Преобразования Фурье

Волченко Ю.М.

Содержание лекции

Интеграл Фурье. Синус- и косинус-преобразования Фурье. Комплексный интеграл Фурье. Спектральная плотность. Случай четной и нечетной функции. Связь между спектральной плотностью, синус- и косинус преобразованиями Фурье. Физический смысл спектральной плотности. Теорема Котельникова и передача сообщений.

Анимация применения теоремы Котельникова.
Анимация работает только в программе Acrobat Reader!

Преобразования Фурье в системе *Mathematica*.

19 февраля 2016 г.

Все разложения функций в ряд Фурье, рассмотренные на предыдущих лекциях, выполнялись в конечном счете для периодических функций, основной период которых был сосредоточен на отрезке $[-l, l]$. Чтобы находить спектры непериодических функций, необходимо представить себе, что указанный отрезок неограниченно расширяется на всю числовую ось $(-\infty, \infty)$ при $l \to \infty$. Однако такое расширение приводит к тому, что формулы для коэффициентов Фурье и сам ряд Фурье теряют смысл. Чтобы его обрести вновь, оказывается надо перейти от сумм к интегралам.

Кроме того, на сигналы надо наложить требование, чтобы они постепенно и достаточно быстро уменьшали свою амплитуду при удалении от начала координат в бесконечность. Это условие записывается в виде

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\, dt < \infty, \qquad (1)$$

причем функция $f(t)$ называется в этом случае ***абсолютно интегрируемой***. Таким образом, вне нашего рассмотрения остаются непериодические функции, не удовлетворяющие этому условию.

Дальнейшие рассуждения не будут носить строгого математического характера, хотя выглядеть будут вполне правдоподобно. Вначале договоримся, что абсолютно интегрируемые функции $f\,(t)$, для которых выполняется равенство

$$f\,(t) = \frac{1}{2}\left[f\,(t-0) + f\,(t+0)\right],$$

будем относить к классу функций L', или $L'\,(-\infty,\infty)$.

1 Синус- и косинус-преобразования Фурье

По аналогии с коэффициентами Фурье введем для $f \in L'$ функции-коэффициенты

$$a\,(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f\,(t)\cos\omega t\,dt,$$
$$b\,(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f\,(t)\sin\omega t\,dt,\ \omega \in \mathbb{R},$$

обладающие, как можно показать, свойством непрерывности.

Аналогом N-й частичной суммы Фурье можно считать следующий интеграл[†]:

$$\begin{aligned} S_N\,(x) &= \int_0^N \left[a\,(\omega)\cos\omega x + b\,(\omega)\sin\omega x\right]\,d\omega = \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^N d\omega\int_{-\infty}^{\infty}\left[f\,(t)\cos\omega t\cos\omega x + f(t)\sin\omega t\sin\omega x\right]\,dt = \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^N d\omega\int_{-\infty}^{\infty} f\,(t)\cos\omega\,(t-x)\,\,dt. \end{aligned}$$

Можно доказать, что

$$\lim_{N\to\infty} S_N\,(x) = f\,(x)\,,$$

$f \in L'$. Из последних двух равенств следует, что

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} d\omega\int_{-\infty}^{\infty} f\,(t)\cos\omega\,(t-x)\,\,dt.$$

Эта запись называется ***интегралом Фурье***. Его можно представить в виде

$$f\,(x) = \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\infty}\cos\omega x\left(\int_{-\infty}^{\infty} f\,(t)\cos\omega t\,dt\right) + \sin\omega x\left(\int_{-\infty}^{\infty} f\,(t)\sin\omega t\,dt\right)\right]d\omega, \tag{2}$$

или

$$f\,(x) = \int_0^{\infty}\left[a\,(\omega)\cos\omega x + b\,(\omega)\sin\omega x\right]d\omega.$$

† Перестановка интегралов законна, но мы ее законность доказывать не станем. А так – все правдоподобно!

