Формула Тейлора

Волченко Ю.М.

Содержание лекции

Многочлен Тейлора. Формулы Тейлора и Маклорена. Остаточный член формулы Тейлора в форме Лагранжа и в форме Пеано. Разложение по формуле Тейлора некоторых функций. Применение формулы Тейлора в математике и физике.

Анимация аппроксимации синуса многочленом Тейлора.
Анимация работает только в программе Acrobat Reader!

Система *Mathematica* и разложение функций по формуле Тейлора.

1 января 2013 г.

Вряд ли найдется человек, который бы ни пользовался калькулятором. Но мало кто задумывается над тем, каким образом маленькая машинка вычисляет синусы, логарифмы, экспоненты. Впрочем, это простительно для тех, кто не знает, что главное в калькуляторе — микропроцессор, который, вообще говоря, умеет выполнять только сложение и некоторые вспомогательные операции, а с помощью сложения уже вычитает, умножает и складывает. А больше он ничего не умеет! Нет у него врожденного свойства вычислять синусы и другие сложные функции! Хотя он их вычисляет...

Вот сегодня мы и познакомимся с очень популярной в математике формулой Тейлора, которая помогает калькулятору вычислять синусы и косинусы, зная только четыре действия арифметики.

Мы уже научились с помощью дифференциала находить приближенное значение функции в заданной точке. При этом для аппроксимации использовался простейший линейный многочлен. Понятно, что точность такого приближения редко бывает высокой. Но мы можем попробовать взять для аппроксимации квадратичный, или кубический многочлен, или многочлен еще более высокого порядка, ожидая, что погрешность вычислений будет уменьшаться с ростом степени многочлена. А каким критерием следует руководствоваться при подборе коэффициентов многочлена? Будем предполагать, что решение должно быть удачным, если значения функции и ее производных совпадут в заданной точке с соответствующими значениями многочлена и его производных.

1 Многочлен Тейлора

Итак, пусть задана функция $f(x)$, дифференцируемая n раз в точке x_0. Поставим задачу найти многочлен n-й степени вида

$$P_n(x, x_0) = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + \ldots + c_n(x - x_0)^n,$$

для которого выполняются равенства

$$P_n(x_0, x_0) = f(x_0), \; P_n'(x_0, x_0) = f'(x_0), \ldots, P_n^{(n)}(x_0, x_0) = f^{(n)}(x_0). \quad (1)$$

Чтобы отыскать коэффициенты многочлена $c_0, \ldots, c_n$, найдем его производные и вычислим их значения в точке x_0, используя условия (1):

$$P_n(x_0, x_0) = c_0 = f(x_0),$$
$$P_n'(x_0, x_0) = c_1 + 2c_2(x - x_0) + \ldots + nc_n(x - x_0)^{n-1}\Big|_{x=x_0} = c_1 = f'(x_0),$$
$$P_n''(x_0, x_0) = 2c_2 + \ldots + n(n-1)c_n(x - x_0)^{n-2}\Big|_{x=x_0} = 2c_2 = f''(x_0),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$P_n^{(n)}(x_0, x_0) = n(n-1)\cdot\ldots\cdot 1\cdot c_n = f^{(n)}(x_0).$$

Коэффициенты многочлена получаются такими:

$$c_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}, \; k = \overline{0, n}, \quad (2)$$

а сам он имеет вид

$$P_n(x, x_0) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

и называется ***многочленом Тейлора***. Разность $r_n(x, x_0) = f(x) - P_n(x, x_0)$ между функцией и многочленом называют ***остаточным членом***.

Заданную функцию теперь можно представить следующим образом:

$$\boxed{f(x) = P_n(x) + r_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + r_n(x, x_0).} \quad (3)$$

Это равенство носит название ***формулы Тейлора***. При $x_0 = 0$ она принимает более простой вид

$$\boxed{f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + r_n(x, x_0)} \quad (4)$$

и называется в этом случае также ***формулой Маклорена***.

В формулах (3) и (4) многочлен Тейлора служит для приближенного вычисления значений функции $f(x)$, а остаточный член — для оценки погрешности вычисления и для исследования поведения функции при $x \to x_0$. Поэтому следующим нашим шагом будет знакомство с различными формами остаточного члена.

2 Формы остаточного члена

Существует несколько форм представления остаточного члена.

Теорема 1. *Если на отрезке с концами x, x_0 функция $f(x)$ непрерывна вместе с первыми своими n производными, а во внутренних точках этого отрезка она $n+1$ раз дифференцируема, то существует точка $c \prec x, x_0$, такая, что*

$$r_n\left(x, x_0\right) = \frac{f^{(n+1)}\left(c\right)}{(n+1)!}\left(x - x_0\right)^{n+1}. \tag{5}$$

Доказательство дано в Приложении[1)]. Это представление остаточного члена называется ***формой Лагранжа***.

Равенство (3) с таким остаточным членом принимает вид

$$f\left(x\right) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}\left(x_0\right)}{k!}\left(x - x_0\right)^k + \frac{f^{(n+1)}\left(c\right)}{(n+1)!}\left(x - x_0\right)^{n+1}, \ c \prec x, x_0, \tag{6}$$

и называется ***формулой Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа***. Запишем и формулу Маклорена для этого случая:

$$f\left(x\right) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}\left(0\right)}{k!} x^k + \frac{f^{(n+1)}\left(c\right)}{(n+1)!} x^{n+1}, \ c \prec 0, x.$$

Формула (6) является обобщением формулы Лагранжа, так как переходит в нее при $n = 0$.

