Степенные ряды

Волченко Ю.М.

Содержание лекции

Степенной ряд. Теорема Абеля. Радиус, круг и интервал сходимости степенного ряда. Свойства степенных рядов. Ряд Тейлора и ряд Маклорена. Разложение в ряд Тейлора основных элементарных функций. Применение степенных рядов в приближенных вычислениях.

15 декабря 2015 г.

1 Степенной ряд. Радиус, круг, интервал сходимости

Важнейшим частным случаем функционального ряда является степенной, фактически представляющий собой бесконечный многочлен. Таким образом, ***степенным рядом*** называется выражение

$$c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots + c_n z^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n. \qquad (1)$$

Если $c_n, z \in \mathbb{C}$ и хотя бы одна из этих величин не принадлежит $\mathbb{R}$, то ряд (1) называется ***комплексным***; если же $c_n, z \in \mathbb{R}$, то ряд (1) называется ***действительным***.

Теорема 1 (Абеля). *Если степенной ряд* (1) *сходится при некотором $z = z_0$, то он абсолютно сходится при всех z, для которых*

$$|z| < |z_0|.$$

Если же при некотором $z = z_1$ степенной ряд расходится, то он расходится и при всех z таких, что

$$|z| > |z_1|.$$

Доказательство. 1) Пусть ряд (1) сходится при $z = z_0$, тогда из необходимого признака сходимости ряда следует, что

$$\lim_{n\to\infty} c_n z_0^n = 0.$$

Значит, при достаточно больших n общий член ряда ограничен:

$$\exists\,(K \in \mathbf{R})\,\exists\,(N \in \mathbf{N})\,\forall\,(n \geq N)\ |c_n z_0^n| < K.$$

Возьмем такое z, чтобы $|z| < |z_0|$ (тем самым $z_0 \neq 0$), тогда $q = |z|\,/\,|z_0| < 1$. Для модуля общего члена ряда (1) найдем его оценку сверху:

$$|c_n z^n| \leq \left| c_n z_0^n \frac{z^n}{z_0^n} \right| = |c_n z_0^n| \left| \frac{z^n}{z_0^n} \right| = |c_n z_0^n|\, q^n < K q^n.$$

Это значит, что ряд $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n z^n|$ мажорируется сходящейся геометрической прогрессией (начиная с $n = N$) и поэтому сходится. Следовательно, ряд (1) сходится абсолютно.

2) Пусть теперь ряд (1) расходится при $z = z_1$. Предположим противное: при $|z| > |z_1|$ ряд (1) сходится. Тогда в соответствии с уже доказанной первой частью утверждения теоремы ряд (1) сходится при $z = z_1$. Полученное противоречие показывает, что при $|z| > |z_1|$ степенной ряд расходится. □

Область сходимости степенного ряда имеет простую структуру, определяемую следующим утверждением.

Теорема 2. *Существует единственное число $R \in \overline{\mathbb{R}}$ такое, что для всех z, для которых $|z| < R$, степенной ряд сходится, а при $|z| > R$ он расходится.*

Доказательство. Очевидно, что при $z = 0$ степенной ряд сходится. Если при всех остальных z он тоже сходится, то теорема доказана с $R = \infty$.

Пусть теперь существует w_0, при котором степенной ряд расходится. Тогда он расходится и при $b_0 = |w_0|$ (иначе из сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty} c_n |w_0|^n$ следовала бы и сходимость ряда $\sum_{n=0}^{\infty} c_n w_0^n$). Возьмем на отрезке $[a_0, b_0]$, где $a_0 = 0$,

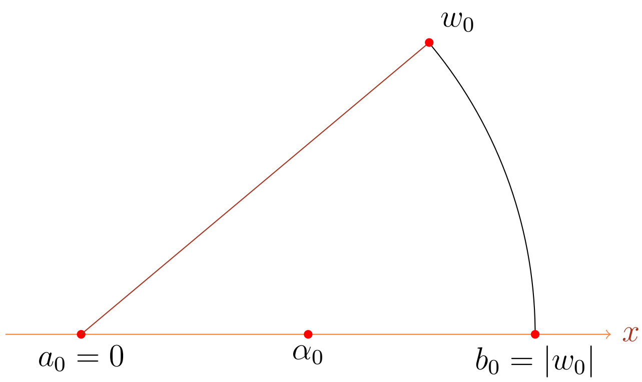

Рис. 1.