Такое представление должно вам напомнить разложение функции $f(x)$ в ряд Фурье. Формулу (2) можно рассматривать также как разложение функции $f(x)$ в сумму бесконечного числа гармонических колебаний с непрерывно изменяющейся частотой и амплитудой

$$A(\omega) = \sqrt{\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega t\,dt\right)^2 + \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\omega t\,dt\right)^2}.$$

Если функция $f(t)$ – четная, то второе слагаемое в формуле (2) равно нулю, и равенство упрощается:

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \cos\omega x \left(\int_0^{\infty} f(t)\cos\omega t\,dt\right) d\omega. \qquad (3)$$

Если же $f(t)$ нечетна, то

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \sin\omega x \left(\int_0^{\infty} f(t)\sin\omega t\,dt\right) d\omega. \qquad (4)$$

Формула

$$\boxed{F_c(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} f(t)\cos\omega t\,dt} \qquad (5)$$

называется ***косинус-преобразованием Фурье*** функции $f(t)$, а формула

$$\boxed{F_s(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} f(t)\sin\omega t\,dt} \qquad (6)$$

– ее ***синус-преобразованием Фурье***. Из равенства (3) тогда получаем

$$\boxed{f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} F_c(\omega)\cos\omega x\,d\omega}$$

– ***обратное косинус-преобразование Фурье***, а из равенства (4) имеем

$$\boxed{f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} F_s(\omega)\sin\omega x\,d\omega}$$

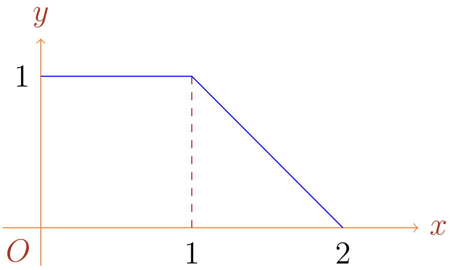
– ***обратное синус-преобразование Фурье***.

Формула (4) показывает, что должно выполняться $f(0) = 0$.

Из формул (3) и (4) видно, что применение к функции $f(t)$ сначала прямого, а затем обратного преобразования Фурье снова дает $f(t)$.

Если функция $f(t)$ является сигналом, который начинается в момент времени $t = 0$, то есть $f(t) = 0$ при $t < 0$, то ее можно продолжить на отрицательную полуось либо четным, либо нечетным способом. В первом случае получаем четную функцию, к которой можно применить косинус-преобразование Фурье (5), а во втором случае — нечетную функцию, к которой применимо синус-преобразование Фурье (6). Функции $F_c(\omega)$ и $F_s(\omega)$ в этих случаях являются спектральными характеристиками сигнала, описывающими его частотное поведение при непрерывном распределении частот вдоль числовой оси.

Пример 1. *Найти косинус- и синус-преобразования Фурье сигнала*



$$f(t) = \begin{cases} 0, & t \le 0 \vee t \ge 2; \\ 1, & 0 < t < 1; \\ 2 - t, & 1 \le t < 2. \end{cases}$$

Решение. Продолжим сигнал на отрицательную полуось четным образом и найдем косинус-преобразование Фурье:

$$\begin{aligned} F_c(\omega) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(t) \cos \omega t \, dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\int_0^1 \cos \omega t \, dt + \int_1^2 (2-t) \cos \omega t \, dt \right) = \\ &= \left\langle u = 2 - t, \ dv = \cos \omega t \, dt, \ du = -dt, \ v = \frac{1}{\omega} \sin \omega t \right\rangle = \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{1}{\omega} \sin \omega t \Big|_0^1 + \frac{2-t}{\omega} \sin \omega t \Big|_1^2 + \frac{1}{\omega} \int_1^2 \sin \omega t \, dt \right) = \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\cancel{\frac{\sin \omega}{\omega}} - \cancel{\frac{\sin \omega}{\omega}} - \frac{\cos \omega t}{\omega^2} \Big|_1^2 \right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\cos \omega - \cos 2\omega}{\omega^2}. \end{aligned}$$