Если производная $f^{(n+1)}(x)$ непрерывна в окрестности точки x_0, то она будет непрерывна и на достаточно малом отрезке $[x_0 - \delta, x + \delta]$. Но тогда она ограничена на этом отрезке[†]:

$$\left|f^{(n+1)}(x)\right| \le M_n, \ x \in [x_0 - \delta, x + \delta],$$

где $M_n \in \mathbb{R}$ не зависит от x. Это дает следующую оценку остаточного члена

$$|r_n(x, x_0)| \le \frac{\left|f^{(n+1)}(c)\right|}{(n+1)!}\left|x - x_0\right|^{n+1} \le \frac{M_n}{(n+1)!}\left|x - x_0\right|^{n+1}, \tag{7}$$

[†]Лекция «Непрерывность функции».

$|x - x_0| < \delta$, которую можно использовать для определения погрешности приближения функции ее многочленом Тейлора.

Нижеследующая теорема, доказанная в Приложении[2)]также основывается на оценке (7). Эта теорема имеет важное значение в теории рядов Тейлора, которые будут рассмотрены в соответствующем разделе курса.

Теорема 2. *Если функция $f(x)$ на отрезке $[x_0 - \delta, x + \delta]$ имеет производные любого порядка и все они ограничены одним и тем же числом: $|f^{(n)}(x)| \le M$, $x \in [x_0 - \delta, x + \delta]$, $n = 0, 1, \ldots$, то остаточный член стремится к нулю:*

$$\lim_{n\to\infty} r_n(x, x_0) = 0.$$

Теорема 3. *Если функция $f(x)$ определена в окрестности точки x_0 и дифференцируема в ней n раз, то*

$$r_n\,(x, x_0) = o((x - x_0)^n).$$

Доказательство см. в Приложении[3)]. Полученное выражение для остаточного члена называется ***формой Пеано***. Формула (3) для такого представления остаточного члена имеет вид

$$f\,(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}\,(x_0)}{k!}\,(x - x_0)^k + o((x - x_0)^n), \tag{8}$$

и носит название ***формулы Тейлора с остаточным членом в форме Пеано***. Формула Маклорена становится такой:

$$f\,(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}\,(0)}{k!}\,x^k + o((x - x_0)^n).$$

Можно показать, что представление функции $f(x)$ по формуле (8) единственно[4)]. Эта формула является обобщением определения дифференцируемости функции, в которое указанная формула переходит при $n = 1$. По этой причине формула для приближенного вычисления функции $f(x)$

$$f\,(x) \approx \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}\,(x_0)}{k!}\,(x - x_0)^k\,,$$

вытекающая из представления (8), является обобщением формулы

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0)$$

приближенного вычисления функции с помощью дифференциала.

3 Формула Тейлора для некоторых функций

Используя рассмотренные понятия, разложим по формуле Маклорена некоторые функции.

3.1 $f(x) = e^x$

Производные любого порядка этой функции одинаковы: $f^{(n)}(x) = e^x$, как и их значения в нуле: $f^{(n)}(0) = 1$. Поэтому для экспоненты формула Маклорена с остаточным членом в форме Лагранжа будет такой:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^c}{(n+1)!}x^{n+1}, \ c \prec x, 0. \tag{9}$$

На любом отрезке $[-A, A]$ функция e^x ограничена числом e^A и, значит, вследствие теоремы 2 остаточный член стремится к нулю. В силу произвольности числа A это справедливо для всей числовой оси.

Пример 1. *Вычислить число e с точностью до* 0,0001.

Решение. В данном случае $x = 1$. Надо подобрать наименьшее n такое, чтобы

$$r_n(1, 0) = \frac{e^c}{(n+1)!} \leq 0{,}0001, \ 0 < c < 1. \tag{10}$$

Но $e < 3$[†] и тогда $e^c < 3$. Поэтому неравенство (10) выполнится, если выполнится неравенство $3/(n+1)! < 0{,}0001$. Подбором устанавливаем, что $n = 7$.

Для вычисления используем многочлен Тейлора из формулы (9) при $x = 1$ и $n = 7$:

$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{7!} = 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720} + \frac{1}{5040} \approx$$
$$\approx 2 + 0{,}5 + 0{,}16667 + 0{,}04167 + 0{,}00833 + 0{,}00139 + 0{,}00020 =$$
$$= 2{,}71826 \approx 2{,}7183.$$

Вот так примерно действует и калькулятор, вычисляя значения основных элементарных функций с помощью всего лишь четырех арифметических действий.

3.2 $f(x) = \sin x$

Найдем производные этой функции:

$$f'(x) = \cos x, \ f''(x) = -\sin x, \ f'''(x) = -\cos x, \ f^{IV}(x) = \sin x.$$

Далее выражения для производных станут повторяться. Вычислим значения функции и ее производных в нуле:

$$f(0) = 0, \ f'(0) = 1, \ f''(0) = 0, \ f'''(0) = -1, \ f^{IV}(0) = 0, \ldots.$$

[†] Лекция «Теоремы о пределах», Приложение.

