Числовые ряды

Волченко Ю.М.

Содержание лекции

Геометрическая прогрессия. Понятие ряда, его суммы и сходимости. Необходимый признак сходимости ряда. Действия над сходящимися рядами. Остаток ряда.

31 октября 2015 г.

1 Введение

Уже в глубокой древности математикам приходилось иметь дело с рядами. Сначала они появились в арифметике и элементарной алгебре, а затем перебрались в высшие разделы точных наук. Например, бесконечную периодическую дробь можно записать в виде

$$0{,}111\ldots = \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^2} + \cdots . \tag{1}$$

Правая часть этого равенства представляет собой сумму бесконечной геометрической прогрессии, известной со школьной скамьи. Эта прогрессия и является примером ряда. Напомню, что ***конечной геометрической прогрессией*** называют последовательность вида

$$a, aq, aq^2, \ldots, aq^n,$$

где a — ***первый член*** прогрессии, а q — ее ***знаменатель***. Выражение

$$S_n = a + aq + aq^2 + \ldots + aq^n \tag{2}$$

называется ***суммой*** конечной геометрической прогрессии. Чтобы получить формулу, удобную для вычисления S_n, равенство (2) умножают на q:

$$qS_n = aq + aq^2 + aq^3 + \ldots + aq^{n+1},$$

а затем результат вычитают из равенства (2):

$$S_n(1-q) = a - aq^{n+1}.$$

Выразив отсюда S_n через a и q, приходят к формуле суммы конечной геометрической прогрессии:

$$S_n = \frac{a\left(1-q^{n+1}\right)}{1-q}. \tag{3}$$

Как видно из примера (1), возникает необходимость и в вычислении суммы ***бесконечной геометрической прогрессии***

$$a, aq, aq^2, \ldots, aq^n, \ldots .$$

Суммой S такой прогрессии считают предел суммы конечной геометрической прогрессии при $n \to \infty$, если он существует. Пусть a и $q = |z|(\cos\varphi + j\sin\varphi)$ - в общем случае комплексные числа. Тогда $q^n = |z|^n(\cos n\varphi + j\sin n\varphi)$ и ясно, что $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$ при $|q| < 1$ и этот же предел не существует или равен ∞ при $|q| \geq 1$. Предполагая, что $|q| < 1$ и переходя к пределу при $n \to \infty$ в формуле (3), найдем, что

$$S = \frac{a}{1-q}.$$

Полученный результат дает основание записать число (1) в виде обыкновенной дроби:

$$0{,}111\ldots = \frac{1/10}{1-1/10} = \frac{1}{9}.$$

2 Ряд, его сумма и сходимость

Понятие ряда обобщает понятие прогрессии. ***Числовым рядом*** называется выражение

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n, \tag{4}$$

где u_1, u_2, …, u_n, … называются ***членами*** ряда, а слагаемое $u_n \in \mathbb{C}$ − ***общим*** или ***n-м*** членом ряда.

Выражение

$$S_n = u_1 + \ldots + u_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$$

называется ***n-й частичной суммой*** ряда (4). Если последовательность S_1, S_2, …, S_n, … частичных сумм этого ряда имеет конечный предел

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n,$$

то говорят, что ряд (4) ***сходится***, а число S называют его ***суммой***. В противном случае говорят, что ряд (4) ***расходится***.

Теорема 1. *Пусть $u_n = x_n + jy_n$. Тогда для сходимости ряда (4) необходимо и достаточно, чтобы сходились ряды с вещественными членами*

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n \textit{ и } \sum_{n=1}^{\infty} y_n.$$

Доказательство. Пусть $S_n = \sigma_n + j\tau_n \in \mathbb{C}$ – частичная сумма ряда (4), где σ_n, τ_n – частичные суммы рядов $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ соответственно. Заключение теоремы следует из того, что последовательность S_n сходится тогда и только тогда, когда сходятся обе последовательности σ_n и τ_n†. □

Иногда сумму ряда можно найти, используя искусственные приемы, как, например, была найдена сумма бесконечной геометрической прогрессии.