точку $\alpha_0 = (a_0 + b_0)\,/2$ (см. рис. 1). Если при $z = \alpha_0$ ряд сходится, обозначим $a_1 = \alpha_0$, $b_1 = b_0$; в противном случае обозначим $a_1 = a_0$, $b_1 = \alpha_0$. Затем на отрезке $[a_1, b_1]$ возьмем точку $\alpha_1 = (a_1 + b_1)/2$ и т. д. В результате получим бесконечную последовательность вложенных отрезков

$$[a_0, b_0] \supset [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \ldots \supset [a_n, b_n] \supset \cdots ,$$

на левых концах которых ряд сходится, на правых – расходится и длина которых стремится к нулю. По лемме о вложенных отрезках[†] найдется единственная точка R, принадлежащая всем отрезкам и такая, что $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = R$. Но по построению отрезков и по теореме Абеля получаем тогда, что для всех z, таких, что $|z| < R$, степенной ряд сходится, а для всех z, таких, что $|z| > R$, он расходится.

Следствие 1. *Множество $K_{cx} = \{z : |z| < R\}$ называется* ***кругом сходимости*** *степенного комплексного ряда, а число R –* ***радиусом сходимости****. На границе круга сходимости степенной ряд может как сходиться, так и расходиться (выясняется дополнительным исследованием), поэтому K_{cx} не обязательно совпадает со всей областью сходимости степенного ряда.*

Если степенной ряд – действительный, то круг сходимости превращается в ***интервал сходимости*** $I_{\text{cx}} = (-R, R)$, на концах которого сходимость ряда выясняется отдельно. Из теоремы Абеля следует, что в круге сходимости степенной ряд сходится, причем абсолютно.

Радиус сходимости степенного ряда можно найти, если существуют пределы, фигурирующие в признаках Коши и Даламбера сходимости рядов с положительными членами. Например, в соответствии с признаком Даламбера степенной ряд абсолютно сходится, если

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_{n+1} z^{n+1}}{c_n z^n} \right| = |z| \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| < 1,$$

то есть, когда $|z| < \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right|$. Значит,

$$\boxed{R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right|.} \qquad (2)$$

Аналогично по признаку Коши должно выполняться

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n z^n|} = |z| \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} < 1,$$

[†] Лекция «Теоремы о пределах».

откуда

$$\boxed{R = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}}.} \tag{3}$$

Пример 1. *Исследовать на сходимость ряд*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^n}{n+1}.$$

Решение. Найдем радиус сходимости ряда по формуле (2):

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{n+1} = 1.$$

Следовательно, круг сходимости имеет вид $K_{\text{сх}} = \{z : |z| < 1\}$. Исследуем сходимость ряда на границе круга сходимости. При $z = 1$ имеем ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1},$$

который сходится по теореме Лейбница. При $z = -1$ получаем расходящийся гармонический ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}.$$

Таким образом, на границе круга сходимости заданный ряд сходится не везде.

Пример 2. *Доказать, что действительный степенной ряд*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)!}$$

сходится на всей числовой оси.

Решение. Снова воспользуемся формулой (2):

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+2)!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} (n+2) = \infty.$$

Следовательно, интервал сходимости будет таким: $I_{\text{сх}} = (-R, R) = (-\infty, \infty)$.

Пример 3. *Исследовать на сходимость ряд*

$$\sum_{n=0}^{\infty} n! x^n.$$

Решение. По формуле (2) получаем

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

Значит, в данном случае интервал сходимости ряда вырождается в точку: $I_{\text{сх}} = \{0\}$.

2 Свойства степенных рядов

Теорема 3. *Степенной ряд сходится равномерно в любом круге*

$$K(q) = \{z : |z| < q\},$$

лежащем внутри круга сходимости радиуса R.

Доказательство. Так как $q < R$, то по теореме Абеля степенной ряд сходится абсолютно при $z = q$, т. е. сходится числовой ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n q^n|.$$

Так как $|c_n z^n| < |c_n q^n|$, $z \in K(q)$, то ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ в круге $K(q)$ сходится и равномерно, поскольку мажорируется сходящимся числовым рядом с положительными членами. □

Далее будем также использовать степенные ряды вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n. \tag{4}$$

Для определения круга сходимости этого ряда сделаем в выражении (4) замену $w = z - z_0$. Получим уже изученный нами степенной ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n w^n,$$

который, как было установлено, имеет круг сходимости $\{w : |w| < R\}$. Это значит, что круг сходимости ряда (4) есть $K_{\text{сх}}(z_0) = \{z : |z - z_0| < R\}$. Этот круг имеет радиус R и центр в точке z_0. По доказанному в области $K_{\text{сх}}(z_0)$ степенной ряд (4) сходится абсолютно и в каждом круге $\{z : |z - z_0| < \rho < R\}$ – равномерно.