Мы видим, что значения производных четного порядка равны нулю, а значения производных нечетного порядка образуют последовательность единиц с чередующимися знаками. В общем виде n-ю производную синуса можно записать так:

$$\sin^{(n)}(x) = \sin\left(x + \frac{\pi n}{2}\right), \tag{11}$$

поэтому

$$\sin^{(n)}(x)\Big|_{x=0} = \sin\frac{\pi n}{2} = \begin{cases} 0, & n = 2k, \\ (-1)^k, & n = 2k+1. \end{cases}$$

Следовательно, формула Маклорена для синуса имеет следующий вид:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + r_{2k+2}(x,0),$$

$k = 0, 1, 2, \ldots$. Остаточный член имеет индекс $2k+2$, а не $2k+1$, так как слагаемое многочлена Тейлора, отвечающее $n = 2k+2$, равно нулю.

Остаточный член в форме Лагранжа можно записать так:

$$r_{2k+2}(x,0) = \frac{\sin^{(2k+3)}(c)}{(2k+3)!}\, x^{2k+3} = \frac{\sin\left(c + \frac{\pi}{2}(2k+3)\right)}{(2k+3)!}\, x^{2k+3}, \ c \prec x, 0.$$

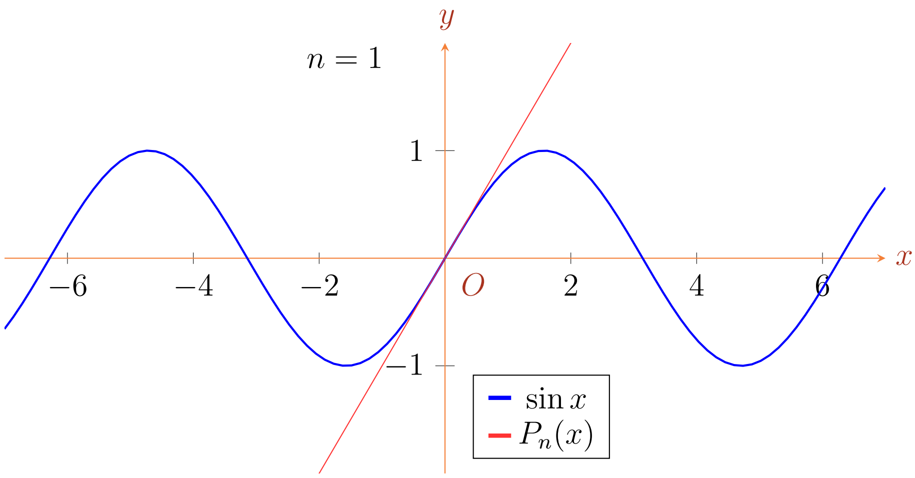


Рис. 1. Аппроксимация $\sin x$ многочленами Тейлора.

Поскольку все производные синуса на всей числовой оси ограничены по модулю единицей, то для всех x остаточный член стремится к 0 при $n \to \infty$.

На анимационном рис. 1 показано, как многочлены Тейлора аппроксимируют $\sin x$. Щелкая на рис. мышкой, можно убедиться, что с возрастанием степени многочлена, последний все лучше приближает синус. Рис. 2 (тоже анимационный) демонстрирует убывание модуля остаточного члена с ростом степени многочлена.

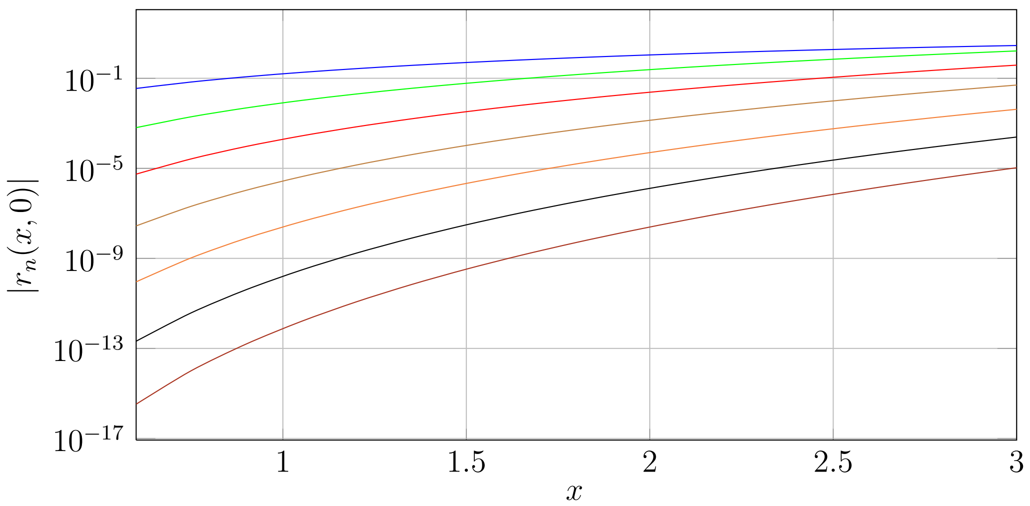


Рис. 2. Модуль остаточного члена для $\sin x$.

3.3 $f(x) = \cos x$

Поступаем так же, как с синусом. Находим производные и их значения для косинуса:

$$f'(x) = -\sin x,\ f''(x) = -\cos x,\ f'''(x) = \sin x,\ f^{IV}(x) = \cos x;$$
$$f(0) = 1,\ f'(0) = 0,\ f''(0) = -1,\ f'''(0) = 0,\ f^{IV}(0) = 1, \ldots,$$

Используя равенство (11), получаем, что в общем случае производные косинуса и их значения выражаются формулами:

$$\cos^{(n)}(x) = \sin^{(n)}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi n}{2}\right) = \cos\left(x + \frac{\pi n}{2}\right),$$
$$\cos^{(n)}(x)\Big|_{x=0} = \cos\frac{\pi n}{2} = \begin{cases} 0, & n = 2k+1, \\ (-1)^k, & n = 2k. \end{cases}$$

Разложение по формуле Маклорена будет таким:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + r_{2k+1}(x, 0),$$

$k = 0, 1, 2, \ldots$.

