Ряды с положительными членами

Волченко Ю.М.

Содержание лекции

Признаки сравнения рядов с положительными членами. Достаточные признаки сходимости рядов с положительными членами: признаки Даламбера, Коши, интегральный признак Коши.

1 ноября 2015 г.

1 Признаки сравнения

Основой исследования рядов самых разных типов являются признаки сходимости рядов, все члены которых неотрицательны. Рассмотрим такие ряды, то есть будем считать, что $u_n \in \mathbb{R}$ и $u_n \geq 0$.

Теорема 1 (Признак сравнения). *Пусть имеются два ряда*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \ u_n \geq 0; \tag{1}$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n, \ v_n \geq 0; \tag{2}$$

причем

$$u_n \leq v_n, \tag{3}$$

$n = 1, 2, \ldots$. *Тогда, если ряд* (2)*, то сходится и ряд* (1)*. Если ряд* (1) *расходится, то расходится и ряд* (2)*.*

Доказательство. Обозначим $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$ частичную сумму ряда (1) и $\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} v_k$ – частичную сумму ряда (2). Пусть ряд (2) сходится к своей сумме $\sigma = \lim_{n\to\infty} \sigma_n$. В силу неравенства (3) и того, что частичная сумма ряда с неотрицательными членами не убывает, выполняется следующее двойное неравенство:

$$S_n \leq \sigma_n \leq \sigma. \tag{4}$$

Таким образом, частичная сумма S_n не убывает и ограничена сверху, следовательно, имеет конечный предел. Значит, ряд (1) сходится.

Пусть теперь ряд (1) расходится. Тогда частичная сумма S_n неограниченно возрастает и в силу первой части двойного неравенства (4) частичная сумма σ_n тоже неограниченно возрастает. Значит, ряд (2) расходится.

Замечание 1. *При выполнении неравенства* (3) *говорят, что ряд* (1) ***мажорируется*** *рядом* (2), *а ряд* (2) ***мажорирует*** *ряд* (1).

Пример 1. *Исследовать на сходимость ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2+\cos n)\, 2^n}.$$

Решение. Данный ряд сходится, так как мажорируется рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$:

$$\frac{1}{(2+\cos n)\, 2^n} \leq \frac{1}{2^n},$$

который сходится как геометрическая прогрессия со знаменателем, меньшим 1.

Пример 2. *Исследовать на сходимость ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Решение. Данный ряд мажорирует гармонический ряд:

$$\frac{1}{n} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Последний расходится, значит, расходится и заданный ряд.

Теорема 2 (Предельный признак сравнения). *Пусть имеются два ряда* (1) *и* (2), *причем*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = K,\ 0 < K < \infty. \tag{5}$$

Тогда ряды (1) *и* (2) *сходятся или расходятся одновременно.*

Доказательство. В силу (5) отношение u_n/v_n при достаточно больших n должно быть близко к K, т. е. должно, например, выполняться неравенство $\frac{1}{2}K < \frac{u_n}{v_n} < 2K$, или

$$\frac{1}{2}\, K v_n < u_n < 2K v_n. \tag{6}$$

Используя это неравенство и предыдущую теорему, можно утверждать следующее. Если ряд (2) сходится, то сходится и ряд, полученный из него умножением на константу[†], то есть ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(2Kv_n)$. Тогда из правой части неравенства (6) и теоремы 1 следует сходимость ряда (1).

Если же ряд (2) расходится, то расходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}Kv_n\right)$ (если бы он сходился, то сходился бы и ряд (2)). Тогда из левой части неравенства (6) и теоремы 1 получаем расходимость ряда (1).

Так как ряды (1) и (2) входят в формулировку теоремы на равноправных основаниях, то в силу доказанного из сходимости (расходимости) ряда (1) вытекает сходимость (расходимость) ряда (2).

Пример 3. *Исследовать на сходимость ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2-n+1}}.$$

Решение. Возьмем для сравнения гармонический ряд и найдем предел отношения его общего члена к общему члену заданного ряда:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}:\frac{1}{\sqrt{n^2-n+1}}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{n^2-n+1}}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}\right)=1.$$

Мы видим, что в данном примере $0<K=1<\infty$, поэтому в соответствии с доказанной теоремой заданный ряд расходится, потому что расходится гармонический ряд.

2 Достаточные признаки сходимости

2.1 Признак Даламбера

Теорема 3 (Признак Даламбера). *Пусть задан ряд с положительными членами*

$$u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}u_n,$$

причем,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=l. \tag{7}$$

Тогда, если 1) $l<1$ — ряд сходится, 2) $l>1$ — ряд расходится, 3) $l=1$ — ничего определенного сказать нельзя (ряд может как сходиться, так и расходиться).

[†] Лекция «Числовые ряды».