Продолжим заданную функцию нечетным образом и найдем синус-преобразование Фурье:

$$\begin{aligned} F_s(\omega) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(t) \sin \omega t \, dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\int_0^1 \sin \omega t \, dt + \int_1^2 (2-t) \sin \omega t \, dt \right) = \\ &= \left\langle u = 2 - t, \ dv = \sin \omega t \, dt, \ du = -dt, \ v = -\frac{1}{\omega} \cos \omega t \right\rangle = \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(-\frac{1}{\omega} \cos \omega t \Big|_0^1 - \frac{2-t}{\omega} \cos \omega t \Big|_1^2 - \frac{1}{\omega} \int_1^2 \cos \omega t \, dt \right) = \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(-\frac{\cos \omega - 1}{\omega} + \frac{\cos \omega}{\omega} - \frac{\sin \omega t}{\omega^2} \Big|_1^2 \right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\omega + \sin \omega - \sin 2\omega}{\omega^2}. \end{aligned}$$

Графики этих спектральных характеристик показаны на рис. 1 и 2.

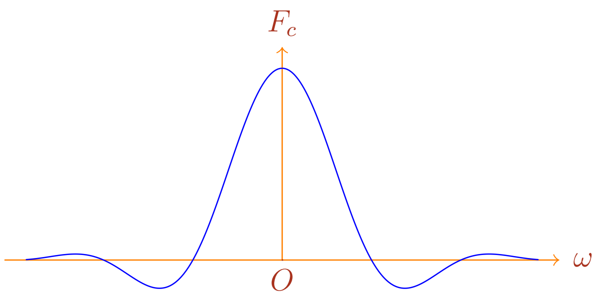


Рис. 1. Косинус-преобразование.

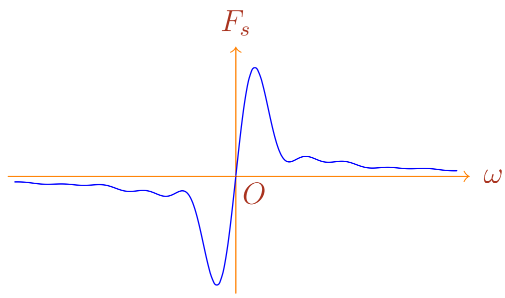


Рис. 2. Синус-преобразование.

2 Комплексное преобразование Фурье

Рассмотрим функцию, аналогичную коэффициентам Фурье для комплексного ряда Фурье:

$$c(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-j\omega t} dt,$$

и интеграл, подобный комплексному ряду Фурье:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} c(\omega)\, e^{j\omega x}\, d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-j\omega t}\, dt \right) e^{j\omega x}\, d\omega =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega x} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-j\omega t}\, dt \right) d\omega.$$

Это выражение называется ***комплексным интегралом Фурье***. Его часть

$$\boxed{F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-j\omega t}\, dt} \tag{7}$$

называется (***комплексным***) ***преобразованием Фурье*** функции $f(t)$, или ***спектральной плотностью***. Равенство

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\, e^{j\omega x}\, d\omega} \tag{8}$$

называется (***комплексным***) ***обратным преобразованием Фурье***. Переменную ω называют ***волновым числом***, или (***непрерывным***) ***спектром***.

Представим спектральную плотность следующим образом:

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \left[\cos \omega t - j \sin \omega t\right]\, dt =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\int_{-\infty}^{0} f(t) \cos \omega t\, dt + \int_{0}^{\infty} f(t) \cos \omega t\, dt - \right.$$

$$- j\int_{-\infty}^{0} f(t)\sin\omega t\,dt - j\int_{0}^{\infty} f(t)\sin\omega t\,dt\Bigg] =$$
$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[\int_{0}^{\infty}\frac{f(t)+f(-t)}{2}\cos\omega t\,dt - j\int_{0}^{\infty}\frac{f(t)-f(-t)}{2}\sin\omega t\,dt\right].$$