Остаточный член имеет вид

$$r_{2k+1}(x, 0) = \frac{\cos^{(2k+2)}(c)}{(2k+2)!} x^{2k+2} = \frac{\cos\left(c + \pi(k+1)\right)}{(2k+2)!} x^{2k+2},\ c \prec x, 0,$$

и стремится к 0 при $n \to \infty$ на всей числовой оси.

3.4 $f(x) = \ln(1+x)$

Вычислим производные этой функции:

$$f'(x) = \frac{1}{x+1},\ f''(x) = -\frac{1}{(x+1)^2},\ f'''(x) = \frac{2}{(x+1)^3},$$
$$f^{IV}(x) = -\frac{3!}{(x+1)^4}, \ldots,\ f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1}\frac{(n-1)!}{(x+1)^n},\ n = 1, 2, \ldots,$$

и найдем значения заданной функции и ее производных в нуле:

$$f(0) = 0,\ f^{(n)}(0) = (-1)^{n+1}(n-1)!, ,\ n = 1, 2, \ldots.$$

Следовательно, формула Маклорена в данном случае имеет вид

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + r_n(x, 0).$$

Можно показать[5)], что при $|x| < 1$ остаточный член стремится к нулю.

3.5 $f(x) = (1+x)^\alpha$

Нетрудно представить себе, чему равна n-я производная такой функции:

$$f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}.$$

Значения функции и ее производных в нуле:

$$f(0) = 1,\ f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1).$$

Формула Маклорена:

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \\ + r_n(x, 0). \tag{12}$$

Из этой формулы можно получить частные случаи, используемые в приближенных вычислениях. При $\alpha = 1/2$ имеем

$$\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3.$$

При $\alpha = -1$ получаем

$$\frac{1}{1+x} \approx 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^n x^n.$$

Можно показать[6)], что и в случае этой функции остаточный член стремится к нулю при $n \to \infty$ и $|x| < 1$.

При $\alpha = n \in \mathbb{N}$ формула Маклорена превращается в бином Ньютона[7)]для многочлена $(1+x)^n$ и, таким образом, является его обобщением.

4 Применение формулы Тейлора

Что будет, если мы заданный многочлен $Q_n(x)$ степени n разложим по формуле Тейлора (6)? Так как производные многочлена $Q_n(x)$ порядка выше, чем n, равны нулю, то мы получим равенство

$$Q_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{Q_n^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k, \tag{13}$$

которое фактически является разложением многочлена $Q_n(x)$ по степеням $x - x_0$.

Пример 2. *Разложить многочлен* $2x^4 - 5x^3 - 3x^2 + 8x + 4$ *по степеням* $x - 2$.

Решение. Применим формулу (13), для чего сначала вычислим четыре производные (остальные равны нулю):

$$\begin{aligned}
&f'(x) = 8x^3 - 15x^2 - 6x + 8,\ f'(2) = 0,\\
&f''(x) = 24x^2 - 30x - 6,\ f''(2) = 30,\\
&f'''(x) = 48x - 30,\ f'''(2) = 66,\\
&f^{IV}(x) = f^{IV}(2) = 48.
\end{aligned}$$

Учитывая, что $f(0) = 0$, с помощью указанной формулы получаем

$$2x^4 - 5x^3 - 3x^2 + 8x + 4 = 15(x-2)^2 + 11(x-2)^3 + 2(x-2)^4.$$

□

Формула Тейлора дает еще один метод вычисления пределов. Пусть предел $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$, $x_0 \in \mathbb{R}$, представляет собой неопределенность $\frac{0}{0}$. Предположим, что функции f и g раскладываются по формуле Тейлора в точке x_0. Выполним такое разложение, оставив в формулах только первые ненулевые члены:

$$\begin{aligned}
f(x) &= a(x-x_0)^i + o((x-x_0)^i),\ a \neq 0,\\
g(x) &= b(x-x_0)^j + o((x-x_0)^j),\ b \neq 0.
\end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что искомый предел будет равен

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{a(x-x_0)^i}{b(x-x_0)^j}.$$

Члены $a(x-x_0)^i$ и $b(x-x_0)^j$ в этих формулах называют ***главными частями*** функций f и g при $x \to x_0$. Получаем простое правило вычисления пределов: *предел отношения двух бесконечно малых равен пределу отношения их главных частей.*

Пример 3. *Найти предел*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[m]{1+x}-\sqrt[n]{1+x}}{x}.$$

Решение. Из формулы (12) получаем, что $\sqrt[m]{1+x}\approx 1+\frac{x}{m}+o(x)$. Поэтому:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[m]{1+x}-\sqrt[n]{1+x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1+\frac{x}{m}+o\left(x\right)-1-\frac{x}{n}+o\left(x\right)}{x}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{n}\right)x+o\left(x\right)}{x}=\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{n}\right)+\lim_{x\to 0}\frac{o\left(x\right)}{x}=\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{n}\right).$$

□

Следующий пример показывает, как можно применить формулу Тейлора в теории электрического поля.