Доказанная теорема, аналитичность членов степенного ряда $c_n z^n$ и рассмотренные ранее теоремы† делают справедливым следующее утверждение.

Следствие 2. *Сумма степенного ряда есть аналитическая функция в круге его сходимости. Ряд можно почленно дифференцировать. Если кривая интегрирования лежит внутри круга сходимости степенного ряда, то его можно почленно интегрировать.*

†Лекция «Функциональные ряды».

Теорема 4. *Ряд, полученный почленным дифференцированием или интегрированием комплексного степенного ряда имеет тот же круг сходимости, что и исходный степенной ряд.*

Доказательство. Продифференцируем комплексный степенной ряд (1) с радиусом сходимости R (по уже доказанному почленное дифференцирование законно):

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} n c_n z^{n-1}.$$

С помощью формулы (3) найдем радиус сходимости полученного ряда $\overline{R}$:

$$\overline{R} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{nc_n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{c_n}} = 1 \cdot R.$$

Теперь проинтегрируем ряд (4) по кривой $\mathcal{L}$, принадлежащей его кругу сходимости. Учитывая, что члены ряда аналитичны, можно применить формулу Ньютона-Лейбница. Получим

$$\int\limits_{\mathcal{L}} \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n\, dz = \int_{z_1}^{z} \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n\, dz = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \int_{z_1}^{z} z^n\, dz = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \left.\frac{z^{n+1}}{n+1}\right|_{z_1}^{z} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1}\left(z^{n+1} - z_1^{n+1}\right),$$

где z_1, z — концы кривой $\mathcal{L}$. Так как ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1}\, z^{n+1}$$

имеет в соответствии с формулой (3) тот же радиус сходимости, что и исходный ряд:

$$\widetilde{R} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n+1}{c_n}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n+1} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{c_n}} = 1 \cdot R,$$

а ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1}\, z_1^{n+1}$$

в круге сходимости исходного ряда сходится к числу, скажем, w_1, то, поскольку сходящиеся ряды можно вычитать,

$$\int\limits_{\mathcal{L}} \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n\, dz = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1}\, z^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1}\, z_1^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1}\, z^{n+1} - w_1,$$

получаем, что в этом круге сходится и проинтегрированный ряд.

Следствие 3. *Ряд, полученный почленным интегрированием действительного степенного ряда, имеет тот же интервал сходимости, что и исходный степенной ряд.*

Теорема 5. *Ряд, полученный почленным дифференцированием действительного степенного ряда, имеет тот же интервал сходимости, что и исходный ряд. Почленное дифференцирование законно.*

Доказательство. Поскольку продифференцированный действительный степенной ряд тоже является степенным рядом, то он имеет свой радиус сходимости, равный радиусу сходимости исходного степенного ряда (доказывается так же, как в теореме 4). В интервале сходимости, как следует из теоремы Абеля и теоремы 3, ряд из производных сходится абсолютно и равномерно, следовательно, почленное дифференцирование законно.

Следствие 4. *Степенные ряды можно почленно дифференцировать и интегрировать сколько угодно раз, при этом их круг (интервал) сходимости не изменяется.*

3 Ряд Тейлора

В свое время мы с вами убедились в эффективности формулы Тейлора как при решении теоретических вопросов, так и практических задач. Логическим развитием этой формулы является так называемый ряд Тейлора, имеющий не менее важное значение как в теории рядов, так и в приложениях.

Рассмотрим степенной ряд

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \tag{5}$$

с кругом сходимости $|z - z_0| < R$, где R — радиус сходимости ряда. Таким образом, $f(z)$ — сумма данного ряда в этом круге сходимости. Формулу (5) называют ***разложением функции*** $f(z)$ ***в степенной ряд***. Продифференцируем ее k раз:

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n n (z - z_0)^{n-1},$$

$$f''(z) = \sum_{n=2}^{\infty} c_n n (n-1) (z - z_0)^{n-2},$$

....

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} c_n n(n-1)\dots(n-k+1)(z-z_0)^{n-k},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Полагая в этих равенствах и равенстве (5) $z = z_0$, получим

$$f(z_0) = 0!c_0,\ f'(z_0) = 1!c_1,\ f''(z_0) = 2!c_2,\ \dots,\ f^{(k)}(z_0) = k!c_k,\ \dots.$$

Следовательно,

$$c_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!},\ k = 0, 1, 2, \dots. \tag{6}$$

Числа c_k называются ***коэффициентами Тейлора*** функции $f(z)$ в точке z_0. Ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}\ (z-z_0)^n$$

называется ***рядом Тейлора*** функции $f(z)$ по степеням $z - z_0$. При $z_0 = 0$ этот ряд становится ***рядом Маклорена***.