Если обозначить

$$g(t) = \frac{f(t)+f(-t)}{2},\ h(t) = \frac{f(t)-f(-t)}{2},$$

то $F(\omega)$ выразится через спектральные плотности $G_c(\omega)$ и $H_s(\omega)$, соответственно, функций $g(t)$ и $h(t)$:

$$F(\omega) = G_c(\omega) - jH_s(\omega).$$

В частности, если функция $f(t)$ – четная, то $g(t) = f(t)$, $h(t) = 0$ и

$$F_c(\omega) = \operatorname{Re} F(\omega) = F(\omega);$$

если же $f(t)$ – нечетная, то $h(t) = f(t)$, $g(t) = 0$ и

$$F_s(\omega) = -\operatorname{Im} F(\omega) = jF(\omega).$$

Еще один частный случай возникает, когда $f(t) = 0$, $t < 0$. В этом случае

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\int_{0}^{\infty} f(t)\cos\omega t\,dt - j\int_{0}^{\infty} f(t)\sin\omega t\,dt\right] =$$
$$= \frac{1}{2}F_c(\omega) - j\,\frac{1}{2}F_s(\omega).$$

Таким образом,

$$F_c(\omega) = 2\operatorname{Re} F(\omega),\ F_s(\omega) = -2\operatorname{Im} F(\omega). \tag{9}$$

Пример 2. *Найти спектральную плотность, синус- и косинус-преобразования Фурье для функции*

$$f(t) = e^{-\beta t},\ t > 0.$$

Решение. Найдем спектральную плотность по формуле (7):

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,e^{-j\omega t}\,dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty} e^{-\beta t}e^{-j\omega t}\,dt =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty} e^{-(\beta+j\omega)t}\,dt = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{1}{\beta+j\omega}\,e^{-(\beta+j\omega)t}\Bigg|_{0}^{\infty} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{1}{\beta+j\omega} =$$
$$= \frac{\beta-j\omega}{\sqrt{2\pi}\,(\beta^2+\omega^2)}.$$

Теперь, используя (9), получим косинус-преобразование (рис. 3)

$$F_c(\omega) = 2\operatorname{Re} F(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{\beta}{\beta^2+\omega^2}$$

и синус-преобразование Фурье (рис. 4)

$$F_s(\omega) = -2\,\mathrm{Im}\,F(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\omega}{\beta^2 + \omega^2}.$$

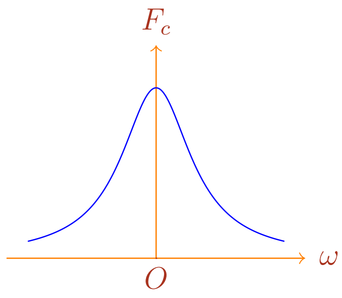


Рис. 3. Косинус-преобразование.

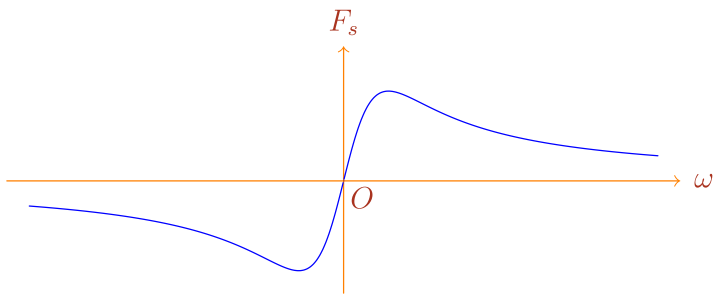


Рис. 4. Синус-преобразование.

□

Спектральная плотность в теории электричества имеет важный физический смысл.

Пример 3. *Энергия W сигнала $u(t)$ выражается формулой*

$$W = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)\, i(t)\, dt,$$

где $u(t)$ — напряжение, а $i(t)$ — ток. Учитывая закон Ома $u(t) = Ri(t)$ и считая сопротивление R единичным, получим

$$W = \int_{-\infty}^{\infty} u^2(t)\, dt.$$

Представим сигнал $u(t)$ в виде (8)*, изменим порядок интегрирования и используем формулу* (7)*:*

$$W = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \left(\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega \right) dt =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \left(\int_{-\infty}^{\infty} u(t)\, e^{j\omega t}\, dt \right) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\, \overline{F}(\omega)\, d\omega,$$

где черточка над функцией означает операцию комплексного сопряжения. Таким образом,

$$W = \int_{-\infty}^{\infty} u^2(t)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2\, d\omega.$$

Это равенство носит название теоремы Рэлея и устанавливает связь полной энергии сигнала с его спектральной плотностью.