Пример 4. *Исследовать модуль напряженности электрического поля, созданного двумя зарядами величины q и $-q$, помещенными в точках, соответственно, d и $-d$ числовой оси, на расстоянии x от начала координат, $x\gg d$ (такая пара зарядов называется диполем).*

Решение. Модуль напряженности поля одиночного заряда равен $E=kq/r^2$, где k — коэффициент пропорциональности, r — расстояние от данной точки до заряда. Диполь создает суммарное поле двух зарядов вида

$$E=\frac{kq}{(x-d)^2}-\frac{kq}{(x+d)^2}=\frac{kq}{x^2\left(1-\frac{d}{x}\right)^2}-\frac{kq}{x^2\left(1+\frac{d}{x}\right)^2}.$$

По формуле (12) находим, что

$$\frac{1}{(1+u)^2}\approx 1-2u+3u^2-4u^3.$$

Получаем, что модуль напряженности заданного поля выражается приближенной формулой

$$E\approx\frac{kq}{x^2}\left[\left(1+\frac{2d}{x}+\frac{3d^2}{x^2}+\frac{4d^3}{x^3}\right)-\left(1-\frac{2d}{x}+\frac{3d^2}{x^2}-\frac{4d^3}{x^3}\right)\right]\approx$$
$$\approx\frac{4kdq}{x^3}.$$

Таким образом, вдали от диполя модуль электрического поля с расстоянием убывает быстрее (как x^{-3}), чем у одиночного заряда (как x^{-2}). Это объясняется тем, что заряды диполя частично погашают действие друг друга. □

В Приложении[8)] показано, как с помощью системы *Mathematica* получать многочлены и формулы Тейлора для различных функций.

Приложение

[1)] *Доказательство теоремы 1.*

Вначале докажем более общее представление остаточного члена.

Теорема П1. *Если на отрезке с концами x, x_0 функция $f(x)$ непрерывна вместе с с первыми своими n производными, а во внутренних точках этого отрезка она $n+1$ раз дифференцируема, то для любой функции $\varphi(x)$, непрерывной на этом отрезке и имеющей конечную производную $\varphi'(x) \neq 0$ в его внутренних точках, существует точка $c \prec x, x_0$, такая, что*

$$r_n(x, x_0) = \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{\varphi'(c) n!} f^{(n+1)}(c)(x-c)^n . \tag{П1}$$

Доказательство. На отрезке I с концами x и x_0 рассмотрим вспомогательную функцию

$$F(t) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k.$$

Из условия теоремы следует, что она непрерывна на отрезке I и дифференцируема в его внутренних точках. Найдем ее производную:

$$\begin{aligned} F'(t) &= -f'(t) - \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k - \frac{f^{(k)}(t)}{k!}k(x-t)^{k-1}\right] = \\ &= \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{f^{(k)}(t)}{(k-1)!}(x-t)^{k-1} - \frac{f^{(k)}(t)}{(k-1)!}(x-t)^{k-1}\right] - \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n = \\ &= -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n. \end{aligned} \tag{П2}$$

По теореме Коши† для пары функций $F(t)$ и $\varphi(t)$ на отрезке I выполняется равенство

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{\varphi(x) - \varphi(x_0)} = \frac{F'(c)}{\varphi'(c)}, \ c \prec x, x_0.$$

Из этого равенства, учитывая (П2) и то, что $F(x) = 0$, $F(x_0) = r_n(x, x_0)$, получаем

$$-\frac{r_n(x, x_0)}{\varphi(x) - \varphi(x_0)} = -\frac{f^{(n+1)}(c)(x-c)^n}{\varphi'(c) n!},$$

откуда и следует (П1).

□

Взяв в формуле (П1) $\varphi(t) = (x-t)^{n+1}$, получим формулу (5):

$$r_n(x, x_0) = \frac{0 - (x-x_0)^{n+1}}{-(n+1)(x-c)^n n!} f^{(n+1)}(c)(x-c)^n = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} .$$

† Лекция «Теоремы о среднем»

[2)] *Доказательство теоремы 2.*

Вначале рассмотрим последовательность

$$x_n = \frac{\delta^n}{n!},\ \delta > 0.$$

Так как

$$x_{n+1} = x_n \frac{\delta}{n+1},$$

то, начиная с $n > \delta - 1$, последовательность становится убывающей. Кроме того, она ограничена снизу (например, нулем). По известной теореме теории пределов[†] она тогда имеет конечный предел A. Переходя к пределу в приведенном выше равенстве, получим

$$A = A \cdot 0,$$

откуда следует, что $A = 0$, то есть

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\delta^n}{n!} = 0. \tag{П3}$$

Из оценки остаточного члена (7) и условий теоремы находим, что

$$|r_n\,(x, x_0)| \le \frac{M}{(n+1)!}\,|x - x_0|^{n+1} \le M\frac{\delta^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Правая часть неравенства в силу (П3) стремится к нулю, значит, и левая стремится к нулю.