В связи с разложением функции в степенной ряд возникает вопрос: если в ряд (5) вместо коэффициентов c_n подставить их выражения из (6), будет ли такой ряд сходиться именно к функции $f(z)$? Или по-другому: всегда ли функция представима своим рядом Тейлора? Оказывается, не всегда; чтобы ответ был положительным, функция должна быть аналитичной.

Теорема 6 (Тейлора)**.** *Функция $f(z)$, аналитическая в круге $|z - z_0| < R$, однозначно представима в нем своим рядом Тейлора:*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n,\ |z-z_0| < R,$$

$$c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi j} \int\limits_{|\eta - z_0| = r} \frac{f(\eta)}{(\eta - z_0)^{n+1}}\, d\eta,\ r < R. \tag{7}$$

Доказательство. Пусть z принадлежит кругу $|z - z_0| < R$. Опишем вокруг z_0 окружность γ радиуса $r < R$ так, чтобы точка z оказалась внутри круга, ограниченного γ, рис. 2. Отметим, что $f(z)$ аналитична как внутри этого круга, так и на его границе. Тогда в силу интегральной формулы Коши

$$f(z) = \frac{1}{2\pi j} \int\limits_{\gamma} \frac{f(\eta)}{\eta - z}\, d\eta. \tag{8}$$

Представим часть подынтегральной функции в виде

$$\frac{1}{\eta - z} = \frac{1}{(\eta - z_0) - (z - z_0)} = \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\eta - z_0}} \cdot \frac{1}{\eta - z_0}$$

и заметим из рис., что

$$\left| \frac{z - z_0}{\eta - z_0} \right| < 1.$$

Следовательно, по формуле суммы бесконечной геометрической прогрессии

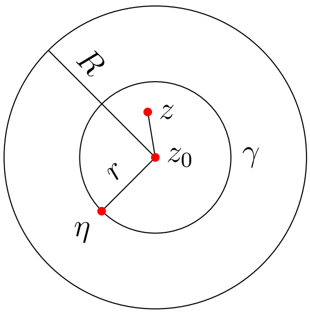

Рис. 2.

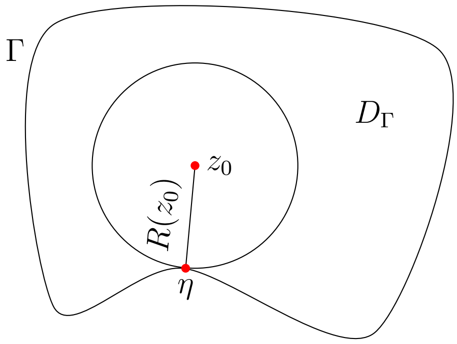

Рис. 3.

$$\frac{1}{\eta - z} = \frac{1}{\eta - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\eta - z_0} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\eta - z_0)^{n+1}}.$$

Если взять δ таким, чтобы

$$0 < \left| \frac{z - z_0}{\eta - z_0} \right| < \delta < 1,$$

то полученный ряд будет мажорироваться сходящейся геометрической прогрессией $\sum_{n=0}^{\infty} \delta^n$. Поэтому он равномерно относительно η сходится на окружности γ (так как $\eta \in \gamma$), а вместе с ним равномерно на γ сходится и ряд[†]

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\eta)\,(z - z_0)^n}{(\eta - z_0)^{n+1}},$$

поскольку функция $f(\eta)$ непрерывна и, следовательно, ограничена на γ. Это позволяет почленно проинтегрировать указанный ряд:

$$\frac{1}{2\pi j} \int\limits_{\gamma} f(\eta) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\eta - z_0)^{n+1}}\, d\eta = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi j} \int\limits_{\gamma} \frac{f(\eta)}{(\eta - z_0)^{n+1}}\, d\eta \right] (z - z_0)^n =$$

[†]Лекция «Функциональные ряды», Приложение.

$$= \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n ,$$

причем вследствие полученных ранее результатов[†] справедлива формула (7). Если имеется другое разложение $f(z)$ в ряд Тейлора $\sum_{n=0}^{\infty} c'_n (z - z_0)^n$, то, как было уже показано, его коэффициенты вычисляются по формуле (6). Значит, $c'_n = c_n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Следствие 5. *Если функция $f(z)$ аналитична в области D_Γ и $z_0 \in D_\Gamma$ (рис. 3), то $f(z)$ раскладывается в сходящийся к ней ряд Тейлора в круге $|z - z_0| < R(z_0)$, где*

$$R(z_0) = \min_{\eta \in \Gamma} |\eta - z_0| .$$

4 Разложение в ряд Тейлора некоторых функций

Имеют место следующие разложения известных функций в ряд Маклорена.