Доказательство. 1) Пусть $l < 1$. Найдется такое q, что $l < q < 1$. Тогда из определения предела следует, что

$$\forall\,(\varepsilon > 0)\,\exists\,(N \in \mathbb{N})\,\forall\,(n \geq N)\ \left|\frac{u_{n+1}}{u_n} - l\right| < \varepsilon. \tag{8}$$

Поскольку это утверждение должно выполняться для любого $\varepsilon > 0$, возьмем $\varepsilon = q - l$. Тогда неравенство (8) станет таким:

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n} - l\right| < q - l,$$

или

$$-q + l < \frac{u_{n+1}}{u_n} - l < q - l,$$

откуда

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < q.$$

Запишем последнее неравенство для некоторых n, начиная с $n = N$:

$$\begin{aligned} &u_{N+1} < qu_N,\\ &u_{N+2} < qu_{N+1} < q^2 u_N,\\ &u_{N+3} < qu_{N+2} < q^3 u_N,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{9}$$

Рассмотрим два ряда:

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_N + u_{N+1} + u_{N+2} + \ldots, \tag{10}$$

$$u_N + qu_N + q^2 u_N + \ldots. \tag{11}$$

Ряд (11) сходится как геометрическая прогрессия со знаменателем $q < 1$. В силу неравенств (9) он мажорирует ряд (10), начиная с $n = N$. По признаку сравнения рядов ряд (10) сходится.

2) Пусть $l > 1$. Тогда из (7) получаем, что $\exists\,(N \in \mathbb{N})\,\forall\,(n \geq N)\ \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$. Следовательно, члены ряда возрастают и общий член u_n не стремится к нулю. Ряд расходится.

Замечание 2. *Если* $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \infty$, *то начиная с некоторого* $n = N$ *будет выполняться* $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$. *Значит, и в этом случае ряд расходится.*

Замечание 3. *Если* $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$, *но* $\exists\,(N \in \mathbb{N})\,\forall\,(n \geq N)\ \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$, *то ряд расходится, так как* $u_n \nrightarrow 0$.

Пример 4. *Исследовать на сходимость ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}.$$

Решение. Данный ряд сходится, потому что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2^{n+1}}\cdot\frac{2^n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n}=\frac{1}{2}<1.$$

Пример 5. *Сходится ли ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!}?$$

Решение. В силу признака Даламбера ряд расходится:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{n^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)\,n^n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e>1.$$

Пример 6. *Показать, что ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{3^n}$$

расходится.

Решение. Ряд действительно расходится, так как

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{3^{n+1}}\cdot\frac{3^n}{n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{3}=\infty,$$

см. замечание 2.

Пример 7. *Исследовать на сходимость ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}.$$

Решение. В данном случае применение признака Даламбера ничего не дает:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n+2}\cdot\frac{n+1}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n}=1.$$

Однако

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n}>1$$

для любого $n\geq 1$, поэтому в соответствии с замечанием 3 ряд расходится.

Пример 8. *Применить признак Даламбера к гармоническому ряду.*

Решение. Данный признак, примененный к ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, ни о чем определенном не говорит:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\cdot n=1.$$

Но расходимость гармонического ряда была установлена ранее.

2.2 Признак Коши

Теорема 4 (Признак Коши). *Пусть задан ряд с положительными членами*

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n,$$

причем,

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = l.$$

Тогда, если 1) $l < 1$ – ряд сходится, 2) $l > 1$ – ряд расходится, 3) $l = 1$ – ничего определенного сказать нельзя (ряд может как сходиться, так и расходиться).

Доказательство. 1) Пусть $l < 1$. Найдется такое q, что $l < q < 1$. Повторяя схему доказательства признака Даламбера, придем к неравенству

$$\sqrt[n]{u_n} < q \iff u_n < q^n. \tag{12}$$

Рассмотрим два ряда:

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_N + u_{N+1} + u_{N+2} + \ldots, \tag{13}$$

$$q^N + q^{N+1} + q^{N+2} + \ldots. \tag{14}$$

Ряд (14) сходится как геометрическая прогрессия со знаменателем $q < 1$. Неравенство (12) означает, что указанный ряд мажорирует ряд (13), начиная с $n = N$. По признаку сравнения рядов ряд (13) сходится.

2) Пусть $l > 1$. Тогда из того, что по условию $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = l$, следует, что $\exists\,(N \in \mathbb{N})\,\forall\,(n \geq N)$ $\sqrt[n]{u_n} > 1$, или $u_n > 1$. Следовательно, члены ряда возрастают и общий член u_n не стремится к нулю. Ряд расходится. □

Для практического применения признака Коши может быть полезно следующее утверждение.

Лемма 1. *Предел корня n-й степени из любого многочлена переменной n равен 1:*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_k n^k + \ldots + a_1 n + a_0} = 1.$$

Доказательство. Найдем предел логарифма такого многочлена:

$$\lim_{n\to\infty} \ln \sqrt[n]{a_k n^k + \ldots + a_1 n + a_0} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(a_k n^k + \ldots + a_1 n + a_0\right)}{n}.$$

По правилу Лопиталя

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(a_k n^k + \ldots + a_1 n + a_0\right)}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{k a_k n^{k-1} + \ldots + a_1}{a_k n^k + \ldots + a_1 n + a_0} = 0.$$

Раз предел логарифма равен нулю, то предел корня равен 1.