3 Теорема Котельникова

Любое устройство, любая аппаратура работают в определенном диапазоне частот. Поэтому будем считать, что передаваемый или принимаемый сигнал $f(t)$ имеет ограниченный спектр:

$$F(\omega) \equiv 0, \; |\omega| > l > 0, \tag{10}$$

где $F(\omega)$ – спектральная плотность сигнала $f(t)$. Следовательно, обратное преобразование Фурье в этом случае имеет вид

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-l}^{l} F(\omega) e^{j\omega t} \, d\omega. \tag{11}$$

Разложим функцию $F(\omega)$ в ряд Фурье на отрезке $[-l, l]$:

$$F(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j\frac{n\pi\omega}{l}}, \tag{12}$$

где

$$c_n = \frac{1}{2l} \int_{-l}^{l} F(\omega) e^{-j\frac{n\pi\omega}{l}} \, d\omega.$$

На основании равенства (11) получаем

$$c_n = \frac{\sqrt{2\pi}}{2l} f\left(-\frac{\pi n}{l}\right). \tag{13}$$

Подставим в формулу (11) вместо функции $F(\omega)$ ее выражение из (12) и учтем выражения для коэффициентов (13):

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-l}^{l} \frac{\sqrt{2\pi}}{2l} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f\left(-\frac{\pi n}{l}\right) e^{j\frac{n\pi\omega}{l}} e^{j\omega t} \, d\omega = \langle \text{меняем } n \text{ на } -n \rangle =$$

$$= \frac{1}{2l} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{\pi n}{l}\right) \int_{-l}^{l} e^{j\omega\left(t-\frac{\pi n}{l}\right)} \, d\omega. \tag{14}$$

Но

$$\int_{-l}^{l} e^{j\omega\left(t-\frac{\pi n}{l}\right)} \, d\omega = \frac{1}{j\left(t-\frac{\pi n}{l}\right)} e^{j\omega\left(t-\frac{\pi n}{l}\right)} \Big|_{-l}^{l} =$$

$$= \frac{1}{j\left(t-\frac{\pi n}{l}\right)} \left[e^{jl\left(t-\frac{\pi n}{l}\right)} - e^{-jl\left(t-\frac{\pi n}{l}\right)}\right] = \frac{2}{t-\frac{\pi n}{l}} \sin l\left(t-\frac{\pi n}{l}\right)$$

и равенство (14) преобразуется в ***формулу Котельникова***:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{\pi n}{l}\right) \frac{\sin l\left(t-\frac{\pi n}{l}\right)}{l\left(t-\frac{\pi n}{l}\right)}. \tag{15}$$

Она показывает, что для восстановления сообщения, описываемого функцией с конечным спектром (10), достаточно передать по каналу связи лишь числа

$$\ldots, f(-2\Delta), f(-\Delta), f(0), f(\Delta), f(2\Delta), \cdots, \ \Delta = \pi/l,$$

которые называют ***отсчетными значениями***.

Это утверждение вместе с формулой (15) составляют содержание ***теоремы Котельникова***.

Реально время передачи и приема сообщения ограничены, поэтому вместо ряда в правой части (15) берут некоторую его частичную сумму

$$f(t) \approx \sum_{n=-N}^{N} f\left(\frac{\pi n}{l}\right) \frac{\sin l\left(t - \frac{\pi n}{l}\right)}{l\left(t - \frac{\pi n}{l}\right)}. \tag{16}$$

Специальные исследования посвящены оценке возникающих при этом погрешностей.

Если известно время передачи одного отсчетного значения и зависимость спектра сигнала от информационной насыщенности сообщений, то можно оценить количество таких сообщений, которые можно параллельно передавать по данному каналу связи, то есть оценить его пропускную способность.

Пример 4. *Визуально убедиться в приближении сигнала*

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0; \\ e^{-t}\cos t, & t > 0; \end{cases}$$

рядом (15).