1° $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \ z \in \mathbb{Z}.$

2° $\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \ z \in \mathbb{Z}.$

3° $\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}, \ z \in \mathbb{Z}.$

4° $\operatorname{sh} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \ z \in \mathbb{Z}.$

5° $\operatorname{ch} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \ z \in \mathbb{Z}.$

6° $(1+z)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} z^n, \ |z| < 1, \ \alpha, z \in \mathbb{Z}.$

7° $\ln(1+z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{n+1}}{n+1}, \ |z| < 1, \ z \in \mathbb{Z}.$

[†]Лекция «Комплексный интеграл».

8° $\operatorname{arctg} z = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{z^{2n+1}}{2n+1},\ |z| < 1,\ z \in \mathbb{Z}.$

Из этих комплексных разложений получаются разложения соответствующих действительный функций, надо только заменить z на x, а $z \in \mathbb{Z}$ – на $x \in \mathbb{R}$. Доказательства справедливости приведенных формул отнесены в Приложение[1)].

Там же[2)] находятся примеры применения степенных рядов к приближенным вычислениям.

Применение системы *Mathematica* для разложения функций в ряд Тейлора уже было изложено в лекции, посвященной формуле Тейлора.

Приложение

[1)] ДОКАЗАТЕЛЬСТВА РАЗЛОЖЕНИЙ ФУНКЦИЙ В РЯД ТЕЙЛОРА

1° Все производные показательной функции $w = e^z$ одинаковы и равны ей самой, поэтому ее коэффициенты Тейлора в точке $z_0 = 0$ имеют вид $c_n = \frac{e^0}{n!} = \frac{1}{n!}$. В силу аналитичности e^z на всей комплексной плоскости†, она раскладывается в сходящийся к ней ряд Маклорена вида

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \ z \in \mathbb{Z}.$$

2° Разложение функции $\sin z$ получим следующим образом:

$$\sin z = \frac{e^{jz} - e^{-jz}}{2j} = \frac{1}{2j}\left[\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(jz)^m}{m!} - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-jz)^m}{m!}\right] = \frac{1}{2j}\sum_{m=0}^{\infty}\left[\frac{j^m z^m}{m!} - \frac{(-1)^m j^m z^m}{m!}\right] =$$
$$= \frac{1}{j}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{j^{2n+1} z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{1}{j}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n j z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \ z \in \mathbb{Z}.$$

Здесь было использовано свойство мнимой единицы $j^{2n+1} = (j^2)^n j = (-1)^n j$.

3° Чтобы получить разложение косинуса, продифференцируем формулу для синуса:

$$\cos z = (\sin z)' = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+1) z^{2n}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}, \ z \in \mathbb{Z}.$$

4° Поскольку‡ $\operatorname{sh} z = -j \sin jz$, то

$$\operatorname{sh} z = -j\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n j^{2n+1} z^{2n+1}}{(2n+1)!} = -j\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (-1)^n j z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \ z \in \mathbb{Z}.$$

5° Дифференцируя формулу для гиперболического синуса, получим

$$\operatorname{ch} z = (\operatorname{sh} z)' = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1) z^{2n}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}.$$

6° Вычислим производные функции $f(z) = (1+z)^\alpha$:

$$f'(z) = \alpha (1+z)^{\alpha-1}, \ f''(z) = \alpha(\alpha-1)(1+z)^{\alpha-2}, \ldots,$$
$$f^{(n)}(z) = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)(1+z)^{\alpha-n}, \ldots .$$

Очевидно, при достаточно большом k показатель степени выражения $1+z$ станет отрицательным и при $z = -1$ возникнет деление на 0. Поэтому ряд Тейлора при $|z| > 1$ в соответствии с теоремой Абеля будет расходиться, и, значит, его радиус сходимости равен 1. Учитывая, что

$$f(0) = 1, \ f'(0) = \alpha, \ f''(0) = \alpha(\alpha-1), \ldots, f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1),$$

получим разложение

$$(1+z)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} z^n, \ |z| < 1.$$

†Лекция «Предел и производная комплексной функции».
‡Лекция «Основные элементарные комплексные функции».