Пример 1. *Существует ли сумма ряда*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)?$$

Решение. Общий член ряда равен $u_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \ln(1+n) - \ln n$, а его n-я частичная сумма будет такой:

$$S_n = [\ln(1+n) - \cancel{\ln n}] + [\cancel{\ln n} - \cancel{\ln(n-1)}] + \ldots + [\cancel{\ln 3} - \cancel{\ln 2}] + \cancel{\ln 2} = \ln(1+n).$$

Поскольку $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \ln(1+n) = \infty$, то данный ряд расходится и суммы не имеет.

Пример 2. *Найти сумму ряда*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + n - 1 + j(2n+1)}.$$

Решение. Преобразуем общий член ряда:

$$u_n = \frac{1}{n^2 + n - 1 + j(2n+1)} = \frac{1}{n^2 + 2nj - 1 + n + j} = \frac{1}{(n+j)^2 + n + j} = \\ = \frac{1}{(n+j)(n+j+1)}.$$

Разложим полученную дробь на сумму простейших дробей:

$$\frac{1}{(n+j)(n+j+1)} = \frac{A}{n+j}^{\backslash n+j+1} + \frac{B}{n+j+1}^{\backslash n+j}.$$

$$\begin{array}{l|l} n = -j & A = 1 \\ n = -j - 1 & -B = 1 \end{array}$$

†Лекция «Предел и производная комплексной функции».

Таким образом,

$$u_n = \frac{1}{n+j} - \frac{1}{n+j+1},$$

а частичная сумма ряда оказывается такой:

$$S_n = \underline{\frac{1}{1+j} - \cancel{\frac{1}{2+j}}} + \underline{\cancel{\frac{1}{2+j}} - \cancel{\frac{1}{3+j}}} + \underline{\cancel{\frac{1}{3+j}}} - \ldots - \underline{\cancel{\frac{1}{n+j}}} +$$
$$+ \underline{\cancel{\frac{1}{n+j}} - \frac{1}{n+j+1}} = \frac{1}{1+j} - \frac{1}{n+j+1}.$$

Переходя к пределу, находим сумму ряда:

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1+j} - \frac{1}{n+j+1}\right) = \frac{1}{1+j}.$$

□

Впрочем, в теории рядов более важным является установление факта сходимости ряда, а не вычисление суммы, к которой он сходится.

Теорема 2 (Необходимый признак сходимости ряда)**.** *Если ряд* (4) *сходится, то предел его общего члена равен нулю:*

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0. \tag{5}$$

Доказательство. Если ряд (4) сходится, то предел $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ существует и конечен. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0.$$

Следствие 1. *Если условие* (5) *не выполняется, то ряд* (4) *расходится.*

Пример 3. *Доказать, что ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n+1}{4n+1}$$

расходится.

Решение. Действительно, найдем предел его общего члена:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{5n+1}{4n+1} = \frac{5}{4} > 0.$$

Замечание 1. *Если условие* (5) *выполняется, это не обязательно значит, что ряд* (4) *сходится. В примере 1 предел общего члена ряда равен нулю:* $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \ln 1 = 0$*, но, как было показано, ряд расходится.*

Пример 4. *Доказать, что* ***гармонический ряд***

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

расходится.

Решение. Докажем методом математической индукции, что частичные суммы заданного ряда подчиняются неравенствам

$$S_{2^n}\geq 1+n\cdot\frac{1}{2}. \tag{6}$$

Для $n=1$ это справедливо:

$$S_{2^1}=1+\frac{1}{2}=1+1\cdot\frac{1}{2}.$$

Покажем, что выполнение неравенства (6) для некоторого n, влечет его выполнение и для $n+1$. Действительно,

$$\begin{aligned}S_{2^{n+1}}&=S_{2^n}+\left(\frac{1}{2^n+1}+\cdots+\frac{1}{2^n+2^n}\right)=S_{2^n}+\left(\frac{1}{2^n+1}+\cdots+\frac{1}{2^{n+1}}\right)\geq\\&\geq S_{2^n}+\underbrace{\frac{1}{2^{n+1}}+\cdots+\frac{1}{2^{n+1}}}_{2^n}=1+n\cdot\frac{1}{2}+\frac{2^n}{2^{n+1}}=1+(n+1)\cdot\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Таким образом, $\lim_{n\to\infty}S_{2^n}\geq\lim_{n\to\infty}\left(1+n\cdot\frac{1}{2}\right)=\infty$ и, значит, $\lim_{n\to\infty}S_n=\infty$.

