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k'(x), \tag{11}$$

составленный из производных его членов, равномерно сходится на этом отрезке. Тогда ряд (10) *можно почленно дифференцировать.*

Доказательство дано в Приложении[5)].

Пример 4. *Показать, что функция*

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k^3}$$

непрерывна и имеет непрерывную производную на всей числовой оси.

Решение. Заданный ряд мажорируется сходящимся числовым рядом с положительными членами $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3}$, поэтому по теореме 1 он сходится равномерно и абсолютно на всей числовой оси. Тогда из теоремы 2 следует, что его сумма $f(x)$ непрерывна.

Ряд, составленный из производных членов заданного ряда,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^2} \tag{12}$$

мажорируется сходящимся рядом $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ и, таким образом, тоже равномерно сходится, а его сумма в силу теоремы 2 непрерывна. Применяя теорему 6, получим

$$f'(x) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k^3} \right)' = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\sin kx}{k^3} \right)' = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^2},$$

следовательно, $f'(x)$ как сумма ряда (12) непрерывна.

Замечание 2. *Равномерная сходимость ряда из производных существенна, так как ее отсутствие может привести к тому, что ряд нельзя будет почленно дифференцировать. Примером служит ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n^4 x}{n^2}. \tag{13}$$

Поскольку

$$\left| \frac{\sin n^4 x}{n^2} \right| \le \frac{1}{n^2},$$

то в силу сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ *и признака сравнения рядов ряд* (13) *сходится. Составим ряд из производных членов этого ряда:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \cos n^4 x.$$

При $x = 0$ *такой ряд расходится, превращаясь в расходящийся числовой ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} n^2$*, общий член которого не стремится к нулю.*

Приложение

[1)]Вначале отметим, что для абсолютно сходящихся рядов с комплексными членами справедливо неравенство

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} u_k\right| \le \sum_{k=1}^{\infty} |u_k|. \tag{П1}$$

Действительно, для частичных сумм этих рядов такое неравенство справедливо:

$$\left|\sum_{k=1}^{n} u_k\right| \le \sum_{k=1}^{n} |u_k|.$$

Переходя к пределу при $n \to \infty$, получим (П1).

Докажем теорему 1. Абсолютная сходимость ряда вытекает из признака сравнения рядов.

Далее, так как ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ сходится, то

$$\forall(\varepsilon > 0)\ \exists(N \in \mathbf{N})\ \forall(n \ge N)\ \ |\sigma - \sigma_n| = \sum_{k=n+1}^{\infty} \alpha_k < \varepsilon,$$

где σ, σ_n — сумма и частичная суммы ряда $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$. Используя свойство (П1) и условие теоремы, можно выписать цепочку соотношений:

$$|r_n(z)| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(z)\right| \le \sum_{k=n+1}^{\infty} |u_k(z)| \le \sum_{k=n+1}^{\infty} \alpha_k < \varepsilon.$$

Следовательно, на основании (5) можно утверждать, что ряд (1) равномерно сходится.

[2)] Обозначим $S_n(z)$ — частичную сумму ряда (1) и $S(z)$ — его сумму. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и подберем натуральное N таким, чтобы выполнялось неравенство

$$|S(z) - S_N(z)| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{П2}$$

для всех $z \in G$ (в силу равномерной сходимости функционального ряда это возможно).

Возьмем во множестве G произвольную точку z_0 и рассмотрим еще одно неравенство:

$$\begin{aligned} |S(z) - S(z_0)| \le |S(z) - S_N(z)| + |S_N(z) - S_N(z_0)| + |S_N(z_0) - S(z_0)| \le \\ \le \frac{2\varepsilon}{3} + |S_N(z) - S_N(z_0)|\,, \end{aligned} \tag{П3}$$

которое справедливо в силу неравенства (П2). Последний оставшийся модуль тоже может быть сделан меньше $\varepsilon/3$, так как функция $S_N(z)$ непрерывна в области G как сумма непрерывных (по условию теоремы) членов ряда. Следовательно, число N можно взять настолько большим, чтобы в точке z_0 выполнялось неравенство $|S_N(z) - S_N(z_0)| < \varepsilon/3$. Тогда из неравенства (П3) получим, что

$$|S(z) - S(z_0)| \le \varepsilon,$$

что и доказывает теорему.

[3)] Поскольку в силу теоремы 2 функция $S(z)$ непрерывна, то интеграл в левой части равенства (6) существует. Обозначим σ_n частичную сумму ряда в правой части (6). Тогда

$$\begin{aligned} \left|\int_{\mathcal{L}} S(z)\,dz - \sigma_n\right| = \left|\int_{\mathcal{L}} S(z)\,dz - \sum_{k=1}^{n}\int_{\mathcal{L}} u_k(z)\,dz\right| = \left|\int_{\mathcal{L}} S(z)\,dz - \int_{\mathcal{L}}\sum_{k=1}^{n} u_k(z)\,dz\right| \le \\ \le \int_{\mathcal{L}} |S(z) - S_n(z)|\ dz = \int_{\mathcal{L}} |r_n(z)|\ dl, \end{aligned} \tag{П4}$$

где $S_n(z)$ — частичная сумма ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$, $r_n(z)$ — его остаток, dl — дифференциал дуги, а последнее выражение, с криволинейным интегралом I рода, есть одно из свойств комплексного интеграла[†]. Так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ на $\mathcal{L}$ сходится равномерно, то справедливо (5) и поэтому из (П4) следует, что

$$\left| \int\limits_{\mathcal{L}} S(z)\,dz - \sigma_n \right| \leq \int\limits_{\mathcal{L}} |r_n(z)|\,dl < \varepsilon l,$$

где l — длина дуги $\mathcal{L}$. Это и значит, что $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \int\limits_{\mathcal{L}} S(z)\,dz$.