7° Представим функцию $\ln(1+z)$ в виде интеграла

$$\ln(1+z) = \int\limits_{\gamma} \frac{d\eta}{1+\eta} = \int_0^z \frac{d\eta}{1+\eta},$$

причем контур интегрирования γ не охватывает точку $z = -1$ и поэтому было возможно применение формулы Ньютона-Лейбница. Подынтегральная функция при $|\eta| < 1$ представляет собой сумму геометрической прогрессии, то есть

$$\frac{1}{1+\eta} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \eta^n.$$

Так как при $0 \le |\eta| \le |z| < 1$ ряд сходится равномерно, его можно почленно интегрировать:

$$\ln(1+z) = \int_0^z \frac{d\eta}{1+\eta} = \int_0^z \left[\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \eta^n\right] d\eta = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left.\frac{\eta^{n+1}}{n+1}\right|_0^z =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{n+1}}{n+1},\ |z| < 1.$$

8° Аналогично представим арктангенс в виде интеграла

$$\operatorname{arctg} z = \int\limits_{\gamma} \frac{d\eta}{1+\eta^2} = \int_0^z \frac{d\eta}{1+\eta^2},$$

причем контур интегрирования γ не охватывает точки $z = \pm j$. Снова воспользуемся формулой суммы геометрической прогрессии

$$\frac{1}{1+\eta^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \eta^{2n}.$$

При $0 \le |\eta| \le |z| < 1$ ряд сходится равномерно и почленное интегрирование дает

$$\operatorname{arctg} z = \int_0^z \frac{d\eta}{1+\eta^2} = \int_0^z \left[\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \eta^{2n}\right] d\eta = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left.\frac{\eta^{2n+1}}{2n+1}\right|_0^z =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{2n+1},\ |z| < 1.$$

2) Применение степенных рядов в приближенных вычислениях

Приближенное вычисление значений функций

Если функция $f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, может быть записана в виде степенного ряда:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k,$$

то его частичную сумму $S_n(x)$ можно взять в качестве приближения к $f(x)$:

$$f(x) \approx S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k x^k,$$

а остаток ряда может быть использован для оценки приближения. Так, если задана точность приближения $\varepsilon > 0$, то она будет достигнута при выполнении неравенства

$$|r_n(x)| = |f(x) - S_n(x)| < \varepsilon.$$

Для знакочередующегося ряда оценка упрощается:

$$|r_n(x)| < \left|c_{n+1}x^{n+1}\right| < \varepsilon, \tag{П1}$$

то есть, как уже было установлено ранее[†], она не превосходит модуля первого отброшенного члена ряда.

Пример П1. *Вычислить* $\cos 1$ *с точностью до 0,001.*

Решение. Ряд для косинуса имеет вид

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!},$$

поэтому

$$\cos 1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}. \tag{П2}$$

Получили знакочередующиийся ряд, для которого можно воспользоваться правилом (П1). Практически это означает, что вычисление частичной суммы ряда следует прекратить, когда очередной член ряда станет по модулю меньше $\varepsilon = 0{,}001$. Выполним расчет:

$$\cos 1 \approx 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{6!} \approx 0{,}54028 \approx 0{,}540.$$

Вычисления закончились четвертым членом ряда, так как его следующий член $1/7! \approx 0{,}000198$ уже меньше $0{,}001$.

Пример П2. *Вычислить* $e^{0,2}$ *с точностью до 0,001.*

Решение. Запишем ряд Маклорена для экспоненты

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!},$$

который уже не является знакочередующимся. Оценим его остаток при $x = 0{,}2$:

$$\begin{aligned} r_n(0{,}2) &= \frac{0{,}2^{n+1}}{(n+1)!} + \frac{0{,}2^{n+2}}{(n+2)!} + \frac{0{,}2^{n+3}}{(n+3)!} + \ldots = \\ &= \frac{0{,}2^{n+1}}{(n+1)!}\left(1 + \frac{0{,}2}{n+2} + \frac{0{,}2^2}{(n+2)(n+3)} + \ldots\right) \leq \\ &\leq \frac{0{,}2^{n+1}}{(n+1)!}\left(1 + \frac{0{,}2}{n+1} + \frac{0{,}2^2}{(n+1)^2} + \ldots\right) = \\ &= \frac{0{,}2^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{1 - \frac{0{,}2}{n+1}} = \frac{0{,}2^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n+1}{n+0{,}8} = \frac{0{,}2^{n+1}}{n!\,(n+0{,}8)} < 0{,}001. \end{aligned}$$

Простым перебором приходим к выводу, что неравенство выполнится при $n = 3$, так как

$$\left.\frac{0{,}2^{n+1}}{n!\,(n+0{,}8)}\right|_{n=2} \approx 0{,}0014 > 0{,}001, \quad \left.\frac{0{,}2^{n+1}}{n!\,(n+0{,}8)}\right|_{n=3} \approx 0{,}00007 < 0{,}001.$$

[†] Лекция «Абсолютная и условная сходимости».