Решение. График сигнала показан на рис. 6 красным цветом. Найдем его спектральную плотность:

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-j\omega t}\, dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t} \cos t e^{-j\omega t}\, dt =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t(1+j\omega)} \cos t\, dt.$$

Дважды интегрируя по частям и решая уравнение (такое у нас уже встречалось) или обращаясь к таблицам интегралов, получим

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\left[(1+j\omega)^2+1\right]}\, e^{-t(1+j\omega)} \left[\sin t - (1+j\omega)\cos t\right] \Big|_0^{\infty} =$$
$$= \frac{1+j\omega}{\sqrt{2\pi}\left[(1+j\omega)^2+1\right]} = \frac{1+j\omega}{\sqrt{2\pi}\left[(2-\omega^2)+2j\omega\right]} =$$
$$= \frac{(1+j\omega)\left[(2-\omega^2)-2j\omega\right]}{\sqrt{2\pi}\left[(2-\omega^2)^2+4\omega^2\right]} = \frac{\omega^2+2-j\omega^3}{\sqrt{2\pi}\,(\omega^4+4)}.$$

Найдем амплитудный спектр

$$|F(\omega)| = \frac{\sqrt{\left(\omega^2+2\right)^2+\omega^6}}{\sqrt{2\pi}\left(\omega^4+4\right)}$$

и построим его график, рис. 5. Видимо, значениями ω, бо́льшими 10, можно пренебречь. Поэтому в правой части формулы (16) выберем $l = 10$. На анимационном рис. 6 можно наблюдать, как при увеличении N правая часть формулы (16) (синяя кривая) все лучше приближает левую (красная кривая).

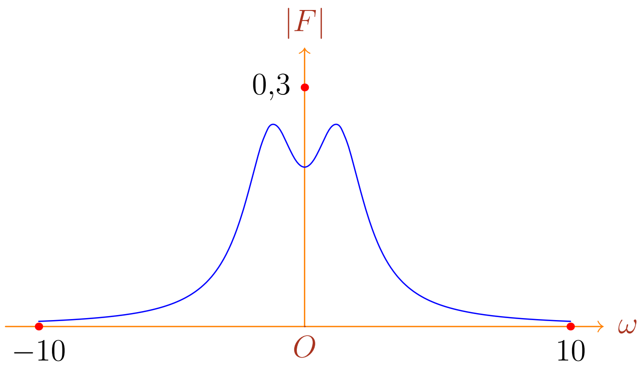


Рис. 5. Амплитудный спектр.

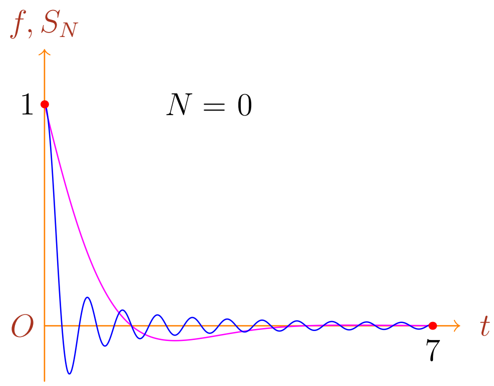


Рис. 6. Аппроксимация.

□

Выполнение преобразований Фурье в системе *Mathematica* приведено в Приложении[1].

Приложение

[1] Как и в области рядов Фурье, в области преобразований Фурье *Mathematica* имеет набор операторов, облегчающих выполнение рутинной работы по интегрированию.

Чтобы найти, например, для четной функции косинус-преобразование Фурье, существует оператор `FourierCosTransform[expr,t,ω]` где `expr` — выражение, для которого выполняется косинус-преобразование, `t` — аргумент этого выражения, ω — аргумент выполненного преобразования. Продемонстрируем его использование на примере функции $f(t) = \frac{1}{1+t^2}$:

$$\texttt{FourierCosTransform}\left[\frac{1}{1+\texttt{t}^2}, \texttt{t}, \omega\right]$$

$$\texttt{e}^{-\omega}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

С помощью обратного косинус-преобразования Фурье получим исходную функцию:

$$\texttt{InverseFourierCosTransform}\left[\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\texttt{e}^{-\omega}, \omega, \texttt{t}\right]$$