Гармонический ряд расходится, однако, предел общего члена этого ряда, очевидно, равен нулю.

3 Действия над рядами

Сходящиеся ряды можно складывать и умножать на число. Допустимость этих действий формулируется в следующем утверждении.

Теорема 3. *Пусть ряды*

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n,\qquad\sum_{n=1}^{\infty}v_n$$

сходятся и их суммы равны, соответственно, S и σ. Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n+\sum_{n=1}^{\infty}v_n=S+\sigma,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(cu_n)=c\sum_{n=1}^{\infty}u_n=cS.$$

Доказательство. Обозначим частичные суммы рядов:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_n,\ \sigma_n = \sum_{k=1}^{n} v_n.$$

Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n + v_n) = \lim_{n\to\infty}(S_n + \sigma_n) = \lim_{n\to\infty} S_n + \lim_{n\to\infty}\sigma_n =$$

$$= S + \sigma = \sum_{n=1}^{\infty} u_n + \sum_{n=1}^{\infty} v_n.$$

Второе равенство доказывается аналогично:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(cS_n) = \lim_{k\to\infty}(cS_n) = c\lim_{k\to\infty} S_n = cS = c\sum_{n=1}^{\infty} S_n.$$

Пример 5. *Исследовать на сходимость ряд*

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[\left(\frac{j}{2}\right)^n + \frac{1}{3^n}\right].$$

Решение. Ряды

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{j}{2}\right)^n, \qquad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3^n}$$

сходятся как бесконечные геометрические прогрессии со знаменателями, модули которых меньше 1:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{j}{2}\right)^n = \frac{1}{1-j/2} = \frac{2}{2-j} = \frac{2\,(2+j)}{5} = \frac{4}{5} + \frac{2}{5}\,j,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3^n} = \frac{1}{1-1/3} = \frac{3}{2}.$$

Тогда в соответствии с доказанной теоремой сходится и заданный ряд и его сумма равна

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[\left(\frac{j}{2}\right)^n + \frac{1}{3^n}\right] = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{j}{2}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3^n} = \frac{4}{5} + \frac{2}{5}\,j + \frac{3}{2} = \frac{23}{10} + \frac{2}{5}\,j.$$

$\square$

Важным для понимания сходимости является следующее утверждение.

Теорема 4. *На сходимость ряда не влияет отбрасывание конечного числа его членов или добавление к нему конечного числа новых членов.*

Доказательство. Удалим из ряда (4) k произвольных его членов. Пусть S_n — частичная сумма ряда (4), c_k— сумма отброшенных его членов, σ_{n-k} — сумма членов ряда, входящих в S_n, но не входящих в c_k. При достаточно большом n выполняется равенство $S_n = \sigma_{n-k} + c_k$ и, значит,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sigma_{n-k} + c_k.$$

Таким образом, пределы S_n и σ_{n-k} конечны и существуют или не существуют одновременно. Следовательно, ряд (4) и ряд, полученный из него отбрасыванием конечного числа членов, сходятся или расходятся одновременно.

Добавим теперь к ряду (4) конечное число новых членов. Тогда из полученного ряда ряд (4) может быть сформирован удалением добавленных к нему членов. Значит, по доказанному в первой половине доказательства новый ряд и ряд (4) сходятся или расходятся одновременно. □

Ряд

$$r_n = \sum_{m=n+1}^{\infty} u_m,$$

полученный отбрасыванием первых n членов ряда (4), называется ***n-м остатком*** ряда. Доказанная теорема позволяет сформулировать

Следствие 2. *Ряд* (4) *сходится тогда и только тогда, когда сходится любой из его остатков.*

Литература

[1] Бугров Я.С., Никольский С.М. *Дифференциальное и интегральное исчисление.* – М.: Наука, 1984, – с. 365-367, 370-371.

[2] Письменный Д.Т. *Конспект лекций по высшей математике.* – М.: Рольф, 2000. Ч. 2. – с. 109–114.