Таким образом, требуемую точность обеспечивает следующая частичная сумма ряда

$$e^{0,2} \approx \sum_{k=0}^{3} \frac{0{,}2^k}{k!} = 1 + 0{,}2 + \frac{0{,}2^2}{2!} + \frac{0{,}2^3}{3!} \approx 1{,}22133 \approx 1{,}221.$$

Приближенное вычисление определенных интегралов

Если в определенном интеграле подынтегральная функция такова, что нахождение ее первообразной затруднительно или невозможно, прибегают к численным методам, одним из которых является применение степенных рядов. Оно заключается в том, что подынтегральную функцию заменяют сходящимся к ней степенным рядом, а затем, при условии, что отрезок интегрирования $[a, b] \subset (-R, R)$, где R – радиус сходимости ряда, выполняют почленное интегрирование. Получающийся при этом числовой ряд используют для получения приближенного значения интеграла так же, как это было показано в предыдущем п.

Пример П3. *Найти приближенное значение интеграла*

$$\int_0^{1/2} e^{-x^2} dx$$

с точностью до 0,0001.

Решение. Подынтегральная функция не берется в элементарных функциях, поэтому возможно только численное решение. Используем разложение экспоненты в ряд Маклорена:

$$e^{-x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{k!},$$

чтобы получить представление заданного интеграла в виде числового ряда:

$$\int_0^{1/2} e^{-x^2} dx = \int_0^{1/2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{k!}\, dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \int_0^{1/2} x^{2k}\, dx =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left. \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{k!\,(2k+1)} \right|_0^{1/2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,(2k+1)\,2^{2k+1}}.$$

Ряд – знакочередующийся, поэтому вычисляем частичную сумму ряда до тех пор, пока модуль очередного слагаемого не станет меньше заданной точности:

$$\int_0^{1/2} e^{-x^2} dx \approx \frac{1}{2} - \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \frac{1}{2!5 \cdot 2^5} - \frac{1}{3!7 \cdot 2^7} \approx 0{,}461\,27 \approx 0{,}4613;$$

$$\left. \frac{1}{k! \cdot (2k+1) \cdot 2^{2k+1}} \right|_{k=4} \approx 0{,}0000018 < 0{,}0001.$$

Пример П4. *Вычислить с точностью до* 10^{-6} *интеграл*

$$\int_0^{0,1} x^2 \ln(1-x)\; dx.$$

Решение. Воспользовавшись разложением логарифма в ряд Маклорена, получим, что

$$x^2 \ln(1-x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (-1)^{k+1} x^{k+3}}{k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{2k+1} x^{k+3}}{k+1} = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k+3}}{k+1},\ |x| < 1.$$

Применим почленное интегрирование ряда:

$$\int_0^{0,1} x^2 \ln(1-x)\,dx = -\int_0^{0,1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k+3}}{k+1}\,dx = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} \int_0^{0,1} x^{k+3}\,dx =$$
$$= -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k+4}}{(k+1)(k+4)}\Bigg|_0^{0,1} = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)(k+4)\,10^{k+4}}.$$

Оценим модуль остатка ряда:

$$|r_n| = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)(k+4)\,10^{k+4}} < \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{10^{k+4}} = \frac{1}{10^{n+5}\left(1-\frac{1}{10}\right)} = \frac{1}{9\cdot 10^{n+4}}.$$

Таким образом, точность вычислений будет достигнута, если выполнится

$$\frac{1}{9\cdot 10^{n+4}} < 10^{-6} \Longleftrightarrow \frac{1}{9} < 10^{n-2} \Longleftrightarrow n > 2 - \lg 9 \approx 1{,}046.$$

Значит, достаточно взять $n = 2$:

$$\int_0^{0,1} x^2 \ln(1-x)\,dx \approx -\frac{1}{4\cdot 10000} - \frac{1}{2\cdot 5\cdot 100000} - \frac{1}{3\cdot 6\cdot 1000000} \approx$$
$$\approx -0{,}000026056 \approx -0{,}000026.$$

Решение дифференциальных уравнений

Поскольку решение дифференциального уравнения тоже может не выражаться в элементарных функциях или его получение может вызвать значительные затруднения, то и в этих случаях в качестве аппроксимаций часто используют степенные ряды. С особенностями подобных приближенных методов познакомимся на примерах.

Вначале рассмотрим метод последовательного дифференцирования.