4) Сначала познакомимся со следующим утверждением.

Теорема П1. *Если комплексный ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(z) \tag{П5}$$

в области D сходится равномерно, то и ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varphi(z) u_k(z), \tag{П6}$$

где $\varphi(z)$ — ограниченная в D функция, также сходится в области D равномерно.

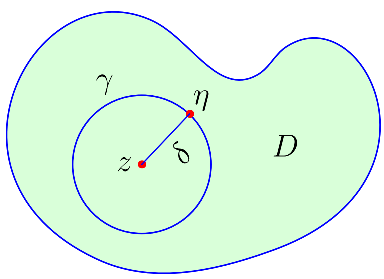
Доказательство. Опуская тривиальный случай $\varphi(z) \equiv 0$, заметим, что в силу ограниченности $\varphi(z)$ в области D выполняется неравенство $|\varphi(z)| \leq M$, $M \neq \infty$, $M \neq 0$. Так как ряд (П5) сходится равномерно, то

$$\forall(\varepsilon > 0)\ \exists(N \in \mathbf{N})\ \forall(n \geq N)\ \forall(z \in D)\ \ |r_n(z)| < \frac{\varepsilon}{M}.$$

Но тогда для остатка $r_n^*(z)$ ряда (П6) при всех $n \geq N$ и для всех $z \in D$ выполняется

$$|r_n^*(z)| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \varphi(z) u_k(z) \right| = |\varphi(z)||r_n(z)| \leq M|r_n(z)| < M\,\frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon.$$

Это означает равномерную сходимость ряда (П6). □



Теперь докажем утверждение теоремы 5.

а) Построим на комплексной плоскости круг такого радиуса δ с центром в точке z, чтобы он полностью помещался в области D. Обозначим границу круга γ и пусть $\eta \in \gamma$.

Поскольку ряд (9) равномерно сходится в D к сумме $S(z)$, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(\eta)$ равномерно сходится на γ. Функция $\frac{1}{\eta - z}$ ограничена на γ, так как $|\eta - z| = \delta$, следовательно, по теореме П1 ряд

$$\frac{S(\eta)}{\eta - z} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{u_k(\eta)}{\eta - z}$$

тоже равномерно сходится на γ. По теореме 3 его можно почленно интегрировать по формуле (6):

$$\frac{1}{2\pi j} \int\limits_{\gamma} \frac{S(\eta)}{\eta - z}\,d\eta = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi j} \int\limits_{\gamma} \frac{u_k(\eta)}{\eta - z}\,d\eta.$$

[†] Лекция «Комплексный интеграл».

Используя интегральную формулу Коши, получим

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(z) = S(z) = \frac{1}{2\pi j} \int\limits_{\gamma} \frac{S(\eta)}{\eta - z}\, d\eta.$$

Последнее равенство означает, что функция $S(z)$ представляется интегралом типа Коши. Поскольку в силу равномерной сходимости ряда (9) она по теореме 2 непрерывна, то из ее представления интегралом типа Коши следует ее аналитичность.

б) Выполним на комплексной плоскости те же геометрические построения, что и в п. а), и рассмотрим ряд

$$\frac{S(\eta)}{(\eta - z)^{n+1}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{u_k(\eta)}{(\eta - z)^{n+1}}.$$

По той же причине, что и в предыдущем п., этот ряд равномерно сходится на γ и его можно почленно интегрировать:

$$\frac{n!}{2\pi j} \int\limits_{\gamma} \frac{S(\eta)}{(\eta - z)^{n+1}}\, d\eta = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{n!}{2\pi j} \int\limits_{\gamma} \frac{u_k(\eta)}{(\eta - z)^{n+1}}\, d\eta.$$

Используя результаты заключительной части лекции «Комплексный интеграл», получим, что

$$S^{(n)}(z) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k^{(n)}(z),$$

то есть ряд (9) можно почленно дифференцировать.

[5]) Так как ряд (11) сходится на $[a, b]$ равномерно, а его члены — непрерывные функции, то его сумма по теореме 2 непрерывна. По теореме 4 такой ряд можно почленно проинтегрировать:

$$\int_{\alpha}^{x} \sum_{k=1}^{\infty} u_k'(t)\, dt = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\alpha}^{x} u_k'(t)\, dt.$$

Используя теорему Ньютона-Лейбница и тот факт, что сходящиеся ряды можно вычитать, получим

$$\int_{\alpha}^{x} \sum_{k=1}^{\infty} u_k'(t)\, dt = \sum_{k=1}^{\infty} [u_k(x) - u_k(\alpha)] = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) - \sum_{k=1}^{\infty} u_k(\alpha) = S(x) - S(\alpha), \quad x, \alpha \in [a, b],$$

где $S(x)$ — сумма ряда (10). Дифференцируя по x, приходим к требуемому равенству

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k'(x) = S'(x) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) \right)'.$$

Литература

[1] Бугров Я.С., Никольский С.М. *Дифференциальное и интегральное исчисление.* – М.: Наука, 1984, – с. 379-391.

[2] Свешников А.Г., Тихонов А.Н. *Теория функций комплексной переменной.* — М.: Наука, 1970, – с. 57-64.