[3)] *Доказательство теоремы 3.*

Так как $r_n(x, x_0) = f\,(x) - P_n\,(x, x_0)$, то в силу условий (1) имеют место равенства:

$$r_n(x_0, x_0) = r'_n(x_0, x_0) = \ldots = r_n^{(n)}(x_0, x_0) = 0. \tag{П4}$$

Нам надо доказать, что

$$r_n(x, x_0) = o((x - x_0)^n).$$

Доказательство проведем индукцией по n. При $n = 1$ из $r_1(x_0, x_0) = r'_1(x_0, x_0) = 0$ действительно следует $r_1(x, x_0) = o(x - x_0)$, так как

$$\lim_{x\to x_0} \frac{r_1(x, x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{r_1(x, x_0) - r_1(x_0, x_0)}{x - x_0} = r'_1(x_0, x_0) = 0.$$

Предположим теперь, что сформулированное утверждение справедливо при некотором $n \ge 1$ и докажем его справедливость при $n + 1$. То есть докажем, что из

$$r_{n+1}(x_0, x_0) = r'_{n+1}(x_0, x_0) = \ldots = r_{n+1}^{(n+1)}(x_0, x_0) = 0 \tag{П5}$$

следует

$$r_{n+1}(x, x_0) = o((x - x_0)^{n+1}). \tag{П6}$$

Из (П5) усматриваем, что $r_{n+1}(x, x_0)$ удовлетворяет n условиям типа (П4) и, значит, по предположению индукции

$$r'_{n+1}(x, x_0) = o((x - x_0)^n). \tag{П7}$$

Далее применим формулу Лагранжа[‡]:

$$r_{n+1}(x, x_0) = r_{n+1}(x, x_0) - r_{n+1}(x_0, x_0) = r'_{n+1}(c, x_0)(x - x_0),\ c \prec x, x_0. \tag{П8}$$

[†] Лекция «Теоремы о пределах».
[‡] Лекция «Теоремы о среднем».

Поскольку $|c - x_0| < |x - x_0|$, то из представления (П7) находим, что

$$r'_{n+1}(c, x_0) = o((c - x_0)^n) = o((x - x_0)^n).$$

Подставляя это выражение в (П8), получаем (П6), что и требовалось доказать.

[4] Пусть функцию $f(x)$ можно представить в виде:

$$f\,(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k\,(x - x_0)^k + o((x - x_0)^n).$$

Тогда коэффициенты многочлена в силу единственности предела можно найти последовательно и вполне однозначно:

$$c_0 = \lim_{x \to x_0} f(x),\; c_1 = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - c_0}{x - x_0},$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$c_n = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - [c_0 + \ldots + c_{n-1}(x - x_0)^{n-1}]}{(x - x_0)^n}.$$

Поэтому, кроме найденных коэффициентов (2) многочлена Тейлора, других коэффициентов быть не может.

[5] Вначале докажем следующую теорему.

Теорема П2. *При выполнении условий теоремы 1 справедливо равенство*

$$r_n\,(x, x_0) = \frac{f^{(n+1)}\,(c)}{n!}\,(x - c)^n\,(x - x_0)\,,\; c \prec x, x_0.$$

Доказательство. Положим в формуле (П1) $\varphi(t) = x - t$:

$$r_n\,(x, x_0) = \frac{0 - (x - x_0)}{-n!}\,f^{(n+1)}(c)\,(x - c)^n = \frac{f^{(n+1)}\,(c)}{n!}\,(x - c)^n\,(x - x_0).$$

□

Такой вид остаточного члена носит название ***формы Коши***. С его помощью равенство (3) записывается в виде

$$f\,(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}\,(x_0)}{k!}\,(x - x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}\,(c)}{n!}\,(x - c)^n\,(x - x_0)\,,\; c \prec x, x_0,$$

и называется ***формулой Тейлора с остаточным членом в форме Коши***. Соответствующая формула Маклорена имеет вид

$$f\,(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}\,(0)}{k!}\,x^k + \frac{f^{(n+1)}\,(c)}{n!}\,(x - c)^n x,\; c \prec 0, x.$$

Используем эту форму Коши остаточного члена для функции $f(x) = \ln(1 + x)$:

$$r_n(x, 0) = \frac{(-1)^{n+2} n!}{n!(c + 1)^{n+1}}(x - c)^n x = \frac{(-1)^{n+2}}{1 + c}\left(\frac{x - c}{1 + c}\right)^n x,\; c \prec x, 0.$$

Если $|x| < 1$, то из условия, что c лежит между 0 и x, получаем

$$\left|\frac{x - c}{1 + c}\right| = \frac{|x| - |c|}{|1 + c|} \le \frac{|x| - |c|}{1 - |c|} = 1 - \frac{1 - |x|}{1 - |c|} \le 1 - \frac{1 - |x|}{1 - 0} = |x|. \qquad \text{(П9)}$$

Следовательно, при $|x| < 1$
$$|r_n(x,0)| \leq \frac{|x|^{n+1}}{1+c}.$$
Правая часть неравенства стремится к 0 при $n \to \infty$, поэтому и остаточный член стремится к нулю при $|x| < 1$.