Пример П5. *С помощью степенного ряда найти приближенное решение дифференциального уравнения*

$$y' = xy^2 - \cos x$$

при начальном условии

$$y(0) = 1.$$

Решение. Представим неизвестное решение заданного уравнения $y(x)$ в виде ряда Маклорена:

$$y(x) = y(0) + y'(0)\,x + \frac{y''(0)}{2!}\,x^2 + \frac{y'''(0)}{3!}\,x^3 + \dots. \tag{П3}$$

Из начального условия возьмем $y(0) = 1$, а $y'(0)$ найдем, подставив $x = 0$ в дифференциальное уравнение:

$$y'(0) = 0\cdot y^2(0) - \cos 0 = -1.$$

Возьмем производную от обеих частей заданного уравнения:

$$y'' = y^2 + 2xyy' + \sin x. \tag{П4}$$

Подставим сюда $x = 0$, чтобы найти $y''(0)$:

$$y''(0) = y^2(0) = 1.$$

Теперь продифференцируем (П4):

$$y''' = 2yy' + 2(yy' + xy'^2 + xy'y'') + \cos x,$$

чтобы найти $y'''(0)$:

$$y'''(0) = 4y(0)\,y'(0) + \cos 0 = -3.$$

Подставим значения функции и ее производных в нуле в решение (П3):

$$y(x) \approx 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2}.$$

$\square$

В приведенном примере можно заметить, как получаемые уравнения становятся все более громоздкими. Кроме того, не обнаруживается закономерность образования коэффициентов степенного ряда. В некоторых случаях эти недостатки устраняются в методе неопределенных коэффициентов, который мы рассмотрим следующим.

Пример П6. *Решить предыдущий пример, не дифференцируя исходное уравнение.*

Решение. Запишем решение дифференциального уравнения и косинус, в него входящий, в виде степенных рядов:

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k, \ \cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}.$$

Найдем производную

$$y'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k c_k x^{k-1}.$$

Теперь подставим все это в заданное уравнение:

$$\sum_{k=1}^{\infty} k c_k x^{k-1} = x\left(\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k\right)^2 - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!},$$

и преобразуем его:

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+1)\,c_{k+1} x^k = x \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{k} c_r c_{k-r} x^k - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left[1 + (-1)^k\right](-1)^{\frac{k}{2}} x^k}{2 \cdot k!},$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+1)\,c_{k+1} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{k} c_r c_{k-r} x^{k+1} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left[1 + (-1)^k\right](-1)^{\frac{k}{2}} x^k}{2 \cdot k!}.$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях x^k:

$$(k+1)\,c_{k+1} = \sum_{r=0}^{k-1} c_r c_{k-r-1} - \frac{\left[1 + (-1)^k\right](-1)^{\frac{k}{2}}}{2 \cdot k!}, \ k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Найдем c_{k+1}:

$$c_{k+1} = \frac{1}{k+1}\left\{\sum_{r=0}^{k-1} c_r c_{k-r-1} - \frac{\left[1 + (-1)^k\right](-1)^{\frac{k}{2}}}{2 \cdot k!}\right\}, \ k = 0, 1, 2, \ldots. \qquad (\text{П5})$$

В этой и предыдущей формуле принято соглашение о том, что при превышении нижним пределом суммы ее верхнего предела, сумма считается равной нулю. Аналогично, $c_k = 0$, если $k < 0$. Перейдем к вычислениям коэффициентов. Поскольку по условию $y(0) = 1$, то $c_0 = 1$; далее из формулы (П5) последовательно получаем:

$$
\begin{aligned}
&c_1 = -1,\\
&c_2 = \frac{1}{2}c_0^2 = \frac{1}{2},\\
&c_3 = \frac{1}{3}\left(c_0c_1 + c_1c_0 + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3}\left(-2 + \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2},\\
&c_4 = \frac{1}{4}\left(c_0c_2 + c_1c_1 + c_2c_0\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2},\\
&c_5 = \frac{1}{5}\left(2c_0c_3 + 2c_1c_2 - \frac{1}{24}\right) = \frac{1}{5}\left(-1 - 1 - \frac{1}{24}\right) = -\frac{49}{120},\\
&c_6 = \frac{1}{6}\left(2c_0c_4 + 2c_1c_3 + c_2^2\right) = \frac{1}{6}\left(1 + 1 + \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{8}.
\end{aligned}
$$

Таким образом,

$$
y(x) \approx 1 - x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2}x^4 - \frac{49}{120}x^5 + \frac{3}{8}x^6.
$$

Литература

[1] Бугров Я.С., Никольский С.М. *Дифференциальное и интегральное исчисление.* – М.: Наука, 1984, – с. 394-404, 407-413.

[2] Бугров Я.С., Никольский С.М. *Высшая математика. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного* . – М.: Наука, 1985, – с. 400-403.

[3] Письменный Д.Т. *Конспект лекций по высшей математике.* – М.: Рольф, 2000. Ч. 2. – с. 125–143.