Пример 9. *Исследовать на сходимость ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{3n+4}.$$

Решение. Применим признак Коши и заключение леммы:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{5^n}{3n+4}} = \lim_{n\to\infty} \frac{5}{\sqrt[n]{3n+4}} = 5 > 1.$$

Ряд расходится.

Пример 10. *Показать. что ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$$

сходится.

Решение. Действительно,

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} < 1.$$

Пример 11. *Применить признак Коши к гармоническому ряду.*

Решение. Как и признак Даламбера, признак Коши о сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ничего определенного сказать не может:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1.$$

Еще раз повторю, что расходимость гармонического ряда была установлена ранее.

2.3 Интегральный признак Коши

Теорема 5 (Интегральный признак Коши). *Пусть члены ряда*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \tag{15}$$

положительны и не возрастают:

$$u_1 \geq u_2 \geq u_3 \geq \dots,$$

и пусть функция $f(x)$ непрерывна, не возрастает, а ее значения на натуральных числах совпадают с соответствующими членами ряда:

$$f(1) = u_1,\ f(2) = u_2,\ \dots,\ f(n) = u_n,\ \dots .$$

Тогда ряд (15) *и интеграл*

$$\int_1^{\infty} f(x)\ dx \tag{16}$$

сходятся или расходятся одновременно.

Доказательство. Из рис. 1 очевидно, что имеют место двойные неравенства (пурпурная штриховка $\leq$ желтый $\leq$ зеленая штриховка)

$$f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(x)\ dx \leq f(k)\,,\ k = 1, 2, \ldots\ .$$

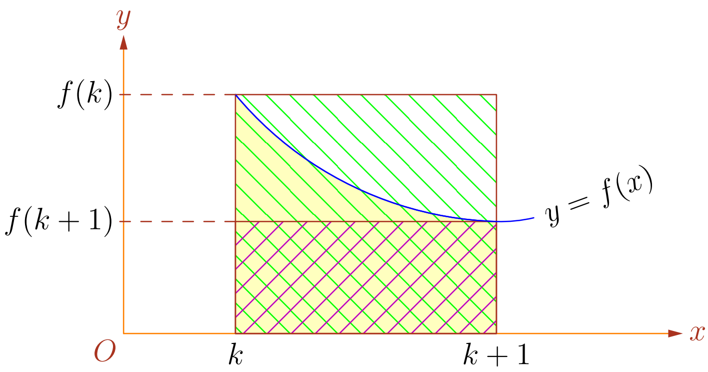

Рис. 1.

Просуммируем эти неравенства от 1 до n:

$$\sum_{k=2}^{n+1} f(k) = \sum_{k=1}^{n} f(k+1) \leq \int_1^{n+1} f(x)\ dx \leq \sum_{k=1}^{n} f(k)\,. \tag{17}$$

Если ряд (15) сходится, то при $n \to \infty$ предел суммы в правой части неравенства (17) конечен, но тогда интеграл в этом же неравенстве ограничен сверху и возрастает с ростом n. Следовательно, он имеет конечный предел и, значит, сходится. Если же ряд (15) расходится, то с ростом n сумма в левой части неравенства (17) неограниченно растет, а тогда и интеграл растет неограниченно. Поэтому он расходится. Аналогично из сходимости или расходимости интеграла (16) следует, соответственно, сходимость и расходимость ряда (15).

Пример 12. *Исследовать сходимость ряда*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}.$$

Решение. Члены заданного ряда и функция $f(x) = 1/x^p$ удовлетворяют условиям последней теоремы. Вычислим интеграл

$$\int_1^N \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} \left.\dfrac{1}{1-p}\cdot\dfrac{1}{x^{p-1}}\right|_1^N, & p \neq 1; \\ \ln x\big|_1^N, & p = 1; \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{1}{1-p}\left(\dfrac{1}{N^{p-1}} - 1\right), & p \neq 1; \\ \ln N, & p = 1. \end{cases}$$

Переходя к пределу при $N \to \infty$, получим

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} \dfrac{1}{p-1}, & p > 1; \\ \infty, & p \leq 1. \end{cases}$$

Таким образом, при $p > 1$ ряд сходится и его сумма равна $\frac{1}{p-1}$, а при $p \leq 1$ ряд расходится.

Частным случаем рассматриваемого ряда при $p = 1$ является гармонический ряд. Из результата решения примера следует, что он расходится, что́, впрочем, было установлено ранее.

Литература

[1] Бугров Я.С., Никольский С.М. *Дифференциальное и интегральное исчисление.* – М.: Наука, 1984, – с. 367-369, 371-376.

[2] Письменный Д.Т. *Конспект лекций по высшей математике.* – М.: Рольф, 2000. Ч. 2. – с. 114–120.