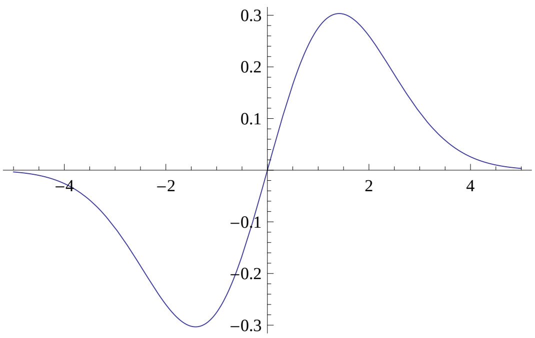
$$\frac{1}{1+\texttt{t}^2}$$

Аналогичным способом с помощью оператора `FourierSinTransform[expr,t,ω]` найдем синус-преобразование Фурье нечетной функции $f(t) = te^{-t^2}$ и построим график преобразования:

$$\texttt{FourierSinTransform}\left[\texttt{te}^{-\texttt{t}^2}, \texttt{t}, \omega\right]$$

$$\texttt{Plot[\%,\{}\omega\texttt{,-5,5\}]}$$

$$\frac{\texttt{e}^{-\frac{\omega^2}{4}}\omega}{2\sqrt{2}}$$



Оператор `FourierTransform[expr,t,ω]` с теми же аргументами, что и у предыдущих операторов, служит для вычисления комплексного преобразования Фурье. С его помощью можно убедиться в существовании спектральной плотности, имеющей колебания одинаковой интенсивности на всех частотах. Такую частотную характеристику имеет сигнал в виде дельта-функции:

$$\texttt{FourierTransform[DiracDelta[t],t,}\omega\texttt{]}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

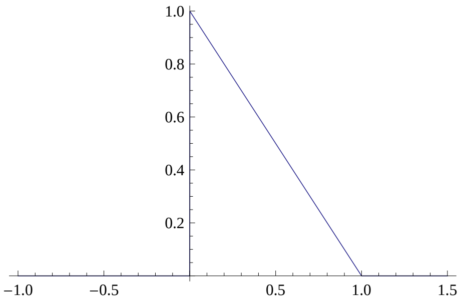
Конечно, физически это невозможно, но в теоретических исследованиях эта спектральная плотность используется, причем и в физике тоже.

Более реалистичный результат получим, если возьмем, например, сигнал

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ 1 - t, & t > 0; \end{cases}$$

Зададим его в системе *Mathematica* и построим график:

```
f[t_] := (1 − t) UnitBox[t − 1/2]
Plot[f[t],{t,−1,1.5}]
```

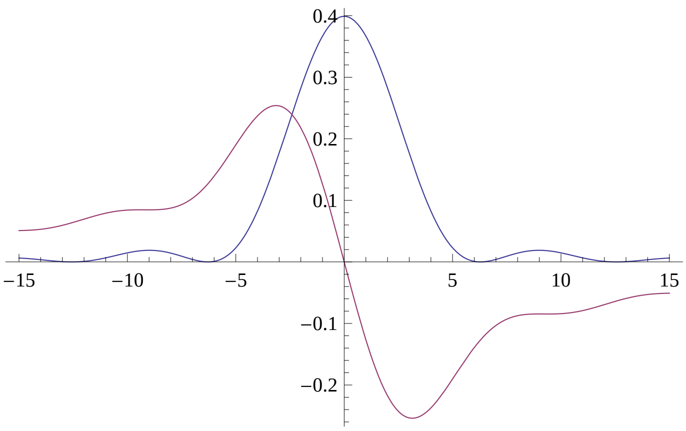


Найдем спектральную плотность и изобразим графики косинус- и синус-преобразований:

```
ff = FourierTransform[f[t],t,ω]
```

$$\frac{1 + \mathrm{I}\,\omega - \mathrm{Cos}[\omega] - \mathrm{I}\,\mathrm{Sin}[\omega]}{\sqrt{2\pi}\,\omega^2}$$

```
Plot[{2 Re[ff],−2 Im[ff]},{ω,−15,15}]
```



Литература

[1] Бугров Я.С., Никольский С.М. *Высшая математика. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного* . – М.: Наука, 1985, – с. 291-303.

[2] Письменный Д.Т. *Конспект лекций по высшей математике.* – М.: Рольф, 2000. Ч. 2. – с. 158–162.