[6] Остаточный член в форме Коши имеет вид

$$r_n(x,0) = \frac{\alpha\,(\alpha-1)\ldots(\alpha-n)}{n!}(1+c)^{\alpha-n-1}(x-c)^n x =$$
$$= \alpha\left(\frac{\alpha}{1}-1\right)\ldots\left(\frac{\alpha}{n}-1\right)\left(\frac{x-c}{1+c}\right)^n(1+c)^{\alpha-1}x,\ c \prec x, 0.$$

Из оценки (П9) имеем

$$|r_n(x,0)| \leq \left|\alpha\left(1-\frac{\alpha}{1}\right)\ldots\left(1-\frac{\alpha}{n}\right)\right|(1+c)^{\alpha-1}|x|^{n+1}.$$

При увеличении n на единицу правая часть неравенства умножается на $\left|\left(1-\frac{\alpha}{n+1}\right)x\right|$. Так как $|x| < 1$, то при достаточно больших n будем иметь $\left|\left(1-\frac{\alpha}{n+1}\right)x\right| < q < 1$, если $|x| < q < 1$. Пусть это начинает выполняться, начиная с некоторого $n = n_0$. Тогда для $n > n_0$

$$|r_n(x,0)| < \left|\alpha\left(1-\frac{\alpha}{1}\right)\ldots\left(1-\frac{\alpha}{n_0}\right)\right|(1+c)^{\alpha-1}|x|^{n_0+1}q^{n-n_0}.$$

Но $q^{n-n_0} \to 0$ при $n \to \infty$, поэтому и остаточный член стремится к нулю.

[7] При $\alpha = n \in \mathbb{N}$ функция $(1+x)^\alpha$ становится многочленом $(1+x)^n$ степени n, и поэтому все ее производные, порядка выше n-го, равны нулю. Из формулы (5), например, тогда следует, что остаточный член в этом случае равен 0. Равенство (12) становится таким:

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n\,(n-1)}{2!}\,x^2 + \ldots + \frac{n\,(n-1)\ldots 1}{n!}\,x^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k.$$

Как видим, действительно получился бином Ньютона.

[8] Для разложения функций по формуле Тейлора *Mathematica* имеет в своем распоряжении оператор `Series[f,{x,x0,n}]`, где `f` — заданная функция, `x` — ее аргумент, x_0 — точка, в окрестности которой раскладывается функция, `n` — число членов разложения. Вообще-то series означает ряд, но ряд Тейлора, который нам еще предстоит изучить в будущем, — это бесконечный многочлен, который изобразить на мониторе невозможно. Поэтому *Mathematica* все же конструирует именно формулу Тейлора, выдавая на выходе многочлен Тейлора плюс остаточный член.

Вот как выглядит разложение экспоненты в окрестности нуля (формула Маклорена):

```
Series[e^x,{x,0,9}]
```

$$1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \frac{x^6}{720} + \frac{x^7}{5040} + \frac{x^8}{40\,320} + \frac{x^9}{362\,880} + O[x]^{10}$$

Мы видим, что остаточный член немного не такой, как на лекции: например, вместо малой буквы o стоит большая. Вообще запись $\alpha(x) = O(\beta(x))$ означает, что $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ — б.м. одного порядка. Если обратиться к записи формулы Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа (6), то следует признать, что форма остаточного члена, выбранная в системе *Mathematica*, вполне правомерна.

Чтобы получить многочлен Тейлора, следует поместить оператор `Series` внутрь оператора `Normal`:

```
Normal[Series[e^x,{x,0,9}]]
```

$$1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \frac{x^6}{720} + \frac{x^7}{5040} + \frac{x^8}{40\,320} + \frac{x^9}{362\,880}$$

Теперь можно вычислить как точное, так и приближенное значение многочлена Тейлора:

```
Normal[Series[e^x,{x,0,9}]]/.x → 1
```

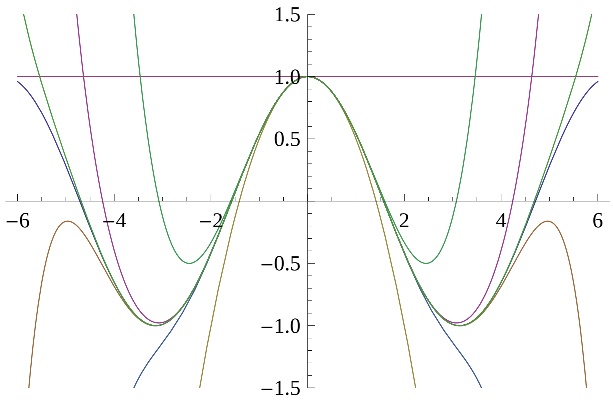
$$\frac{98\,641}{36\,288}$$

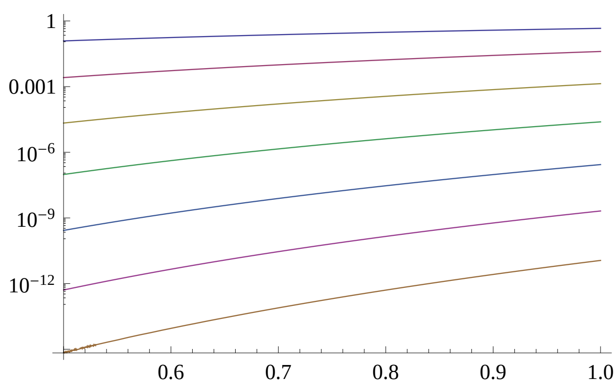
```
N[%]
```

2.71828

Построим, например, с помощью рассмотренных операторов графики многочленов Тейлора для функции $\cos x$, а также графики модулей соответствующих остаточных членов (как это было сделано в лекции для синуса):

```
f[x_]:=Cos[x];
g[x_,n_] := Normal[Series[f[x],{x,0,n}]];
Plot[Evaluate[{f[x],g[x,0],g[x,2],g[x,4],g[x,6],g[x,8], g[x,10],g[x,12]}],
    {x,-6,6},PlotRange → {-1.5,1.5}]
h[x_,n_]:=Abs[f[x] - Normal[Series[f[x],{x,0,n}]]];
LogPlot[Evaluate[{h[x,0],h[x,2],h[x,4],h[x,6],h[x,8],h[x,10],h[x,12]}],
       {x,0.5,1}]
```





Для построения графиков был применен оператор `Evaluate`, который необходим из-за того, что аргументы аппроксимирующей функции должны вычисляться, а оператор `Plot` запрещает это делать. Оператор `Evaluate` снимает это ограничение. Для получения второй картинки был применен оператор `LogPlot`, который позволяет на оси ординат использовать логарифмическую шкалу, делающую изображение более наглядным.

На лекции были найдены формулы Тейлора лишь для пяти основных элементарных функций. С помощью системы *Mathematica* нетрудно это проделать и для других функций этой же категории. Например, для арксинуса или гиперболического тангенса:

```
Series[ArcSin[x],{x,0,10}]
```

$$x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \frac{5x^7}{112} + \frac{35x^9}{1152} + O[x]^{11}$$

```
Series[Tanh[x],{x,0,10}]
```

$$x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} - \frac{17x^7}{315} + \frac{62x^9}{2835} + O[x]^{11}$$

Правда, в случае с арккотангенсом нас подстерегает неожиданность:

```
Series[ArcCot[x],{x,0,10}]
```

$$\frac{1}{2}\left((-1)^{\mathrm{Floor}\left[\frac{\pi+2\mathrm{Arg}[x]}{2\pi}\right]}\pi + \left(-2x + \frac{2x^3}{3} - \frac{2x^5}{5} + \frac{2x^7}{7} - \frac{2x^9}{9} + O[x]^{11}\right)\right)$$

Такой сложный ответ объясняется тем, что *Mathematica* использует разрывный в нуле котангенс, отличный от «отечественного». Об этом подробно говорилось на предыдущих лекциях†. Чтобы получить по формуле Тейлора разложение «нашего» котангенса, вначале зададим его с помощью функции

$$\mathrm{arcctg}[x\_] := \frac{\pi}{2} - \mathrm{ArcTan}[x]$$

а затем применим к ней оператор `Series`:

```
Series[arcctg[x],{x,0,10}]
```

$$\frac{\pi}{2} - x + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} - \frac{x^9}{9} + O[x]^{11}$$

Ареакосинус и ареакотангенс в действительной области в окрестности нуля не существуют, поэтому разложим их, например, в окрестности точки $x_0 = 2$:

```
Series[ArcCosh[x],{x,2,4}]
```

$$\mathrm{ArcCosh}[2] + \frac{x-2}{\sqrt{3}} - \frac{(x-2)^2}{3\sqrt{3}} + \frac{(x-2)^3}{6\sqrt{3}} - \frac{11(x-2)^4}{108\sqrt{3}} + O[x-2]^5$$

```
Series[ArcCoth[x],{x,2,4}]
```

$$\mathrm{ArcTanh}\left[\frac{1}{2}\right] - \frac{x-2}{3} + \frac{2}{9}(x-2)^2 - \frac{13}{81}(x-2)^3 + \frac{10}{81}(x-2)^4 + O[x-2]^5$$

Можно получить формулу Тейлора и для довольно сложной функции:

```
Series[Log[1 + e^-x Cos[x]^2],{x,0,7}]
```

$$\mathrm{Log}[2] - \frac{x}{2} - \frac{3x^2}{8} + \frac{x^3}{4} + \frac{7x^4}{192} + \frac{x^5}{48} - \frac{11x^6}{960} - \frac{x^7}{90} + O[x]^8$$

† Лекции «Функция I» и «Основные элементарные комплексные функции».

Mathematica в состоянии записать общую формулу Тейлора для произвольной функции:

```
Series[f[x],{x,a,4}]
```

$$f[a] + f'[a](x - a) + \frac{1}{2}f''[a](x - a)^2 + \frac{1}{6}f^{(3)}[a](x - a)^3 + \frac{1}{24}f^{(4)}[a](x - a)^4 + O[x - a]^5$$

и для функции, определяемой произвольным параметром:

$$\mathrm{Series}[(1 + x)^{\alpha},\{x,0,4\}]$$

$$1 + \alpha x + \frac{1}{2}(-1 + \alpha)\alpha x^2 + \frac{1}{6}(-2 + \alpha)(-1 + \alpha)\alpha x^3 + O[x]^4$$

Применение оператора `Normal[Series[Q_n(x),{x,a,n}]]` позволяет разложить многочлен $Q_n(x)$ по степеням $x - a$:

$$\mathrm{Normal}[\mathrm{Series}[2x^4 - 5x^3 - 3x^2 + 8x + 4,\{x,2,4\}]]$$

$$15(-2 + x)^2 + 11(-2 + x)^3 + 2(-2 + x)^4$$

Решение примера с диполем из материала лекции выглядит так:

$$\mathrm{Series}\left[\frac{kq}{(x-d)^2} - \frac{kq}{(x+d)^2}, \{d, 0, 1\}\right]$$

$$\frac{4kqd}{x^3} + O[d]^2$$

Литература

[1] Бугров Я.С., Никольский С.М. *Высшая математика. Дифференциальное и интегральное исчисление.* – М.: Наука, 1984, – с. 159-164, 167-171.

[2] Письменный Д.Т. *Конспект лекций по высшей математике.* – М.: Рольф, 2000. Ч. 1. – с. 181–185.